Relations dans le groupe de Cremona, d'après Iskovskikh[1]

Stéphane Lamy

On travaille sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ où l'on note π la projection sur le premier facteur. La classe d'une fibre sera notée f, la classe d'une section s, et $h = s + f$ la classe de la diagonale (section hyperplane si on plonge $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ comme une quadrique dans $\mathbb{P}^3$).

On note $A = (\mathrm{PGL}(2) \times \mathrm{PGL}(2)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, et B le groupe des applications birationnelles qui préservent la fibration π. On note $\tau : (u, v) \to (v, u)$, $e : (u, v) \to (u, u/v)$ qui est une application élémentaire associée aux points $(0, 0)$ et (∞, ∞) (i.e. géométriquement e consiste à éclater ces deux points puis à contracter les fibres $u = 0$ et $u = \infty$). Plus généralement on note $e_{xy} \in B$ l'application élémentaire associée à deux points x et y (peut-être infiniment proches), obtenue à partir de e par conjugaison.

Théorème 1 *Le groupe de Cremona en dimension 2 est engendré par B et τ. De plus les relations suivantes forment un système complet de relations*[2] *:*

- *Les relations à l'intérieur des groupes A et B.*
- *La relation $(\tau e)^3 = (1/u, 1/v) \in A$.*

Preuve. Tout d'abord de la relation $(\tau e)^3 \in A$ on déduit que pour tout couple[3] de points x, y on a

$$\tau e_{xy} \tau e_{x'y'} \tau e_{xy} = a \in A$$

où $x' = \tau(x), y' = \tau(y)$. En effet soit $\varphi \in A \cap B$ qui envoie x', y' sur $(0, 0)$ et (∞, ∞). On a

$$\varphi^{-1} e \varphi = e_{x'y'} \text{ et } \varphi^{-1} \tau \varphi = \tau c = c^{-1} \tau$$

avec $c(x') = x$ et $c(y') = y$. D'où :

$$\varphi^{-1}(\tau e)^3 \varphi = (\tau c) \circ (e_{x'y'}) \circ (c^{-1}\tau) \circ (e_{x'y'}) \circ (\tau c) \circ (e_{x'y'}) \circ c^{-1} c = \tau e_{xy} \tau e_{x'y'} \tau e_{xy} c \in A.$$

Supposons que $R = b_1 \tau b_2 \tau \cdots \tau b_r \in A$, avec $b_i \in B$. On peut supposer que cette relation est réduite, au sens où les b_i ne sont pas dans A. Si g est un élément du groupe de Cremona on note

$$\alpha(g) = g(h).s \text{ et } \beta(g) = g(h).f$$

En particulier on note

$$\alpha_i = \alpha(b_i \tau \cdots \tau b_r) \text{ et } \beta_i = \beta(b_i \tau \cdots \tau b_r)$$

On note enfin $\beta = \max_i \beta_i$, et s le plus grand indice tel que $\beta = \beta_s$. La preuve de la proposition suivante est résumée sur la figure 1.

Proposition 1 *Soit f dans le groupe de Cremona, et e_{xy} une transformation élémentaire. Alors $\beta(e_{xy} \circ f) = \beta(f)$ et $\alpha(e_{xy} \circ f) = \alpha(f) + \beta(f) - \nu_x - \nu_y$, où ν_x et ν_y sont les multiplicités de $f(h)$ en x, y. En particulier $\beta_i = \alpha_{i+1}$ pour tout i.*

Soient $x_1, \cdots, x_{2m}$ les points d'indétermination de b_s, et $\nu_1, \cdots, \nu_{2m}$ les multiplicités de ces points dans le système linéaire $\tau b_{s+1} \tau \cdots \tau b_r(h)$.

Le principe de la preuve est de chercher à reécrire la relation R à l'aide des relations listées dans le théorème de façon à faire baisser les entiers (β, s, m) ordonnés par ordre lexicographique.

[1] "Proof of a theorem on relations in the two-dimensional Cremona group", Uspekhi Mat. Nauk 40, p. 255–256, 1985

[2] On se sert aussi dans la preuve de la relation $(\tau \circ (u, u - v))^3 = (-u, -v) \in A$, qui se déduit de celle de l'énoncé en remarquant que $\varphi \circ (u, u - v) = (u, u/v) \circ \varphi$ avec $\varphi = \left(\frac{(v-u+1)(v-1)}{(v-u-1)(v+1)}, \frac{v-u+1}{v-u-1}\right)$.

[3] Pas dans une même fibre ou une même section. Si x et y infiniment proches, on fait un calcul similaire à partir de la formule dans la note précédente.

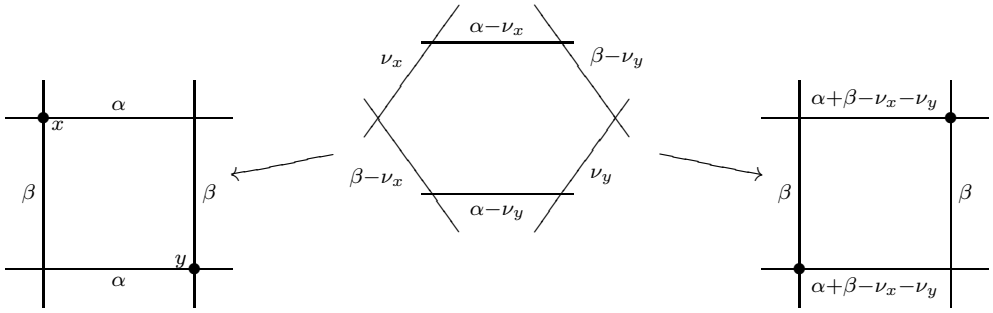

Figure 1: Preuve en image de la proposition.

Lemme 1 *Si $m = 1$ on peut faire baisser s, sans faire monter β.*

Preuve. Si $b_s = a_0 e_{xy}$ (où $a_0 \in A \cap B$) on écrit :

$$b_1\tau \cdots b_{s-1}(\tau a_0 \tau)(\tau e_{xy}\tau)b_{s+1} \cdots \tau b_r = b_1\tau \cdots b_{s-1}a'_0(a e_{x'y'}\tau e_{xy})b_{s+1} \cdots \tau b_r$$

et on voit que s a diminué; de plus β diminue éventuellement ou reste constant [4]. □

Lemme 2 *Supposons que pour tous i, j on ait $\nu_i + \nu_j \leq \beta_{s+1}$. Alors $m = 1$.*

Preuve. En écrivant $b_s = \cdots e_{x_3x_4}e_{x_1x_2}$ et en appliquant m fois la proposition on voit que

$$\beta = \beta_s \geq \beta_{s-1} = \alpha_s = \beta_{s+1} + m\underbrace{\alpha_{s+1}}_{=\beta} - \sum_{i=1}^{2m} \nu_i.$$

D'où

$$(m-1)\beta_{s+1} \geq \sum_{i=1}^{2m} \nu_i - \beta_{s+1} \geq (m-1)\beta$$

et donc $m = 1$, car $\beta_{s-1} < \beta$ par maximalité de s. □

Lemme 3 *Supposons que $m \geq 2$ et qu'il existe deux points, disons x_1 et x_2, tels que $\nu_1 + \nu_2 > \beta_{s+1}$. Alors on peut faire baisser m de 1, en gardant β et s constants.*

Preuve. Posons $b_s = b'_s e_{x_1x_2}$. On a $e_{x_1x_2}\tau = a\tau e_{x_1x_2}\tau e_{x'_1x'_2}$ et donc R s'écrit maintenant

$$R = b_1\tau b_2\tau \cdots \tau b'_s a\tau e_{x_1x_2}\tau e_{x'_1x'_2} b_{s+1}\tau \cdots \tau b_r.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\beta(e_{x'_1x'_2}b_{s+1}\tau \cdots \tau b_r) &= \beta_{s+1} < \beta \text{ (par maximalité de } s) \\
\alpha(e_{x'_1x'_2}b_{s+1}\tau \cdots \tau b_r) &= \alpha_{s+1} + \beta_{s+1} - \nu_1 - \nu_2 < \alpha_{s+1} = \beta \\
\beta(e_{x_1x_2}\tau e_{x'_1x'_2}b_{s+1}\tau \cdots \tau b_r) &= \alpha_{s+1} + \beta_{s+1} - \nu_1 - \nu_2 < \beta.
\end{aligned}$$

Donc le nombre β ainsi que l'indice s restent constants. De plus $b'_s a$ a deux points d'indétermination de moins que b_s, autrement dit m a diminué de 1. □

Le résultat d'Iskovskikh est une récurrence immédiate à partir de ces trois lemmes : remarquons qu'après avoir appliqué le lemme 1 il se peut que la relation ne soit plus réduite (certain b_i sont dans A), dans ce cas on réduit en diminuant éventuellement (β, s, m) et en obtenant peut-être une relation triviale du type $a = a$; c'est cette dernière situation qui achève la récurrence.

[4] Remarquer que $\beta_r = 1$ et $\beta_{r-1} = \alpha_r \geq 2$, d'autre part $\beta_1 = 1$, donc $1 < s < r$