12-12-2022

Cours 14

But : théorème de Riemann - Roch

permet de compter les fonctions méromorphes et les 1-formes méromorphes avec des pôles et des zéros prescrits - en terme de quantité topologique (e.g. le genre)

4. Corps des fonctions méromorphes

S surface de Riemann compacte connexe.

rappel : une fonction méromorphe $f : S \to \mathbb{C}$ est équivalent à la donnée d'une fonction holomorphe $f : S \to \hat{\mathbb{C}}$ telle que

$\exists p \in S \quad f(p) \neq \infty \qquad \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

rappel : on a démontré que si $p \neq q \in S$

il existait une fonction méromorphe

$f : S \to \mathbb{C}$ tq p est un zéro de f et

q est un pôle de f.

$\Rightarrow \hat{f} : S \to \hat{\mathbb{C}}$ non constante avec

$\hat{f}(p) = 0 \quad \hat{f}(q) = \infty$

$\hat{f}$ est surjective.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{M}(S) &= \{ \text{fonctions méromorphes sur } S \} \\ &= \{ f : S \to \mathbb{C} \text{ méromorphe} \} \\ &= \{ \hat{f} : S \to \hat{\mathbb{C}} \text{ hol. } \hat{f} \not\equiv \infty \} \end{aligned}}$$

observation : $\mathcal{M}(S)$ est un corps.

$f, g : S \to \mathbb{C}$. $\lambda f + g$ méromorphe

$\lambda \in \mathbb{C}$. si $g \not\equiv 0$ $\frac{1}{g}$ méromorphe

exemple. $S = \hat{\mathbb{C}} = \underset{\mathbb{C}}{\mathbb{C}} \cup \{\infty\}$

3.

$$\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) = \{ f : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} \text{ méromorphe} \}$$

$$= \left\{ \frac{P(z)}{Q(z)} ,\ P, Q \in \mathbb{C}[z] ,\ \gcd(P, Q) = 1 \quad Q \neq 0 \right\}$$

$$= \mathbb{C}(z)$$

corps des fractions à une indéterminée complexe.

Thm S surface de Riemann compacte connexe, $f : S \to \mathbb{C}$ méromorphe non constante.

$$g \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) \longmapsto g \circ f \in \mathcal{M}(S)$$

$$f^* : \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) \to \mathcal{M}(S).$$

est un morphisme de corps (donc injectif).

$\mathcal{M}(S)$ est une extension finie de $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$

$$[\mathcal{M}(S) : f^* \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})] < \infty$$

remarque : • $[\mathcal{M}(S) : f^* \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})] = \deg(f)$

• $\{$surfaces de R. compactes$\}$ $\rightleftarrows$ $\left\{\begin{matrix}\text{extension finie} \\ \text{de } \mathbb{C}(z)\end{matrix}\right\}$

en particulier les surfaces de Riemann sont algébriques.

démonstration : $f : S \to \mathbb{C}$ méromorphe

$\hat{f} : S \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorphe non constante

$\leadsto$ c'est un revêtement ramifié.

$\mathrm{Ram}\, \hat{f} = \{ p,\ \mathrm{ord}_p(\hat{f}) \geq 2 \}$

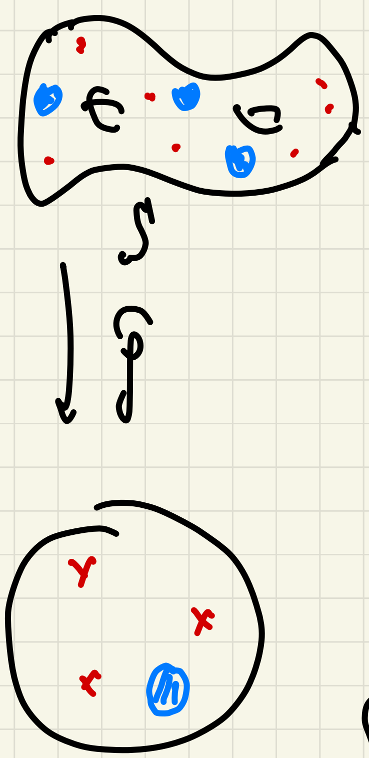
$= \{ p,\ \hat{f}$ n'est pas un biholomorphisme local en $p \}$

$U = \hat{\mathbb{C}} - \hat{f}(\mathrm{Ram}\, \hat{f})$

$V = \hat{f}^{-1}(U) = S - F$ avec

$F = \hat{f}^{-1}\hat{f}(\mathrm{Ram}\, \hat{f})$ fini

$\hat{f} : V \to U$ revêtement fini de degré d (fini).



Ram $\hat{f}$

On va démontrer que

$g \in \mathcal{M}(S)$

$\exists\ P \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})[T]$

qui annule g et de degré

$\leq \deg(f) = n$

$$P(T) = T^n + \alpha_1 T^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

$\alpha_i \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ $\quad P(g) = 0$.

$$\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) \hookrightarrow \mathcal{M}(S)$$
$$h \mapsto h \circ f.$$

$\alpha_i = \beta_i \circ f$

$\beta_i \in \mathbb{C}(z)$.

$$P(g) = g^n + \beta_1 \circ f\, g^{n-1} + \dots + \beta_n \circ f = 0.$$

On choisit $g : S \to \mathbb{C}$ méromorphe

(pôles de $g \subseteq F = S - V$).

$f : V \to U$ revêtement de degré n.

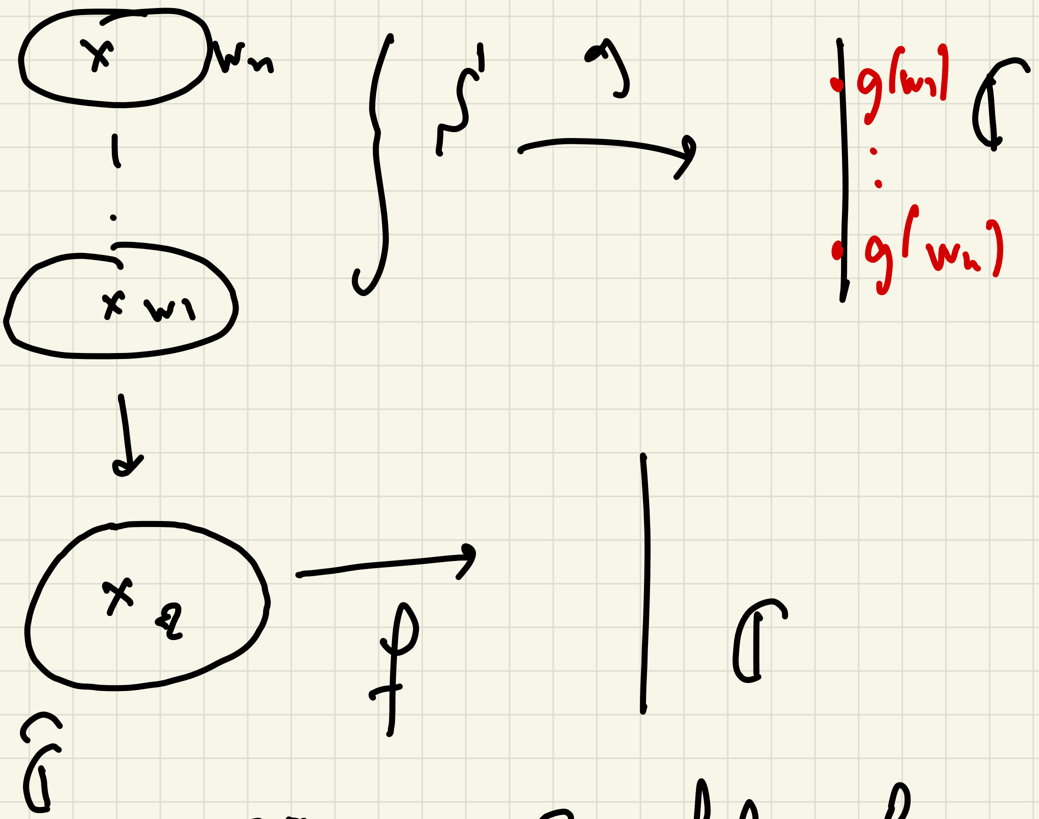
$z \in U \qquad f^{-1}\{z\} = \{w_1, \dots, w_n\}$

$$s_1(z) = \sum_{i=1}^{n} g(w_i)$$

$$s_2(z) = \sum_{i \neq j} g(w_i)\, g(w_j)$$

$s_k(z)$ = polynôme symétrique de degré k en les $g(w_1) \dots g(w_n)$

$$s_n(z) = g(w_1) \cdots g(w_n).$$

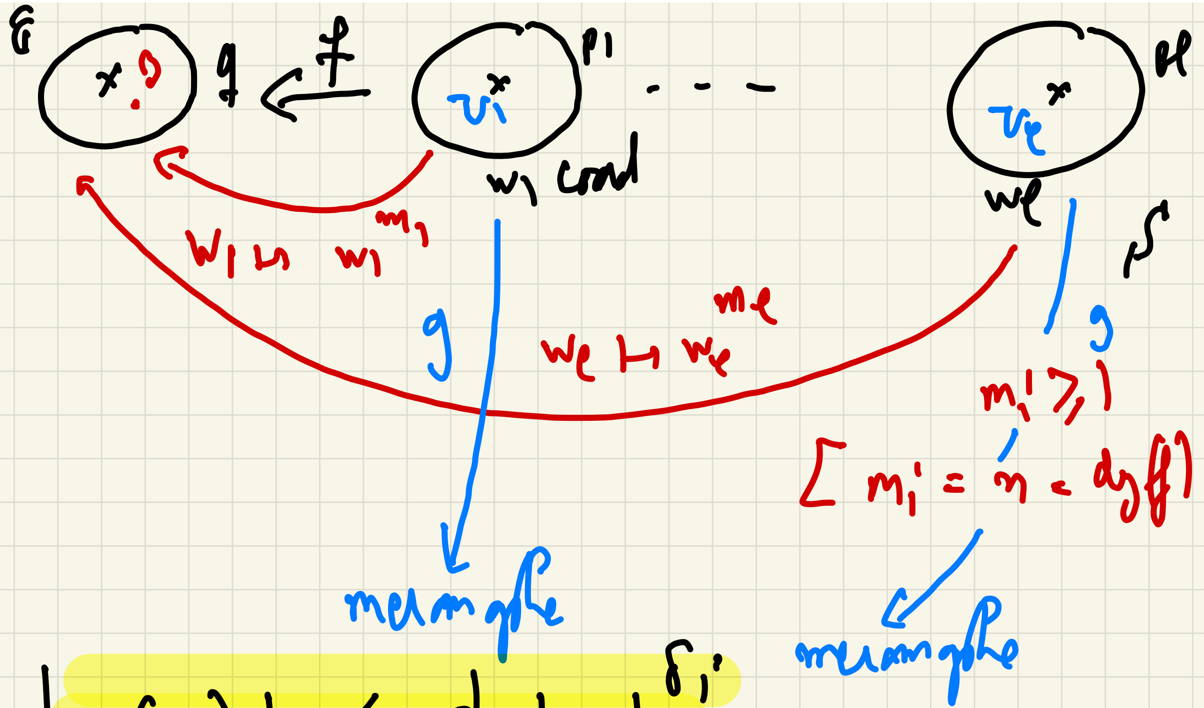


$\phi_k : U \to \mathbb{C}$ holomorphe.

lemme : pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, ϕ_k est méromorphe.

démonstration : $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus G$

G fini : il faut montrer que ϕ_k n'a pas de singularité essentielle en un pt $g \in G$



$$|g(w_i')| \le C_i' \, |w_i'|^{\delta_i'}$$

$\exists\, C_i' > 0 \quad \delta_i' \in \mathbb{Z}$.

w_i' carte centrée en p_i'

$$|s_1(z)| = \Big| \sum_{f(w)=z} g(w) \Big| \le C_1 |w_1|^{\delta_1}_{m_1} + \dots$$

$$\dots + C_\ell |w_\ell|^{\delta}_{m_\ell}$$

$$f^{-1}(z) \cap U_i = \{ J^j w_i' \}_{j=1}^{m_i'} \quad J \text{ racine } m_i'\text{-ième de } 1$$

$$w_i'^{\,m_i'} = z.$$

$$|\sigma_1(z)| \leq \sum_{i=1}^{\ell} m_i\, C_i' \,|w_i'|^{\delta_i'}$$

$w_i'^{m_i'} = z$

$$\leq (Cst) \sum |z|^{\delta_i'/m_i'}$$

$$\leq Cst\ |z|^{\delta/m}$$

$\delta/m = \min \delta_i'/m_i' \in \mathbb{Q}$

σ_1 hol. sur $\mathbb{D}^\times$ tq $|\sigma_1(z)| \leq C' |z|^{\delta/m}$

$\Rightarrow$ σ_1 est méromorphe.

$$\sigma_2(z) = \sum_{\substack{f(w) = f(w') = z \\ w \neq w'}} g(w)\, g(w')$$

$$|\sigma_2(z)| \leq Cst\ |z|^{2\delta/m}$$

$\Rightarrow$ σ_2 est méromorphe.

conclusion $\sigma_1 \ldots \sigma_n \in \mathbb{C}(z)$.

$$P(T) = T^n - (\sigma_1 \circ f) T^{n-1} + (\sigma_2 \circ f) T^{n-2} + \ldots + (-1)^n \sigma_n \circ f$$

$$\in f^* \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) [T]$$

$P(g) = 0$ par construction.

$w \in \check{V} \subseteq \mathcal{S}$ $f^{-1} f(w) = \{ w_1 \ldots w_n \}$ ($w = w_i$)

$$P_w(T) = T^n - \sigma_1 \circ f(w) T^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n \circ f(w)$$

polynôme de degré n dont les solutions ($\mathbb{C}$)

sont $\alpha_1 \ldots \alpha_n$

polynôme symétrique de degré k (α_i)

$=$ $\sigma_k \circ f(w) =$ polynôme symétrique de degré k en $g(w_i)$

en particulier $g(w)$ est un géné
de P_w $\Rightarrow$ $P_w(g(w)) = 0$

$\Rightarrow$ $P(g) = 0$

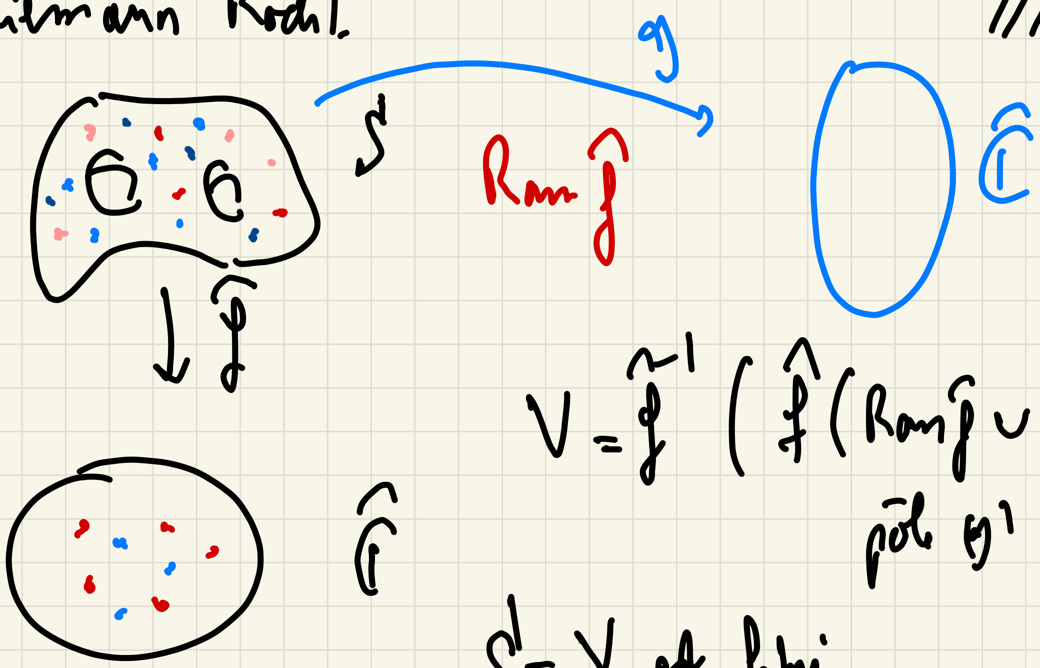
fonction méromorphe sur S
nulle sur V, donc nulle partout ///

- $\forall g \in \mathcal{M}(S)$ $\exists P \in \mathcal{M}(\hat{\Gamma})[T]$
$\deg(P) \leq n$ $P(g) = 0$

$\mathcal{M}(S) - \mathcal{M}(\hat{\Gamma})$ caractéristique nulle
thm de l'élément primitif $\Rightarrow$ $\exists g \in \mathcal{M}(S)$
$\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}[\hat{\Gamma}][g]$

$\Rightarrow \quad [\mathcal{M}(S') : \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})] \leq n$

Remarque : on a égalité (mais il faut Riemann Roch). ///



$$V = \hat{f}^{-1}\left(\hat{f}\left(\mathrm{Ram}\,\hat{g} \cup \text{pôle}(g)\right)\right)$$

$S' - V$ est fini.

Exercice.

RH. $S \xrightarrow{d} S'$ revêtement

$\chi(S) = d\,\chi(S')$

Σ car. Euler-Poincaré.

- $\chi(S) = 2 - 2g$.

$\chi < 0 \iff S$ est hyperbolique

S pas $\hat{\mathbb{C}}$, pas $\mathbb{C}/\Lambda$

$\iff$ revêtement universel

$\chi < 0 \iff \hat{S} = \mathbb{H}$.

$\chi = 0 \iff \hat{S} = \mathbb{C}$

$\chi = 2 \iff \chi > 0 \iff S = \hat{\mathbb{C}}$

$\pi^* \omega = dz$ 1-forme hol. sur $\mathbb{C}/\Lambda$

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}/\Lambda$$

$$\frac{i}{2}\int_{\mathbb{C}/\Lambda} \omega \wedge \bar{\omega} = \int_{[0,1)+\tau[0,1)} \frac{i}{2}\, dz \wedge d\bar{z} = A > 0.$$

$$\frac{i}{2}\int_{\mathbb{C}/\Lambda} f^*\omega \wedge f^*\bar{\omega} = d^2\, \frac{i}{2}\int_{\mathbb{C}/\Lambda} \omega \wedge \bar{\omega}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\times d"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C}/\Lambda \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C}/\Lambda \end{tikzcd}$$

$$\| $$

$$\int f^*\left(\frac{i}{2}\, \omega \wedge \bar{\omega}\right)$$

$\|$ revêtement de degré δ

$$\delta \int \frac{i}{2}\, \omega \wedge \bar{\omega} \quad \to \quad \boxed{\delta = d^2}$$

Exercice S surface de R. compacte

$g = \text{genre}(S) \geq 2$

$\chi(S) < 0$

Thm

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Aut}(S) \text{ est fini et} \\ \text{Card Aut}(S) \leq 84(g-1)\end{array}}$$

exercice 3 $\longrightarrow$ G sous-groupe fini de $\text{Aut}(S)$

alors $\# G \leq 84(g-1)$

g=0 $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = PGL(2, \mathbb{C})$

g=1 $\text{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ est toujours infini

$z \mapsto z + z_0$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{z \mapsto z + z_0} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{C}/\Lambda & \xrightarrow{T_{z_0}} & \mathbb{C}/\Lambda \end{array}$$

π = revêtement universel

$z_0 \in \mathbb{C}$

$\{T_{z_0}\}$ sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$

$(-\mathrm{id}) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$

$\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ avec $\mathrm{Im}(\omega) > 0$

On a une suite exacte de groupes

$$0 \to \mathrm{Aut}_0(\mathbb{C}/\Lambda) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda) \to \{\pm 1\} \to 0$$

$$\mathrm{Aut}_0(\mathbb{C}/\Lambda) = \{T_{z_0}\}$$

sauf si $\Lambda = \mathbb{Z}[i]$ ou $\mathbb{Z}[j]$ $(j^3 = 1)$.

$\chi(S') < 0$

G groupe fini $\subseteq \mathrm{Aut}(S')$

$G \circlearrowright S' \xrightarrow[\pi]{} S/G$ $\quad \pi(z) = \pi(z') \Leftrightarrow \exists g \in G \; g z = z'$

application hol

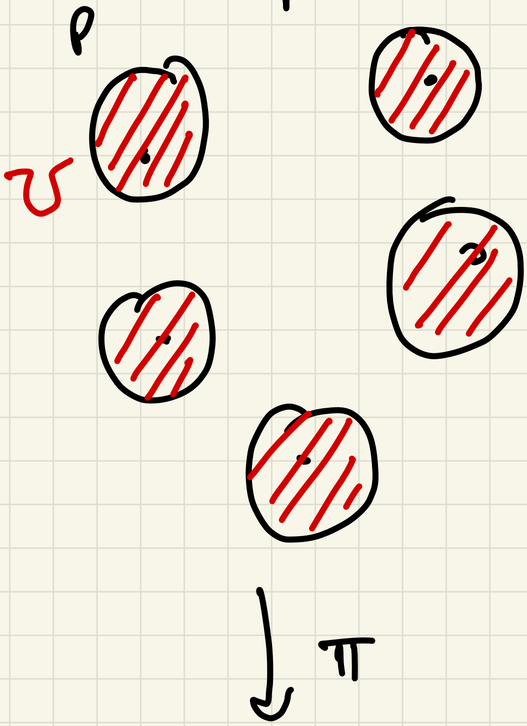
On veut appliquer R.H (?)

- degré $\pi = d = \# G$
- $g = $ genre de S/G
- points de ramification de π

× **observation**: un point de ramification de π est un point $p \in S'$ tel que

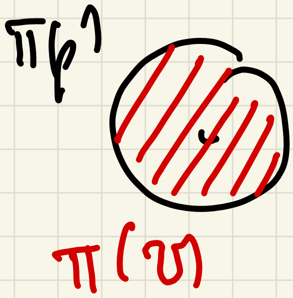
$\mathrm{Stab}(p) = \{g, \; g \cdot p = p\} \neq \{\mathrm{Id}\}$.

. si $\mathrm{Stab}(p) = \{Id\}$



$$\begin{cases} G.p \subseteq S \\ gU \cap U \neq \emptyset \\ \Rightarrow g = id. \end{cases}$$

alors π est un revêtement de degré $\# G$ de $\pi^{-1}\pi(U) \to \pi(U)$



S/G

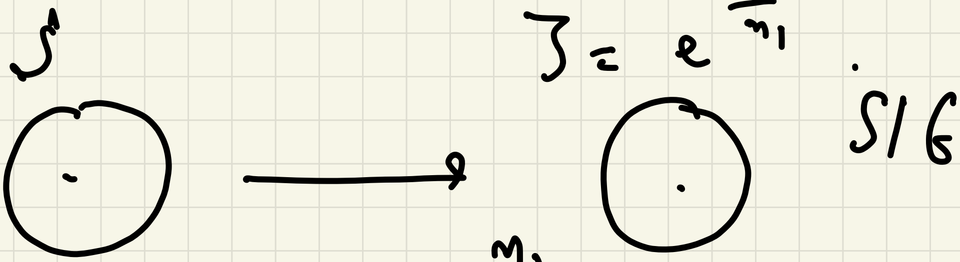
. si $\mathrm{Stab}(p) = G_1 \qquad \# G_1 = n_1$

Lemme de Cartan $\exists$ carte $G_1 = \langle g_1 \rangle$

$\exists$ carte hol. centrée en p tq

$G_1 = \langle g_1 \rangle \qquad g_1(z) = \zeta z$

$\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n_1}}$



$p \qquad z \longmapsto z^{n_1}$

$\mathrm{ord}_p(\pi) = n_1 = \# \mathrm{Stab}(p)$

$p_\ell \;\bullet \qquad \pi$ revêtement ramifié de degré $\# G$

$\vdots$

$p_1 \;\bullet \qquad \# \mathrm{Stab}(p_1) = \# \mathrm{Stab}(p_2) = \cdots = \# \mathrm{Stab}(p_\ell)$

$\downarrow \pi$

$q \;\bullet \quad S/G$

en effet si $p_1 = g \cdot p_2 \qquad g \in G$

$$\begin{aligned} \mathrm{Stab}(p_1) &\longrightarrow \mathrm{Stab}(p_2) \quad \text{isomorphisme} \\ h &\longmapsto g^{-1} h g \end{aligned}$$

On note $y_1 \dots y_h = \pi(\mathrm{Ram}_\pi)$

$y_i \xleftarrow{\pi} x^{(i)}_{z_1} \dots x^{(i)}_{z_\ell} \qquad n_i = \# \pi^{-1}(y_i)$

$\mathrm{ord}_\pi(x^{(i)}_j) = \# \mathrm{Stab}(x^{(i)}_{z_1}) = m_i \geq 2$

$\# G =$ nombre de préimages de y_i (avec multiplicité)

$= n_i \cdot m_i$

$\boxed{\# G = n_i \, \lambda_i}$ $\forall i$ $\boxed{\# G = d.}$

R-H $\quad (2-2g) = \# G\,(2-2g') - \sum \left(\mathrm{ord}_P(\pi)-1\right)$

$\chi(S) \qquad\qquad \chi(S/G)$

$$\boxed{(2-2g) = d(2-2g') - \sum_i \lambda_i\,(n_i-1)}$$

$\vdots \Big\}\, \lambda_i$ points $\quad (?)$

$d \qquad \Longrightarrow \qquad d \leq 84(g-1)$

$g_i \in S/G$

On veut supprimer les λ_i !

$$(g-1) = d(g'-1) + \frac{1}{2}\sum_i (\lambda_i n_i - \lambda_i)$$

$$= d(g'-1) + \frac{1}{2}\sum \left(d - \frac{d}{n_i}\right)$$

conclusion :

$$\boxed{(g-1) = d\left[(g'-1) + \frac{1}{2}\sum\left(1-\frac{1}{n_i}\right)\right]}$$

on veut borner d en fonction de g.

$d \leq 84\,(g-1)$

$$\Leftrightarrow (g'-1) + \frac{1}{2}\sum\left(1-\frac{1}{n_i}\right) \geqslant \frac{1}{84} \quad ?$$

$n_i \geqslant 2 \qquad 1-\frac{1}{n_i} \geqslant \frac{1}{2}$

si $g' \geqslant 2 \qquad g'-1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n_i}\right) \geqslant g'-1 = 1$

$\Rightarrow d \leq g-1$!

A faire pour lundi prochain !!!
19 décembre

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{si } g' = 1 & g'-1 + \frac{1}{2}\sum\left(1-\frac{1}{n_i}\right) \geq 1/4 \\ \text{si } g' = 0 & g'-1 + \frac{1}{2}\sum\left(1-\frac{1}{n_i}\right) \geq 1/84 \end{array}}$$

remarque : quels sont les groupes finis de $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ $\Leftrightarrow$ groupes finis de $SO(3)$!

U_n $D_n = \mathbb{Z}/2 \ltimes \mathbb{Z}/n$ 3 groupes exceptionnels (cube, tétraèdre, icosaèdre).