Tomo 15

20-12-2022

S surface de Riemann compacte connexe
thm de Riemann-Roch = comptage de fonctions méromorphes sur S.

5. Groupe des diviseurs

Un diviseur D sur S est une somme formelle de points de S.

$$\boxed{D = \sum_{i \in I} n_i \, (p_i)} \qquad p_i \in S$$

$n_i \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ I fini

$\mathrm{Div}(S)$ = ensemble des diviseurs sur S

groupe abélien libre engendré $\{ p \in S \}$

$D, D' \in \mathrm{Div}(S^1) \longrightarrow D + D'$

$D = \sum n_i \, p_i \qquad D' = \sum n'_i \, p'_i$

$D + D' = \sum n_i p_i + \sum n'_i p'_i$

$n(p) + m(p) = (n+m)(p)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Div}(S^1) \times S^1 &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ D \quad\quad p &\longmapsto v_p(D) \end{aligned}$$

$$\boxed{D = \sum_{p \in S^1} v_p(D) \, (p)}$$

$\{ p \in S^1, \, v_p(D) \neq 0 \}$ est fini.

$D \in \mathrm{Div}(S)$ $\quad D = \sum n_i (p_i)$

$\deg(D) = \sum n_i \in \mathbb{Z}$

$\deg : \mathrm{Div}(S) \to \mathbb{Z}$ morphisme

exemple. diviseur principal. $f : S \to \hat{\mathbb{C}}$

$f \in \mathcal{M}(S)$ non constante

Σ corps des fonctions méromorphes sur S

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{f(p)=0} \mathrm{ord}_p(f)\,(p) - \sum_{f(p)=\infty} \mathrm{ord}_p(f)\,(p)$$

$\mathrm{ord}_p(f) \in \mathbb{N}^*$ $\qquad$ $\mathrm{ord}_p(f) \in \mathbb{N}^*$

observation :

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = \sum_{f(p)=0} \mathrm{ord}_p(f) - \sum_{f(p)=\infty} \mathrm{ord}_p(f)$$

$$= \deg(f) - \deg(f) = 0$$

définition : D est **linéairement équivalent** à D' si $\exists\, f \in \mathcal{M}(S')$ non constante telle que

$$\boxed{D - D' = \operatorname{div}(f)}$$

On écrit $D \equiv D'$

<u>observation</u> : si $D \equiv D' \Rightarrow d_g(D) = d_g(D')$.

exemple **diviseur canonique**

ω = 1-forme méromorphe non nulle sur S'

(par exemple $\omega = df$, $f \in \mathcal{M}(S')$ non constante)

$$\boxed{K_\omega = \sum_{p \in S} v_p(\omega)\, (p)}$$

centré en p

$\omega = z^h (a + p(z)) \, dz$

$v_p(\omega) = h \in \mathbb{Z}$.

observation si ω est holomorphe alors

$v_p(\omega) \geq 0 \quad \forall p \in S$

observation ω, ω' 1-formes méromorphes non constantes alors $\frac{\omega}{\omega'} = f \in \mathcal{M}(S)$

localement $\omega = h(z)\,dz \quad \omega' = g(z)\,dz$

$$f(z) = h(z)/g(z).$$

$$K_\omega - K_{\omega'} = \operatorname{div}(f)$$

$$\Rightarrow \quad K_\omega \equiv K_{\omega'}$$

Deux diviseurs canoniques sont nécessairement linéairement équivalents.

Lemme $\boxed{\deg(K_\omega) = 2g-2}$

démonstration: $\omega = df$ $\quad f : S \to \hat{\mathbb{C}}$ hol. surjective.

on note $n = \deg(f)$

Riemann-Hurwitz à f :

$$\chi(S) = 2-2g = \deg(f) \times 2 - \sum_{p \in S} (\mathrm{ord}_p(f) - 1)$$

on peut s'arranger pour que

$\# f^{-1}(\infty) = n$ (ainsi on considère $\phi \circ f$ avec $\phi \in PGL(2,\mathbb{C})$)

$p \in S$ $\quad f(z) = z^k$ $\quad k = \mathrm{ord}_p(f)$

$$\omega = df = k z^{k-1} dz$$

$k-1 = v_p(K_\omega)$

$$K_\omega = \sum_{\mathrm{ord}_p(f) \geq 2} \left(\mathrm{ord}_p(f) - 1\right)(p) + \sum_{f(p) = \infty} (-2)\,(p)$$

$p \xrightarrow[\text{(simple)}]{f} \infty$ local coord $f(z) = \frac{1}{z}$

$$df = -\frac{1}{z^2}\,dz$$

$$\deg(K_\omega) = \sum_{\mathrm{ord}_p(f) \geq 2} \left(\mathrm{ord}_p(f) - 1\right) - 2\deg(f)$$

$$= 2g - 2 + 2\cancel{\deg(f)} - 2\cancel{\deg(f)}$$

$$= 2g - 2$$

///

terminologie

- diviseur **effectif** si $D \geqslant 0$

  i.e $v_p(D) \geqslant 0 \quad \forall p \in S$

[si $D \geqslant 0$ alors $\deg(D) \geqslant 0$ et $\deg(D) = 0$ si $D = 0$]

- $$H^0(D) \; \big(= \mathcal{L}(D) = H^0(\mathcal{O}(D))\big) = \{ f \in \mathcal{M}(S) \text{ telle que } \operatorname{div}(f) + D \geqslant 0 \}$$

$H^0(D)$ est un $\mathbb{C}$-ev :

$$\operatorname{div}(\lambda f_1 + f_2) = \operatorname{div}(\lambda f_1) + \operatorname{div}(f_2)$$

$\lambda \neq 0$
$$= \operatorname{div}(f_1) + \operatorname{div}(f_2)$$

$0 \in H^0(D)$ par convention

observation

$D = 0 \qquad H^0(D) = \{ f, \ \operatorname{div}(f) \geq 0 \}$

$= \mathbb{C}$

$D < 0 \qquad D = \sum v_p(D)\,(p) \qquad v_p(D) \leq 0$

$\exists p \ v_p(D) < 0$

$H^0(D) = (0)$

car $\operatorname{div}(f) \geq -D \Rightarrow \operatorname{div}(f) \geq 0$

$\Rightarrow f = c \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow c = 0$ car f s'annule en un point.

$$\boxed{D \equiv D' \text{ alors } H^0(D) \xrightarrow{\simeq} H^0(D')}$$

$D = D' + \operatorname{div}(f) \qquad g \mapsto g f$

$g \in H^0(D) \qquad \operatorname{div}(g) + D \geq 0$

$$\operatorname{div}(gf) = \operatorname{div}(g) + \operatorname{div}(f)$$
$$\geq -D + \operatorname{div}(f) = -D'$$
$$\Rightarrow gf \in H^0(D')$$

///

6. Théorème de Riemann-Roch.

Thm $\forall D \in \operatorname{Div}(S)$, l'espace $H^0(D)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

On note $h^0(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(D)$. On a

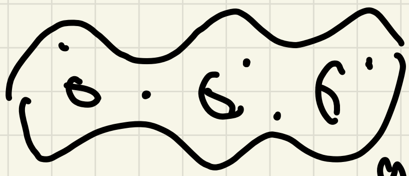
$$\boxed{h^0(D) - h^0(K_\omega - D) = \deg(D) + 1 - g}.$$

$$h^0(D) - h^0(K_\omega - D) = \underbrace{\deg(D) + 1 - g}_{\text{purement topologique}}.$$

$\ell(D)$ $\qquad\qquad$ $n(D)$

$h^0(\mathcal{O}(D))$ $\qquad\qquad$ $h^1(\mathcal{O}(D))$

$$\underbrace{\chi(\mathcal{O}(D))}_{\text{on compte des objets holomorphes}}$$



$g=3$

Corollaire du thm de Riemann-Roch :

Thm Ω^1_S = $\mathbb{C}$-espace vectoriel des 1-formes holomorphes sur S.

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1_S) = g.$$

- $g \geq 1 \Rightarrow \exists$ 1-forme holomorphe non nulle
- $S = \mathbb{C}/\Lambda \xleftarrow{\pi} \mathbb{C} \ni z$

  $\pi^* \omega = dz$ $\qquad \Omega^1_S = \mathbb{C}\cdot\omega$

démonstration : ω méromorphe $D = K_\omega$

$$\begin{array}{ccc} H^0(K_\omega) = \{ f, \operatorname{div}(f) + K_\omega \geq 0 \} & & f \\ \downarrow \wr \; \mathbb{C}\cdot\omega & & \downarrow \\ \Omega^1_S & & f\omega \end{array}$$

R-R $\quad h^0(K_\omega) - h^0(K_\omega - K_\omega) = \deg(K_\omega) + 1 - g$

$$h^0(K_\omega) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^1_{S'}$$

$$= 1 + 2g - 2 + 1 - g$$

$$= g \qquad ///$$

thm $\quad$ $p \in S'$ $\quad n \geq 2g$. Il existe une fonction méromorphe ayant un pôle d'ordre n en p et dt holomorphe ailleurs

$$f : S' \to \hat{\mathbb{C}} \qquad f^{-1}(\infty) = \{p\}$$

$$\deg(f) = n.$$

démonstration : idée RR à $D = n(p)$ $D' = (n-1)(p)$

- $\deg(K_\omega - (n-1)p) = 2g-2-(n-1)$
$$\leq -1 < 0$$
$$h^0(K_\omega - (n-1)p) = 0$$

- $h^0((n-1)(p)) = (n-1)+1-g$.

$h^0(n(p)) = n+1-g$. (même calcul)

$\Rightarrow h^0(n(p)) - h^0((n-1)(p)) = 1$

- $H^0(n(p)) = \{f,\ \mathrm{div}(f) \geq -n(p)\}$
$$\cup$$
$H^0((n-1)p) = \{f,\ \mathrm{div}(f) \geq -(n-1)(p)\}$

$\exists f\ \ \mathrm{div}(f) \geq -n(p)$ mais $f \notin H^0((n-1)p)$.

$\operatorname{div}(f) \geq -n\,(p)$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{si } q \neq p, & f \text{ est holomorphe en } q, \\ \text{en } p, & f \text{ est méromorphe avec un pôle} \\ & \text{d'ordre au plus } n \end{cases}$

si $f \in H^0((n+1)\,p) \rightsquigarrow f$ a un pôle d'ordre au plus $n+1$ en p.

$\Rightarrow$ ordre de f en p est égal à n.

///

Exercice $\quad S \quad g \geq 2$

$G \subseteq \mathrm{Aut}(S) \quad G$ fini

$S \longrightarrow S' = S/G$

R-HURWITZ

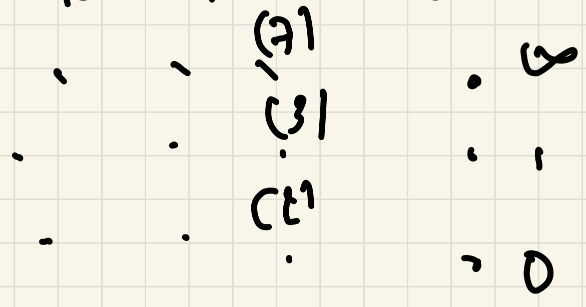
$$(g-1) \geq \#G \left(\sum \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + g' - 1 \right)$$

$g' \geq 1 \rightarrow$ ok $\quad \#G \leq 12\,(g-1)$

$g' = 0 \rightarrow \#G \leq 42\,(g-1)$ sauf si

$S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$: ∞ : 1 ramifié au dessus de : 0 3 pts

$$S \longrightarrow S/G = \hat{\mathbb{C}}$$



Exercice 4.

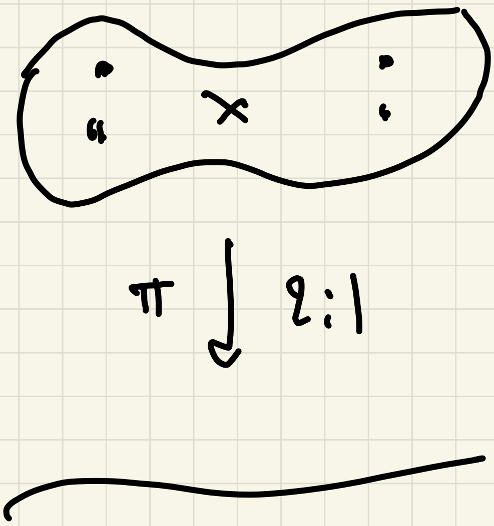
(1) $\exists\, \sigma : S \to S$ holomorphe $\sigma \circ \sigma = id$ (involution) avec $2g+2$ points fixes

(2) $\exists\, f : S \to \hat{\mathbb{C}}$ avec exactement 2 pôles simples

(1) $\Rightarrow$ (2) $\quad G = \langle Id, \sigma \rangle$ ss-gpe de $Aut(S)$

$$S \xrightarrow{\pi} S/G$$

RH $\quad \chi(S') = \deg(\pi)\,\chi(S/G) - \sum \left(\mathrm{ord}_p(\pi) - 1\right)$



$$2 - 2g = 2\,\chi(S/G) - \#\,\mathrm{Ram}_\pi$$
$$= 2\,\chi(S/G) - (2g+2)$$

$\mathrm{Ram}_\pi = \{p,\ \sigma(p) = p\}$

$p \notin \mathrm{Ram}_\pi \quad \mathrm{ord}_p(\pi) = 1$

$p \in \mathrm{Ram}_\pi \quad \mathrm{ord}_p(\pi) \geq 2$

$$\sum_{\pi(p)=q} \mathrm{ord}_p(\pi) = \deg(\pi) = 2$$

$\Rightarrow \mathrm{ord}_p(\pi) = 2.$

$\Rightarrow \boxed{\chi(S/G) = 2} \quad \Rightarrow S/G = \hat{\mathbb{C}}.$

$\pi : S \to \hat{\mathbb{C}}$ de degré 2
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \ni$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \infty$

$\to$ $\# \pi^{-1}(\infty) = 2$ on a 2 pôles simples

$\to$ sinon $\pi^{-1}(\infty)$ est un pt fixe de σ.

on remplace $f = \varphi \circ \pi$

avec $\varphi \in PGL(2, \mathbb{C})$ telle que

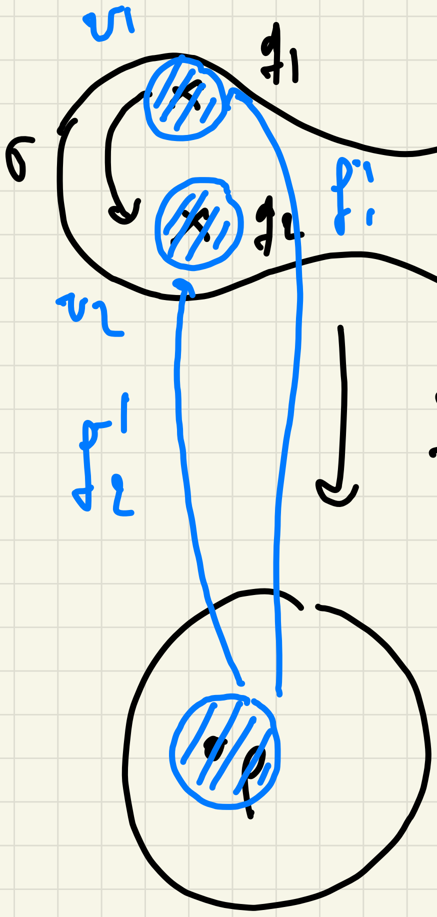
$\varphi(z) = a$ avec $\# \pi^{-1}(a) = 2$.

---

(2) $\Rightarrow$ (1) $\quad f : S \to \hat{\mathbb{C}}$ tel que

f a exactement 2 pôles simples.

$$\deg(f) = 2 = \sum_{f(p)=\infty} \operatorname{ord}_p(f)$$



or $f^{-1}(p) = \{q_1, q_2\}$

$\sigma(q_1) = q_2$.

si $q_1 = q_2$ $\sigma(q_1) = q_1$

σ est holomorphe.

f est un revêtement de degré 2

$$f : S' - f^{-1}(f(\mathrm{Ram}\, f)) \to \hat{\mathbb{C}} - f(\mathrm{Ram}\, f) \ni p$$

$\exists\, U$ disque $\ni p$ $\quad f^{-1}(U) = U_1 \sqcup U_2$

$f_i : U_i \to U$ est un biholomorphisme loc hol.

et bijective) $\quad \sigma|_{U_1} = f_2^{-1} \circ f$

$\sigma : S' \longrightarrow S$

$\sigma : S' - f^{-1} f(\mathrm{Ram} f) \to S - f^{-1} f(\mathrm{Ram} f)$
holomorphe.

$$q \in \mathrm{Ram} f \xrightarrow[z \mapsto z^2]{f} p = f(q)$$

$$f^{-1} f(q) = \{q\}.$$

$f^{-1} f(\mathrm{Ram} f) = \mathrm{Ram} f \qquad \# \mathrm{Ram} f < \infty$

- $q \in \mathrm{Ram} f$ cartes en q et en $p = f(q)$ telle que $f(z) = z^2$

$$\boxed{\sigma(z) = -z.}$$

RH $\quad 2-2g = 2\times 2 - \#\,\mathrm{Fix}(\sigma)$

$\Rightarrow \#\,\mathrm{Fix}(\sigma) = 2g+2$ ///

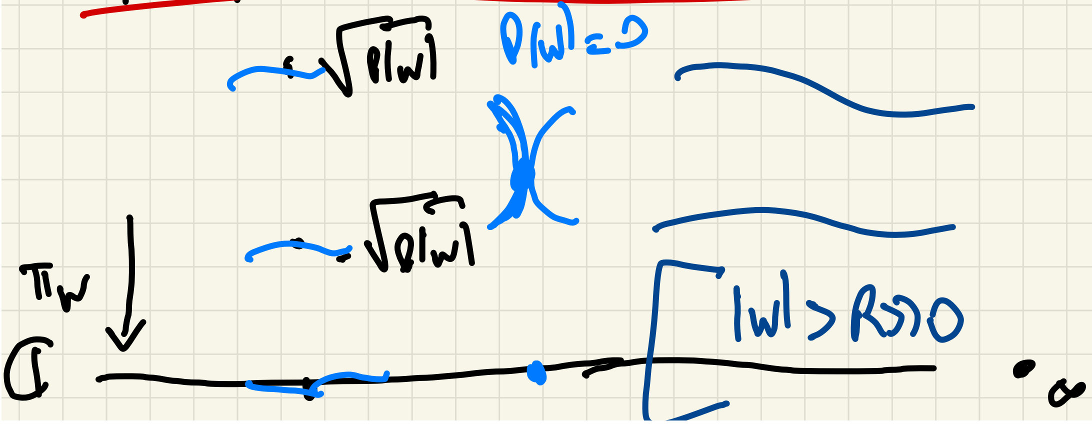
Exercice 5. $P \in \mathbb{C}[w]$ racine simple

- $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 ,\ z^2 = P(w)\} = X$

X surface de Riemann $\pi_z : X \to \mathbb{C}$

$\pi_w : X \to \mathbb{C}$ holomorphe

But compactifier X & calculer le genre de la compactification.



On a démontré que $(\exists R \gg 1)$

$\pi_w : X \cap \{|w| > R\} \to \{|w| > R\}$

revêtement de degré d & $d = \deg(P)$

$\boxed{\text{connexe si } d \equiv 1 \ (2)}$

non connexe si $d \equiv 0 \ (2)$

$\overline{X} = X \cup \{\infty\}$ surface de R. telle

que $\pi_w : \overline{X} \to \hat{\mathbb{C}}$ est holomorphe.

topologie sur $X \cup \{\infty\}$ = ouvert

U ouvert de X ou $\overline{X} \setminus K$ K compact $\subseteq X$

$\bar{X}$ est Hausdorff.

$p = (z_0, w_0) \in X$.

$U = \pi_w^{-1}\{|w| \le 3|w_0|+1\} \subseteq X$

voisinage **compact** de p.

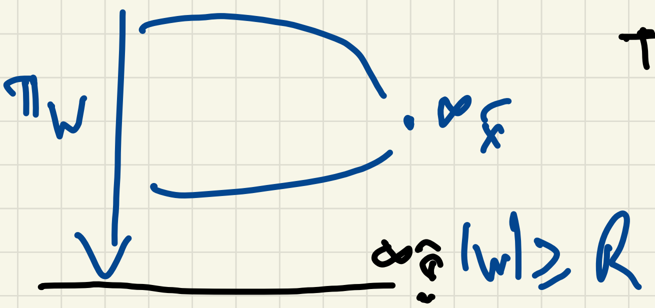
$V = \pi_w^{-1}\{|w| > 4|w_0|+1\} \subseteq X$

$V \cup \{\infty\}$ voisinage ouvert de $\{\infty\}$

$\pi_w : X \to \mathbb{C}$ holomorphe, **propre**.

$(z,w) \quad z^2 = P(w) \Rightarrow |z| \le \sqrt{3|w_0|+1}$

Carte holomorphe en $\infty \in \bar{X}$?



$\pi_w : X \cap \{|w|>R\} \to \{|w|>R\}$

revêtement connexe

$2:1$

$$\{|w|>R\} \xrightarrow[1/w]{} \{0<|w|<1/R\}$$

$$\cong$$

$$\mathbb{D}^\times = \{0<|w|<1\}$$

$$X_R = X \cap \{|w|>R\}$$

$$X_R \xrightarrow{\pi_w} \{|w|>R\} \simeq \mathbb{D}^\times$$

revêtement de degré 2 connexe

$$\pi_1(\mathbb{D}^\times, \cdot) = \left\langle \tfrac{1}{2} e^{2i\pi t} \right\rangle \simeq \mathbb{Z}$$

théorie des revêtements $\Rightarrow$ $\exists!$ revêtement de degré 2 connexe.

$$\boxed{\begin{tikzcd} X_R \arrow[r, "\sim", "\alpha"'] \arrow[d, "\pi_w"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{D}^\times \arrow[d] & \ni x \arrow[d, mapsto] \\ \mathbb{D}^\times & & \ni x^2 \end{tikzcd}}$$

Carte en $\infty \in \overline{X}$

$$U = X_R \cup \{\infty\}$$

$$\varphi : U \to \mathbb{D}$$

$$\begin{cases} \varphi(\infty) = 0 \\ \varphi|_{X_R} = \alpha \end{cases}$$

φ homéomorphisme.

$\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\} \cup \mathcal{A}_X$ est holomorphe

carte dans $\mathcal{A}_X$. $p \in X_R$.

U_p = ouvert assez petit contenant p.

$$\varphi_p = \pi_W$$

$$\varphi \circ \varphi_p^{-1}(w) = \alpha \circ \varphi_p^{-1}(w),$$

holomorphe car α l'est.

Problème

Calculer le genre de $\overline{X}$?

R-H appliqué à π_W.