FEUILLE D'EXERCICES DU CHAPITRE I: PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES SURFACES DE RIEMANN (2023)

I.1 Fonctions holomorphes.

Exercice 1 (Conditions de Cauchy-Riemann). Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On écrit $z = x + iy$ et $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$.

Montrer que f est une application conforme si et seulement si les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Exercice 2. Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On écrit $z = x + iy$ et $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Montrer que

$$|f'(z)|^2 = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Montrer qu'une application holomorphe bijective possède un inverse holomorphe.

Exercice 4 (Formule de Cauchy généralisée). Soit K un compact de $\mathbb{C}$ à bord C^1. Pour toute fonction f de classe C^1 alors

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - w}\, d\zeta - \int_K \frac{1}{\pi(z - w)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, d\lambda(z)\ .$$

On rappelle la formule de Green-Riemann:

$$\int_{\partial K} Pdx + Qdy = \int_K \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy$$

où le bord de K est orienté par la normale extérieure.

Exercice 5 (Lemme de Schwarz). Soit $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$.

- Montrer que $|f'(0)| \leq 1$ et que $|f'(0)| = 1$ si et seulement si f est une rotation.
- Montrer que pour tout $|\alpha| < 1$, $\varphi_\alpha(z) := \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ est un biholomorphisme du disque.
- Montrer que pour toute application holomorphe $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, on a $|f'(0)| \leq 1$.

Date: November 14, 2023.

Exercice 6 (Automorphismes de surfaces de Riemann).

- Montrer que les biholomorphismes du plan complexe sont les applications de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$ (on utilisera le théorème de Liouville).
- Montrer que les biholomorphismes du disque unité sont les applications de la forme $\varphi_{\alpha,\theta}(z) := e^{i\theta} \times \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $|\alpha| < 1$ (on se ramène au cas où l'application fixe l'origine, et on utilise le Lemme de Schwarz).
- Montrer que l'application $z \mapsto \frac{i-z}{i+z}$ induit un biholomorphisme du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{\Im(z) > 0\}$ sur $\mathbb{D}$, puis que le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{H}$ coïncide avec le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Exercice 7.

(a) (Théorème de Montel) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes telles que $|f_n| \leq M$ pour une constante $M > 0$.

En utilisant les estimées de Cauchy montrer qu'il existe une sous-suite f_{n_k} convergente uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction analytique.

(b) (Théorème de Hurwitz) Montrer que si les f_n sont univalentes, alors soit f est constante soit f est univalente. On pourra utiliser le théorème de Rouché.

Exercice 8.

(a) (Théorème de Moreira) Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ pour tout lacet. En appliquant l'hypothèse à des lacets bordant des rectangles, montrer que $F(z) := \int_{[0,z]} f(w)dw$ vérifie les conditions de Cauchy-Riemann puis que f est holomorphe.

(b) (Principe de réflexion de Schwarz) Supposons que
- f est holomorphe sur $\{|z| < 1\} \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$;
- f s'étend continument sur l'axe réel;
- $f(0, 1) \subset \mathbb{R}$.

Alors f s'étend en une application holomorphe à tout le disque unité.

Exercice 9 (Uniformisation dans le plan complexe). Soit $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe du plan complexe, et $z_0 \in \Omega$. On note Σ l'ensemble des applications univalentes de Ω dans $\mathbb{D}$, c'est-à-dire des applications holomorphes injectives $f \colon \Omega \to \mathbb{D}$. On fixe $w \notin \Omega$. On note $\varphi_\alpha(z) := \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$.

(a) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $\varphi^2(z) = z - w$. En déduire que Σ est non-vide.

(b) Soit $\psi \in \Sigma$ tel que $\psi(\Omega) \subsetneq \mathbb{D}$. Prenons $\alpha \in \mathbb{D} \setminus \psi(\Omega)$. Justifier l'existence de g holomorphe telle que $g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi$.

Montrer qu'il existe β tel que $\psi_1 := \varphi_\beta \circ g$ appartient à Σ et vérifie $|\psi_1'(z_0)| > |\psi'(z_0)|$.

(c) Soit $\eta = \sup\{|\psi'(z_0)|, \psi \in \Sigma\}$, et $\psi_n \in \Sigma$ tels que $|\psi_n'(z_0)| \to \eta$. Montrer que ψ_n converge localement uniformément vers une fonction holomorphe ψ. Justifier que $\psi \in \Sigma$.

(d) Montrer qu'il existe un biholomorphisme $\psi \colon \Omega \to \mathbb{D}$

Exercice 10 (Produit de Blaschke). Soit f une application continue du disque fermé dans $\mathbb{C}$, holomorphe dans le disque ouvert. On suppose que $|f(z)| = 1$ pour tout point z sur le cercle S^1.

(a) Montrer que si f ne s'annule pas alors f est constante.

(b) En utilisant l'isomorphisme entre le disque et le demi-plan de Poincaré, et le principe de réflexion de Schwarz, montrer que la fonction f s'étend en une fonction méromorphe de la sphère de Riemann.

(c) Conclure qu'il existe $\zeta \in S^1$ et des $a_i \in \Delta$ tels que

$$f(z) = \zeta \prod_{i=1}^{k} \frac{z - a_i}{1 - \overline{a_i} z} \ .$$

Une telle application est appelé produit de Blaschke.

I.2 Surfaces de Riemann.

Exercice 11. Soit $f : S \to S'$ une application holomorphe entre deux surfaces de Riemann connexes. L'ensemble de ramification de f est le complémentaire des points $p \in S$ pour lesquels f induit un biholomorphisme d'un voisinage de p sur son image.

(a) Montrer que si f n'est pas constante, alors l'ensemble de ramification est un ensemble discret.
(b) Donner un exemple d'application où l'ensemble de ramification est infini.
(c) Montrer que l'image de l'ensemble de ramification est toujours un ensemble dénombrable. Montrer que cet image est discrète lorsque f est propre.
(d) Donner un exemple d'application où l'image de l'ensemble de ramification admet un point d'accumulation.

Exercice 12. Soit $f : S \to S$ une application holomorphe d'une surface de Riemann connexe dans elle-meme.

(a) Montrer que l'ensemble $\{p \in S,\ f(p) = p\}$ des points fixes de f est discret.
(b) Donner un exemple pour lequel cet ensemble est infini.
(c) Montrer que lorsque f est un polynome de degré ≥ 2 et $S = \mathbb{C}$, alors l'ensemble des points périodiques $\{p \in S,\ \exists n \geq 1,\ f^n(p) = p\}$ est infini et borné (et donc possède des points d'accumulation).

Exercice 13. Soit $f : S \to S'$ une application holomorphe entre deux surfaces de Riemann connexes. Si S est compact montrer que soit f est constante soit f est surjective et S' est compact.

Exercice 14. Montrer que si une application holomorphe $f : S \to S'$ entre deux surfaces de Riemann est bijective alors son inverse est holomorphe (en d'autres termes un biholomorphisme est une application holomorphe bijective).

Exercice 15.

- Montrer que toute application holomorphe de la sphère de Riemann dans elle-meme est donnée par une fraction rationnelle $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[z]$.
- Montrer que les biholomorphismes de la sphère de Riemann sont les applications de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad \neq bc$

I.3 Exemples de surfaces de Riemann.

Exercice 16 (Théorie de Weierstrass). Dans tout le problème on fixe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\Im(\omega) > 0$, et on note $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ le réseau engendré par 1 et ω. Un parallélogramme fondamental est un parallélogramme obtenue par translation par un nombre complexe du parallélogramme $[0,1] + \omega[0,1]$.

Une fonction elliptique est une fonction méromorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(z+\lambda) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$.

(a) Montrer que toute fonction elliptique sans pole est constante.

(b) Montrer que la série $G_k := \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^k}$ converge absolument pour $k \geq 3$. Pour celà on pourra montrer que $|n + \omega m| \geq c(|n| + |m|)$ pour un $c > 0$ adéquat et pour tout entiers n, m.

(c) On pose:
$$\mathfrak{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$
- Montrer que $\mathfrak{P}$ est une fonction bien définie, paire, et en déterminer les poles.
- Calculer $\mathfrak{P}'$ et montrer que c'est une fonction elliptique impaire.
- Montrer que $\mathfrak{P}$ est une fonction elliptique.

(d) Soit f une fonction elliptique, et P un parallélogramme fondamental dont le bord ne contient ni zéro ni pole de f.
- Montrer que la somme des résidus de f dans P est égal à 0.
- Soit $\{z_i\}$ l'ensemble des poles et zéros de f dans P. On note m_i l'ordre de f en z_i (qui est négatif si z_i est un pole et positif si z_i est un zéro). Montrer que $\sum m_i = 0$.
- En considérant la fonction $\frac{zf'}{f}$, montrer que $\sum m_i z_i \in \Lambda$.

Pour ces deux questions on pourra utiliser le théorème des résidus de Cauchy.

(e) Montrer que la fonction $(\mathfrak{P}')^2 - 4\mathfrak{P}^3 + 60G_4\mathfrak{P} + 140G_6$ est identiquement nulle. On développera avec soin cette fonction en 0.

(f) On pose $e_1 = \mathfrak{P}(\frac{1}{2})$; $e_2 = \mathfrak{P}(\frac{\omega}{2})$; $e_3 = \mathfrak{P}(\frac{1+\omega}{2})$.
- Montrer que modulo Λ la fonction $\mathfrak{P}'$ admet trois racines simples en $\frac{1}{2}$, $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{1+\omega}{2}$.
- En analysant les poles et zéros des fonctions $\mathfrak{P} - e_i$, montrer que e_1, e_2 et e_3 sont trois nombres complexes distincts.
- En déduire que
$$(\mathfrak{P}')^2 = 4\,(\mathfrak{P} - e_1)\,(\mathfrak{P} - e_2)\,(\mathfrak{P} - e_3)$$
- Montrer que l'ensemble $C = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2,\, y^2 = 4x^3 - 60G_4x - 140G_6\}$ est muni d'une structure de surface de Riemann telle que les projections sur chacun des facteurs sont holomorphes.

(g) Montrer que l'application $\phi(z) := (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$ induit un biholomorphisme de la surface de Riemann $\mathbb{C}/\Lambda - \{0\}$ sur C. Pour l'injectivité, on supposera que $\phi(z_1) = \phi(z_2)$ et on analysera les zéros de la fonction $\mathfrak{P} - \mathfrak{P}(z_1)$.

(h) Montrer que l'involution $z \mapsto -z$ induit une action naturelle de $\mathbb{Z}/2$ sur $\mathbb{C}/\Lambda$. Montrer que la surface de Riemann quotient S est compacte; puis en considérant la fonction $\mathfrak{P}$ que S est biholomorphe à la sphère de Riemann.

Exercice 17 (Applications holomorphes entre tores)*.* Soient $\omega, \omega' \in \mathbb{H}$. Pour simplifier on note $\Lambda = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$ et $\Lambda' = \mathbb{Z} + \omega'\mathbb{Z}$.

(a) Montrer que $\mathbb{C}/\Lambda$ est homéomorphe au tore $S^1 \times S^1$.
(b) Soit $h : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda'$ une application holomorphe. Montrer qu'il existe une application affine $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $L(z) = az + b$ telle que $a\,\Lambda \subset \Lambda'$, et $[L(z)]' = h[z]$, où $[z]$ (resp. $[z]'$) dénote la classe de z dans $\mathbb{C}/\Lambda$ (resp. $\mathbb{C}/\Lambda'$).
(c) Montrer que $\mathbb{C}/\Lambda$ est biholomorphe à $\mathbb{C}/\Lambda'$ si et seulement si $\omega' = \frac{a\omega+b}{c\omega+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = +1$.
(d) On note $\mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ l'ensemble des applications holomorphes de $\mathbb{C}/\Lambda$ dans lui-meme fixant $[0]$. Montrer que $\mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ est un anneau commutatif isomorphe à l'anneau des $a \in \mathbb{C}$ tels que $a\Lambda \subset \Lambda$.
(e) Montrer que $\mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda) = \mathbb{Z}$ sauf si ω est un nombre quadratique c'est-à-dire vérifie une équation du type $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ avec $a, b, c \in (\mathbb{Z}^*)^2 \times \mathbb{Z}$.

Exercice 18 (Automorphismes des tores)*.* On fixe $\omega \in \mathbb{H}$ et on pose $\Lambda = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$. On s'intéresse à la structure du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ des biholomorphismes de $\mathbb{C}/\Lambda$. On supposera acquis que pour tout biholomorphisme $h : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda$ il existe une application affine $L(z) = az + b$, avec $a \neq 0$, telle que $a\Lambda = \Lambda$ et $h[z] = [L(z)]$, où $[z]$ désigne la classe de $z \in \mathbb{C}$ dans l'espace quotient $\mathbb{C}/\Lambda$ (voir Exercice 3.16).

(a) Montrer que le stabilisateur de $[0]$ pour l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ est un groupe fini cyclique.
(b) Montrer que le stabilisateur de $[0]$ pour l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sauf si $\Lambda = \mathbb{C}[i]$, ou $\mathbb{C}[j]$ où j est une racine primitive troisième de l'unité. [on rappelle que les seules racines de l'unité ζ qui vérifient $\zeta^2 = k\zeta + l$ avec $k, l \in \mathbb{Z}$ sont d'ordre $1, 2, 3, 4$ ou 6].
(c) Calculer le stabilisateur de $[0]$ pour l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ lorsque $\Lambda = \mathbb{C}[i]$.
(d) Calculer le stabilisateur de $[0]$ pour l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ lorsque $\Lambda = \mathbb{C}[j]$.
(e) Montrer qu'il existe une suite exacte de groupes $0 \to (\mathbb{C}/\Lambda, +) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda) \to \mathrm{Stab}([0]) \to 0$ où $\mathrm{Stab}([0])$ désigne le stabilisateur de $[0]$ pour l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ sur le tore. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ est-il isomorphe (comme groupe) au produit de $(\mathbb{C}/\Lambda, +)$ et de $\mathrm{Stab}([0])$?

Exercice 19 (Quadriques affines)*.* On se donne un polynome de degré 2 à 2 variables $P(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00}$ avec $(a_{20}, a_{11}, a_{02}) \neq (0, 0, 0)$.

On suppose que $P = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ est vide de telle sorte que $C = \{P = 0\}$ est une surface de Riemann. Montrer que C est biholomorphe à deux copies disjointes de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ ou à $\mathbb{C}^*$.

Pour celà on procèdera à un changement adéquat de coordonnées affines.

Exercice 20*.* Soit P un polynome complexe de degré $d \geq 1$ sans racine multiple.

- Montrer que $X = \{z^2 = P(w)\} \subset \mathbb{C}^2$ peut etre muni d'une structure de surface de Riemann de telle sorte que les deux projections sont holomorphes.
- Montrer que pour $R \gg 1$, l'application $(z, w) \mapsto w$ de $X \cap \{|w| > R\}$ est un revetement de degré 2 sur son image, et qu'il est connexe si et seulement si d est impair.
- Montrer que X est isomorphe à une surface de Riemann compacte privée d'un nombre fini non nul de points.
- Généraliser la construction au cas où P a au moins une racine d'ordre impair.