SURFACES DE RIEMANN : FEUILLE D'EXERCICES DU CHAPITRE III (2022)

III.1 Topologie des surfaces de Riemann.

Exercice 1. Soit $f\colon S \to S'$ une application holomorphe non constante entre deux surfaces de Riemann connexes.

- Si S est la sphère de Riemann, montrer que S' est aussi la sphère de Riemann. Plus généralement, montrer que $g(S) \geq g(S')$.
- Montrer que si le genre de S et de S' sont égaux à 1, alors f est un revetement.
- Pour toute courbe elliptique S, et pour tout entier $d \in \mathbb{N}$, construire un revetement holomorphe $f\colon s \to S$ de degré d^2.
- Montrer que si $g(S') = g(S) \geq 2$ alors f est un biholomorphisme.

Exercice 2. On fixe $\omega \in \mathbb{H}$, et on considère le réseau $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ ainsi que la courbe elliptique $S = \mathbb{C}/\Lambda$. On note $\pi\colon \mathbb{C} \to S$ l'application canonique.

- Soit G un groupe fini quelconque d'ordre ≥ 2. Montrer que le quotient S/G est muni d'une unique structure de surface de Riemann tel que l'application $S \to S/G$ est holomorphe. Quel est le genre de S/G?
- Montrer que tout biholomorphisme $\phi\colon S \to S$ se relève en une transformation affine $L\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de telle sorte que $\pi \circ L = \phi \circ \pi$.
- Montrer que $g(S/G) = 1$ si et seulement si G est un sous-groupe de translations.
- Lorsque G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, calculer le nombre de points de ramification de l'application $S \to S/G$.

Exercice 3. Soit S une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. Soit G un groupe *fini* de biholomorphismes de S, de cardinal d. On note $\pi\colon S \to S/G$ l'application holomorphe canonique, et n le nombre de valeurs critiques (i.e., le nombre de points $y \in S/G$ tel qu'il existe un point $x \in \pi^{-1}(y)$ ayant un stabilisateur non trivial).

- Montrer que pour tout point $y \in S/G$, le cardinal du stabilisateur de tout point de la fibre $\pi^{-1}(y)$ est identique.

  On note $\{y_1, \cdots, y_k\}$ les valeurs critiques, et n_i le cardinal du stabilisateur d'un point dans $\pi^{-1}(y_i)$
- Montrer que
$$g - 1 = d\left((g'-1) + \frac{1}{2}\sum_i (1 - \frac{1}{n_i})\right)$$
  où $r_i = \#\pi^{-1}(y_i)$, et $g' = g(S/G)$.
- Montrer que $\#G \leq 84(g-1)$ (traiter d'abord le cas $g' \geq 1$, puis le cas $g' = 0$ en commençant par $k \neq 3, 4$).

Date: December 27, 2022.

- Montrer que la sphère de Riemann et les courbes elliptiques admettent des sous-groupes de biholomorphismes de cardinalité quelconque.

Exercice 4 (Surfaces hyperelliptiques). Soit S une surface de Riemann compact connexe de genre g. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes:

- Il existe une application holomorphe $\sigma\colon S \to S$ telle que $\sigma^2 = \mathrm{id}$ et possédant exactement $2g+2$ points fixes.
- Il existe une application holomorphe $f\colon S \to \hat{\mathbb{C}}$ possédant exactement deux poles d'ordre 1.

Montrer que toute courbe elliptique vérifie ces conditions.

Exercice 5. Soit P un polynome complexe de degré $d \geq 1$ sans racine multiple. On rappelle que $X = \{z^2 = P(w)\} \subset \mathbb{C}^2$ peut etre muni d'une structure de surface de Riemann de telle sorte que les deux projections sont holomorphes, et que pour $R \gg 1$, l'application $(z,w) \mapsto w$ de $X \cap \{|w| > R\}$ est un revetement de degré 2 sur son image, et qu'il est connexe si et seulement si d est impair.

(a) Si d est impair, montrer que l'on peut munir $\bar{X} = X \cup \{\infty\}$ d'une unique structure de surface de Riemann compacte, telle que l'application $\pi(x,y) = x$ s'étende en une application holomorphe $f\colon X \to \hat{\mathbb{C}}$.
(b) Calculer le genre de $\bar{X}$.
(c) Généraliser la construction au cas où d est pair.

III.2 Théorème de Riemann-Roch.

Exercice 6. Soit S une surface de Riemann compacte connexe. Montrer que pour tout ensemble fini $F \subset S$, il existe une fonction méromorphe g sur S telle que $g(p) \neq g(q)$ pour toute paire de points distinctes $p, q \in F$.

Exercice 7. Soit $f\colon S' \to S$ une application holomorphe entre deux surfaces de Riemann compactes connexes. Soit ω une 1-forme méromorphe sur S. Notons K_ω le diviseur des poles et zéros de ω.

Calculer le diviseur $K_{f^*\omega}$ en termes de f^*K_ω et des points de ramifications de f; puis retrouver la formule de Riemann-Hurwitz.

Exercice 8. Soit S une surface de Riemann compacte connexe de genre 2, et ω_1, ω_2 une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des 1-formes holomorphes sur S.

Montrer que la fonction méromorphe $f := \omega_1/\omega_2\colon S \to \hat{\mathbb{C}}$ définit un revetement ramifié de degré 2.

Montrer ensuite que S est hyperelliptique (i.e., vérifie les conditions de l'exercice 4 ci-dessus).

Exercice 9. Soit S une surface de Riemann compacte connexe de genre $g \geq 1$, et $p \in S$. Montrer qu'il existe au moins une 1-forme holomorphe sur S qui ne s'annule pas en p.

On pourra procéder par contradiction, et montrer que dans ce cas, on a $H^0(K_\omega) = H^0(K_\omega - (p))$ pour une 1-forme holomorphe non nulle donnée.

Exercice 10. Soit S une surface de Riemann compacte connexe, et (U_i, φ_i) un atlas holomorphe.

On fixe $q \in \mathbb{Z}$ non nul. Une q-forme méromorphe ω sur S est la donnée d'une famille de fonctions méromorphes f_i sur U_i vérifiant les relations de compatiblités

$$f_j = f_i \circ \varphi_{ij} \times (\varphi'_{ij})^q$$

ce que l'on résume en écrivant $\varphi_{ij}^*(f_i dz_i^q) = f_j dz_j^q$. On note K_ω le diviseur des poles et zéros de ω.

(a) Montrer que K_ω est linéairement équivalent à q fois un diviseur canonique sur S. En déduire le degré de K_ω.
(b) Montrer que l'espace des q-formes holomorphes est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et calculer sa dimension en fonction du genre de S et du signe de q.

III.3 Théorie des faisceaux.

Exercice 11. Soit X un espace topologique.

- Montrer que pour toute suite exacte de faisceaux en groupes abéliens $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$, la suite induite
$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$$
est encore exacte.
- Donner un exemple pour lequel le morphisme $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ n'est pas surjectif.

Exercice 12. Soit X une surface de Riemann connexe.

- Montrer que la suite $0 \to \Omega^1 \to \mathcal{E}^{1,0} \to^d \mathcal{E}^2 \to 0$ est exacte.
- Montrer que $H^1(X, \Omega^1) \simeq \mathcal{E}^2(X)/d(\mathcal{E}^{1,0}(X))$.

Exercice 13. Soit X une surface de Riemann connexe.

- Montrer que la suite
$$0 \to \underline{\mathbb{C}} \to \mathcal{E} \to^d \mathcal{E}^1 \to^d \mathcal{E}^2 \to 0$$
est exacte.
- En déduire le théorème de De Rham: la cohomologie de Cech $H^q(X, \mathbb{C})$ est isomorphe à la cohomologie de De Rham de poids q, c'est-à-dire que
$$H^1(X, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{E}^1(X)/d(\mathcal{E}(X)) \text{ et } H^2(X, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{E}^2(X)/d(\mathcal{E}^1(X)).$$

Exercice 14. Soit X une surface de Riemann connexe. Montrer que les suites ci-dessous sont exactes.

- $$0 \to \mathcal{H} \to \mathcal{E} \to^\Delta \mathcal{E}^2 \to 0$$
où $\mathcal{H}$ est le faisceau des fonctions harmoniques sur X, et $\Delta = i\partial\bar{\partial}$.
- $$0 \to \mathbb{C}^* \to \mathcal{O}^* \to^{d\log} \Omega^1 \to 0$$
avec $(d\log)f := f^{-1}df$.

- $$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{M} \to^d \mathcal{Q} \to 0$$

  où $\mathcal{M}$ est le faisceau des fonctions méromorphes, et $\mathcal{Q}$ le faisceau des 1-formes méromorphes avec un résidu nul en tout point.