1

Degrés des applications polynomiales de $\mathbb{C}^2$.

Yoccoz Février 2008.

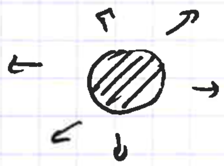
→ Décrire les propriétés dyn. de $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ polynomiale. à l'infini.

• En dimension 1D :

1 min

× $F(z) = z^d + O(z^{d-1})$.

près de l'infini $|F(z)| \sim |z|^d$. ←



$c^{-1} \le \dfrac{\max\{|F(z)|, 1\}}{\max\{|z|, 1\}^d} \le c$

$\frac{1}{d^n} \log^+ |F^n(z)| \to g_F \geq 0$.

- g_F C^0 $\quad g_F \circ f = d g_F$
- $g_F(z) = \log|z| + O(1)$
- $\{g_F > 0\} = \Omega(\infty)$
- $\{g_F = 0\} = K_F = \{ |F^n| = O(1) \}$.

× Sur Int (K_F) : dyn. complètement comprise.

Sur $J_F = \partial K_F$, Δg_F mesure mélangeante

• En dimension 2 : $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dominante

× pas de théorie générale comme en 1 D

diversités des phénomènes

└→ théorie de Fatou au point mort

└→ études focalisées sur étude ergodique de classes d'exemples.

$\boxed{\text{ICI}}$ = dynamique près de l'∞ → détermine une grande partie propriétés ergodiques de F

× Invariants : $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

e, $\deg(F)$, λ. $\quad 1 \leq e \leq \lambda^2$

Exemple 0 $\quad F = (P_d, Q_d) + \text{lot}$ $\quad P_d^{-1}(0) \cap Q_d^{-1}(0) = (0)$ $\quad e = d^2 \quad \lambda = d$

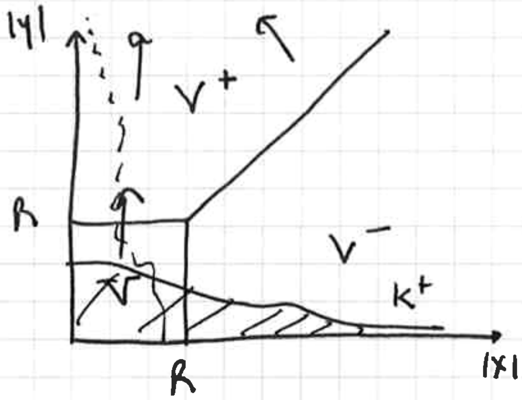
comme en 1D..

2/

20 min

× Exemple 1 Hénon $(y, ax+y^2+b)$ $a \neq 0$.

automorphismes de $\mathbb{C}^2$. $e=1$ $\deg(F^n) = 2^n$.



$\Omega(\infty) \supseteq V^+$.

K^+ = non compact.

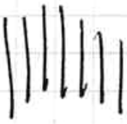
mais $K = K^+ \cap K^-$ compact.

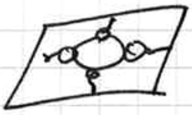
× Exemple 2 Produits croisés $F = (\underset{x^d + \dots}{f(x)}, \underset{A(x)y^\delta + \dots}{Q(x,y)})$. $e = d \times \delta$ $\lambda = \max\{d, \delta\}$

$\left[\begin{array}{l} + \ g_\ell \qquad \{g_\ell > 0\} \subseteq \Omega(\infty) \\ + \ g = \lim \frac{1}{\delta^n} \operatorname{Log}^+ |Q_n(x,y)| \text{ existe sur } K_\ell. \quad \text{si } \delta \geq 2 \end{array}\right.$

$\mu_\ell = \Delta g_\ell$

pp. x $\mu_x = \Delta_y g(x, \cdot)$





$\int \chi \, \mu_F = \int \left[\int \chi \, d\mu_x \right] d\mu_\ell(x)$ μ ergodique.

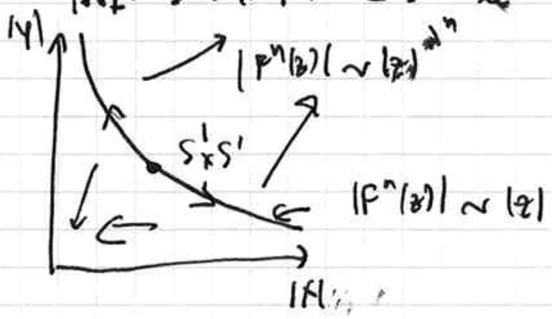
Supp(μ) compact $\Leftrightarrow$ $A^{-1}(0) \cap J_\ell = \emptyset$.

Ca $F = (x^2, (x-1)y^3)$ il existe $z = z(x,y)$ $|F^n(z)|$ non borné mais ne tend pas vers l'infini.

× Exemple 3 monomiaux $f(x,y) = (x^a y^b, x^c y^d)$

$e = |\det(M)|$ $\lambda = \rho(M)$ entier quadratique.

$|\lambda_+| > |\lambda_-| > 1$. ie $\lambda^2 > e > \lambda$



2 vitesses de convergence vers l'infini.

3/ ~~Thm~~

≥10 mi **Motivation** pour étude de la suite $\{\deg(F^n)\}$.

construction $\frac{1}{d^n}\operatorname{Log}^+|F^n(z)| \to 0$ sauf si $\deg(F^n) = d^n \ \forall n$.

sinon on peut tenter $\frac{1}{\deg(F^n)}\operatorname{Log}|F^n(z)|$ mais pas clair si ça converge.

① $\boxed{\text{Thm}}$ $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dominant

* λ entier quadratique.
* $\sum \deg(F^n)T^n \in \mathbb{Z}(T)$.

② $\boxed{\text{Thm}}$ $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dominant.

* soit $\deg(F^n) \simeq \lambda^n$
* soit $F = (x^d + G(x^{d-1}),\ A(x)y^d + G_x(y^{d-1}))$ $\deg A \geq 2$ $[\lambda^2 = e]$

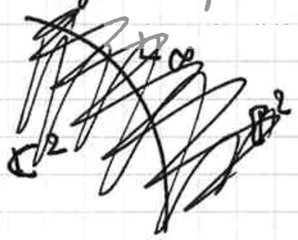
③ $\boxed{\text{Thm}}$ Si $\deg(F^n) \simeq \lambda^n$ $g_F(z) = \lim \frac{1}{\lambda^n}\operatorname{Log}^+|F^n(z)|$ existe $\not\equiv 0$.

→ peu d'informations sur $\{g_F = 0\}$.
→ d d c g_F courant mais pas clair comment avoir une mesure.

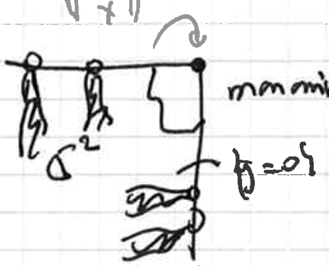
④ $\boxed{\text{Thm}}$ $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ $\lambda > e$.

* $\{g_F > 0\}$ ouvert
* $z \in \{g_F = 0\}$ $\operatorname{Log}^+|F^n(z)| \leq (e+\varepsilon)^n C(z)$

Contenu géométrique. $\lambda \notin \mathbb{N}$



$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$



on fait ∃ compactification de $\mathbb{C}^2$ où l'on a ça.

→ Exemple de Vigny DDS lorsque $\lambda \neq e$. $\exists F$ $\forall \rho \in [0, \deg(F))$ $\exists z$ $|F^n(z)| \simeq |z|^{\rho^n}$

4/ Propriétés ergodiques et λ / e.

10 min

$\boxed{\lambda^2 \geq e}$

[redacted]

- $\lambda^2 = e$
- $\lambda^2 > e > \lambda$
- $e = \lambda$
- $\lambda > e$

① $\lambda > e$ (cas de Hénon) Dujardin Diller Guedj.

$h_{top} = \mathrm{Log}\,\lambda = h_\mu(F)$ $\mu = dd^c g_F \wedge T_-$

densité des pts hyperboliques

$\mathrm{Lyap.} \geq \frac{1}{2}\mathrm{Log}\,\lambda > 0 \geq \frac{1}{2}\mathrm{Log}\,\frac{e}{\lambda} \geq \mathrm{Lyap.}$

② $\lambda^2 > e > \lambda$ BD - Guedj. (produit croisé ...)

$h_{top} = \mathrm{Log}\, e$ ⇒ $\exists !$ mesure entropie maximale

μ = equidistribue preimage des pts. $= \lim_n \frac{1}{e^n} (F^n)^* \delta_z$

= densité des pts repulsifs

$\mathrm{Lyap.} \geq \frac{1}{2}\mathrm{Log}\,\lambda$.

~~g_F pas très stable = h_{top}~~

③ $\lambda^2 = e$

thm de classification.

① soit $\deg(F^n) \not\sim \lambda^n$ [ie F produit croisé]

② soit F^2 hol. dans X une compactification de $\mathbb{C}^2$

même résultat qu'en ② dès que $e > 1$.

④ $e = \lambda$?

Conj. $h_{top}(F) = \mathrm{Log}\, e$? $\exists$ mesure d'entropie maximale ?

Pause

5/

Idées de preuves des ~~thm~~ thm 1 & 2 : étudier $\{\deg(F^n)\}$.

→ purement algébriques (peu de dynamique).

- deux techniques

↓ espace de valuation : dynamique dans un arbre $\mathbb{R}$.

↓ cohomologique : action d'un opérateur sur un Hilbert.

<u>Observation fondamentale</u> (F-S)

$F = (P, Q) : \mathbb{C}^2 \circlearrowleft$ $\quad [P(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})\, z^d : Q(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})\, z^d : z^d] : \mathbb{P}^2 \circlearrowleft$.

rationnelle, $I(F)$.

<u>fait</u> $\exists n\ \deg(F^n) < \deg(F)^n \Leftrightarrow F(L_\infty) \subseteq I(F)$.

<u>idée</u> = regarder ce qu'il se passe en $I(F)$.

⇝ éclatements.

On fait apparaître d'autres diviseurs et on doit comprendre l'action de F sur ces diviseurs.

$\boxed{\text{valuations}}$ $\{$ diviseurs $\} \subseteq$ espace fonctionnel $\circlearrowleft F_*$

$\mathcal{V} = \{ v : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{R}$ valuation $\min\{v(x), v(y)\} = -1 \}$.

$L_\infty \leftrightarrow -\deg$.

$E \leftrightarrow \frac{1}{b_E} \operatorname{ord}_E$

$$F_* v(\phi) = v(\phi \circ F)$$

$$-\min\{(F_* v)(x), (F_* v)(y)\} = d(F, v). \qquad F_\bullet : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

$$(F^n)_* = (F_*)^n$$

$$\deg(F^n) = d(F^n, -\deg) = \prod_{k=0}^{n-1} d(F, F_\bullet^k \cdot \deg).$$

Dynamique de $F_\bullet$ sur $\mathcal{V}$ (V est un arbre) + Fait que $d(F, \cdot)$ simple permet de conclure

6/

$\boxed{\text{cohomologique}}$

$$\begin{tikzcd} & \Gamma \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathbb{P}^2 \arrow[rr, dashed] & & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

\+ $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$.

$$F^\# : H^2(\mathbb{P}^2) \to H^2(\mathbb{P}^2)$$

$$F^\# = \deg(F) \qquad F^\# L_\infty . L_\infty = \deg(F)$$

Malheureusement $(F^\#)^n \neq (F^n)^\#$!

\+ On plonge $H^2(\mathbb{P}^2)$ dans un Hilbert de dimension ∞ pour lequel $(F^\#)^n = (F^n)^\#$.

$$\deg(F^n) = (F^n)^\# \mathcal{L}_\infty . \mathcal{L}_\infty$$

$$\begin{tikzcd} & X_\infty \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_\pi \arrow[dr] & & X_{\pi'} \arrow[dl] \\ & \mathbb{P}^2 & \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{B} = \{ \pi : X_\pi \to \mathbb{P}^2 \}.$$

$$H^2(X_\pi) \leftarrow H^2(\mathbb{P}^2).$$

$$\varprojlim H^2(X_\pi) \ni \alpha = \{ \alpha_\pi \in H^2(X_\pi),\ \mu_* \alpha_{\varpi} = \alpha_\pi \}.$$

$$\cup$$

$$\varinjlim H^2(X_\pi) \ni \alpha = \{ \alpha_\pi,\ \alpha_\varpi = \mu^* \alpha_\pi \}.$$

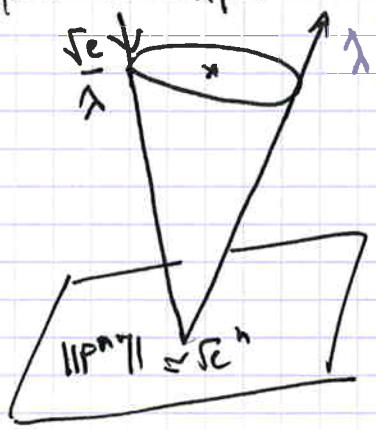
$\mathcal{H}$ = complétion de $\varinjlim H^2(X_\pi)$ pour l'intersection.

$$= \mathbb{R}\mathcal{L}_\infty \bigoplus_{v \in \mathcal{D}} \mathbb{R} E_v \qquad (+1,-1,-1,\dots -1). \quad \text{Minkowski.}$$

$$\left| \begin{array}{l} F^* \alpha . F^* \beta = e\,(\alpha . \beta) \\ F^* \alpha . \beta = \alpha . F_* \beta. \end{array} \right. \qquad \lambda = \rho(F^*).$$

si $\lambda \neq \sqrt{e}$

$\frac{1}{\sqrt{e}} F^*$ isométrie



$$F^{n*} \mathcal{L}_\infty . \mathcal{L}_\infty \simeq \lambda^n$$