Sur un théorème de Minkowski et quelques-uns de ses avatars

Charles Favre
favre@math.polytechnique.fr

20 Janvier 2012

Hermann Minkowski (1864 – 1909)

Représentation des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ l'amène à l'étude des corps convexes.

Il jette les bases de la géométrie convexe

- Inégalités de Brunn-Minkowski
- Somme de Minkowski
- Volumes mixtes

Geometrie der konvexen Körper (1911)

S. Gauthier sur Images des Maths

Hermann Minkowski (1864 – 1909)

Représentation des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ l'amène à l'étude des corps convexes.

Il jette les bases de la géométrie convexe

- Inégalités de Brunn-Minkowski
- Somme de Minkowski
- Volumes mixtes

Geometrie der konvexen Körper (1911)
S. Gauthier sur Images des Maths

Polytope

$\mathbb{E}_3 = (\mathbb{R}^3, \sum dx_i^2)$

Définition (Polytope)

Enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

Définition (Polyèdre)

Intersection finie de demi-espaces.

- polytope = polyèdre compact

Définition (Corps convexe)

Ensemble compact et convexe.

- polytope = corps convexe ayant un nombre fini de points extrémaux

Polytope

$\mathbb{E}_3 = (\mathbb{R}^3, \sum dx_i^2)$

Définition (Polytope)

Enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

Définition (Polyèdre)

Intersection finie de demi-espaces.

- polytope = polyèdre compact

Définition (Corps convexe)

Ensemble compact et convexe.

- polytope = corps convexe ayant un nombre fini de points extrémaux

Polytope

$\mathbb{E}_3 = (\mathbb{R}^3, \sum dx_i^2)$

Définition (Polytope)

Enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

Définition (Polyèdre)

Intersection finie de demi-espaces.

- polytope = polyèdre compact

Définition (Corps convexe)

Ensemble compact et convexe.

- polytope = corps convexe ayant un nombre fini de points extrémaux

Polytope

$\mathbb{E}_3 = (\mathbb{R}^3, \sum dx_i^2)$

Définition (Polytope)

Enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

Définition (Polyèdre)

Intersection finie de demi-espaces.

- polytope = polyèdre compact

Définition (Corps convexe)

Ensemble compact et convexe.

- polytope = corps convexe ayant un nombre fini de points extrémaux

Face

P polytope de $\mathbb{E}_3$ d'intérieur non vide.

Face de P = intersection de P avec un plan $\{\langle v, \cdot \rangle = a\}$ t.q $P \subset \{\langle v, \cdot \rangle \geq a\}$.

- dimension 0: sommets;
- dimension 1: arètes;
- dimension 2: faces/facettes.

Vecteurs normaux

P polytope de $\mathbb{E}_3$.

$v \in S^2$ est un vecteur normal ssi $\{\langle v, \cdot \rangle = a\} \cap P$ est une face de P (pour un $a \in \mathbb{R}$).

F face de P définit un unique vecteur *normal* $v(F)$ sortant.

On notera $N(P) = \{\mathrm{Aire}(F)\, v(F)\}$ l'ensemble des vecteurs normaux pondérés à toutes les faces de P.

Le théorème de Minkowski (1897)

Théorème

Étant donnés des vecteurs $v_1, ..., v_n \in \mathbb{E}_3^*$, et $a_i \in \mathbb{R}_+^*$ tq

- *les vecteurs ne sont pas coplanaires;*
- $\sum a_i v_i = 0$.

Alors il existe un unique polytope P (à translation près) tq $N(P) = \{a_1 v_1, .., a_n v_n\}$.

- $\sum a_i v_i = 0$ est nécessaire par Green-Ostrogradsky (ou un calcul d'aire d'une projection orthogonale);
- $\sum a_i v_i = 0$ est suffisant: preuve variationnelle. Max. le volume de $\cap\{\langle v_i, .\rangle \leq h_i\}$ avec $\sum h_i |v_i| = 1$.
- Unicité: cas d'égalité de l'inégalité de Minkowski sur les volumes mixtes

$$\mathrm{vol}(Q, P[2]) \geq \mathrm{vol}(Q)^{1/3}\, \mathrm{vol}(P)^{2/3}$$

Le théorème de Minkowski (1897)

Théorème

Étant donnés des vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{E}_3^*$, et $a_i \in \mathbb{R}_+^*$ tq

- *les vecteurs ne sont pas coplanaires;*
- $\sum a_i v_i = 0$.

Alors il existe un unique polytope P tq $N(P) = \{a_1 v_1, .., a_n v_n\}$.

- $\sum a_i v_i = 0$ est nécessaire par Green-Ostrogradsky (ou un calcul d'aire d'une projection orthogonale);
- $\sum a_i v_i = 0$ est suffisant: preuve variationnelle. Max. le volume de $\cap\{\langle v_i, .\rangle \leq h_i\}$ avec $\sum h_i |v_i| = 1$.
- Unicité: cas d'égalité de l'inégalité de Minkowski sur les volumes mixtes

$$\mathrm{vol}(Q, P[2]) \geq \mathrm{vol}(Q)^{1/3}\, \mathrm{vol}(P)^{2/3}$$

Le théorème de Minkowski (1897)

Théorème

Étant donnés des vecteurs $v_1, ..., v_n \in \mathbb{E}_3^*$, *et* $a_i \in \mathbb{R}_+^*$ *tq*

- *les vecteurs ne sont pas coplanaires;*
- $\sum a_i v_i = 0$.

Alors il existe un unique polytope P *tq* $N(P) = \{a_1 v_1, .., a_n v_n\}$.

- $\sum a_i v_i = 0$ est nécessaire par Green-Ostrogradsky (ou un calcul d'aire d'une projection orthogonale);
- $\sum a_i v_i = 0$ est suffisant: preuve variationnelle. Max. le volume de $\cap\{\langle v_i, .\rangle \leq h_i\}$ avec $\sum h_i |v_i| = 1$.
- Unicité: cas d'égalité de l'inégalité de Minkowski sur les volumes mixtes

$$\mathrm{vol}(Q, P[2]) \geq \mathrm{vol}(Q)^{1/3}\, \mathrm{vol}(P)^{2/3}$$

Le théorème de Minkowski (1897)

Théorème

Étant donnés des vecteurs $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{E}_3^*$, *et* $a_i \in \mathbb{R}_+^*$ *tq*

- *les vecteurs ne sont pas coplanaires;*
- $\sum a_i v_i = 0$.

Alors il existe un unique polytope P *tq* $N(P) = \{a_1 v_1, .., a_n v_n\}$.

- $\sum a_i v_i = 0$ est nécessaire par Green-Ostrogradsky (ou un calcul d'aire d'une projection orthogonale);
- $\sum a_i v_i = 0$ est suffisant: preuve variationnelle. Max. le volume de $\cap\{\langle v_i, .\rangle \leq h_i\}$ avec $\sum h_i |v_i| = 1$.
- Unicité: cas d'égalité de l'inégalité de Minkowski sur les volumes mixtes

$$\mathrm{vol}(Q, P[2]) \geq \mathrm{vol}(Q)^{1/3}\, \mathrm{vol}(P)^{2/3}$$

Le cas des corps convexes

$K \subset \mathbb{E}_3$.

- $K = \lim_n P_n$ polytopes
- $\mu_{P_n} = \sum_{\text{faces}} \mathrm{Aire}(F)\delta_{v(F)}$ mesure sur S^2
- $\mu_K = \lim_n \mu_{P_n}$

Théorème (Aleksandrov; Fenchel-Jessen (1938))

Étant donnée une mesure positive μ sur S^2 tq

- $\mathrm{supp}(\mu)$ *engendre* $\mathbb{E}_3^*$;
- $\int v\, d\mu(v) = 0$.

Alors il existe un unique corps convexe K (à translation près) tq $\mu_K = \mu$.

Preuve: approximation par des polytopes ou méthode variationnelle.

Le cas des corps convexes

$K \subset \mathbb{E}_3$.

- $K = \lim_n P_n$ polytopes
- $\mu_{P_n} = \sum_{\text{faces}} \mathrm{Aire}(F)\delta_{v(F)}$ mesure sur S^2
- $\mu_K = \lim_n \mu_{P_n}$

Théorème (Aleksandrov; Fenchel-Jessen (1938))

Étant donnée une mesure positive μ sur S^2 tq

- $\mathrm{supp}(\mu)$ *engendre* $\mathbb{E}_3^*$;
- $\int v \, d\mu(v) = 0$.

Alors il existe un unique corps convexe K (à translation près) tq $\mu_K = \mu$.

Preuve: approximation par des polytopes ou méthode variationnelle.

Le cas des corps convexes

$K \subset \mathbb{E}_3$.

- $K = \lim_n P_n$ polytopes
- $\mu_{P_n} = \sum_{\text{faces}} \mathrm{Aire}(F)\delta_{v(F)}$ mesure sur S^2
- $\mu_K = \lim_n \mu_{P_n}$

Théorème (Aleksandrov; Fenchel-Jessen (1938))

Étant donnée une mesure positive μ sur S^2 tq

- $\mathrm{supp}(\mu)$ *engendre* $\mathbb{E}_3^*$;
- $\int v \, d\mu(v) = 0$.

Alors il existe un unique corps convexe K (à translation près) tq $\mu_K = \mu$.

Preuve: approximation par des polytopes ou méthode variationnelle.

Photo de groupe à Oberwolfach (1954)

Qui sont-ils?

Photo de groupe à Oberwolfach (1954)

- Werner Fenchel (1905-1988)

Photo de groupe à Oberwolfach (1954)

- Werner Fenchel (1905-1988)
- Aleksandr Danilovich Aleksandrov (1912-1999)

Photo de groupe à Oberwolfach (1954)

- Werner Fenchel (1905-1988)
- Aleksandr Danilovich Aleksandrov (1912-1999)
- Herbert Busemann (1905-1994)

Photo de groupe à Oberwolfach (1954)

- Werner Fenchel (1905-1988)
- Aleksandr Danilovich Aleksandrov (1912-1999)
- Herbert Busemann (1905-1994)
- Børge Jessen (1907-1993)

Construction de la mesure d'aire

P polytope, $P_\rho = \{x,\ d(x,P) \leq \rho\}$, $\omega \subset S^2$

$$\mu_{P,\rho}(\omega) = \mathrm{vol}\{x \in P_\rho \setminus P,\ (x - \mathrm{proj}_K(x)) \in \omega\}$$

$\mu_{P,\rho} = \mu_{1,P}\,\rho + \mu_{2,P}\,\rho^2 + \mu_{3,P}\,\rho^3$ avec

$$\mu_{1,P} = \mu_P$$

On passe à la limite $P_n \to K$

Interprétation de la mesure d'aire

K corps convexe à bord lisse et strictement convexe.

- $N_K : K \to S^2$ application de Gauß (difféo par hypothèse);
- Courbure de Gauß (à partir de dN_K et de l'identification $T_x K \equiv T_{N_K(x)} S^2$)

Affirmation

On a $\mu_K = H_K \, d\sigma$ avec

$$H_K(y) = \frac{1}{Courbure(N_K^{-1}(y))}$$

Régularité

Théorème (Cheng-Yau; Nirenberg; Pogorelov)

Étant donnée une fonction $H : S^2 \to \mathbb{R}_+^*$ de classe C^∞ tq $\int H d\sigma = 0$, il existe un unique corps strictement convexe K et à bord lisse tq $\mu_K = H d\sigma$, i.e.

$$Courbure_K(x) = H(N_K(x))^{-1}$$

- problème d'EDP non linéaire de type Monge-Ampère:

$$\det\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\right) = f\left(\cdot, h, \frac{\partial h}{\partial x_i}\right)$$

- méthode de continuité

Régularité

Théorème (Cheng-Yau; Nirenberg; Pogorelov)

Étant donnée une fonction $H : S^2 \to \mathbb{R}^*_+$ de classe C^∞ tq $\int H d\sigma = 0$, il existe un unique corps strictement convexe K et à bord lisse tq $\mu_K = H d\sigma$, i.e.

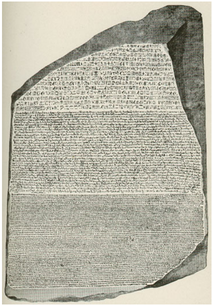
$$Courbure_K(x) = H(N_K(x))^{-1}$$

- problème d'EDP non linéaire de type Monge-Ampère:

$$\det\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\right) = f\left(\cdot, h, \frac{\partial h}{\partial x_i}\right)$$

- méthode de continuité

Qu'en dit maitre Calabi?



The importance of the Minkowski problem and its solution is to be felt both in differential geometry and in elliptic partial differential equations, on either count going far beyond the impact that the literal statement superficially may have. From the geometric view point it is the Rosetta Stone, from which several other related problems can be solved.

Review du livre de Pogorelov: The Minkowski multidimensional problem (1978).

Le théorème de Calabi-Yau I

- $X^n \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ sous-variété algébrique lisse;
- $L = \mathcal{O}_X(1)$;
- métrique hermitienne: $h = |\cdot|e^{-\phi}$;
- courbure $c_1(L, h) = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\phi$.

Théorème (Yau (1978))

Étant donnée une forme volume Ω lisse sur X de masse $c_1(L)^n$ il existe une unique métrique hermitienne h sur L tq

$$c_1(L, h)^{\wedge n} = \Omega$$

Méthode de continuité.

Le théorème de Calabi-Yau I

- $X^n \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ sous-variété algébrique lisse;
- $L = \mathcal{O}_X(1)$;
- métrique hermitienne: $h = |\cdot|e^{-\phi}$;
- courbure $c_1(L, h) = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\phi$.

Théorème (Yau (1978))

Étant donnée une forme volume Ω lisse sur X de masse $c_1(L)^n$ il existe une unique métrique hermitienne h sur L tq

$$c_1(L, h)^{\wedge n} = \Omega$$

Méthode de continuité.

Le théorème de Calabi-Yau II

Théorème (Kołodziej)

Étant donnée une mesure positive μ suffisamment régulière sur X de masse $c_1(L)^n$ il existe une unique métrique hermitienne continue semipositive h sur L tq

$$c_1(L,h)^{\wedge n} = \mu$$

Le théorème de Calabi-Yau II

Théorème (Kołodziej)

Étant donnée une mesure positive μ suffisamment régulière sur X de masse $c_1(L)^n$ il existe une unique métrique hermitienne continue semipositive h sur L tq

$$c_1(L,h)^{\wedge n} = \mu$$

Régularité: $\mu(K) \leq A\,\mathrm{Cap}_\omega(K)^{1+\alpha}$.

Le théorème de Calabi-Yau II

Théorème (Kołodziej)

Étant donnée une mesure positive μ suffisamment régulière sur X de masse $c_1(L)^n$ il existe une unique métrique hermitienne continue semipositive h sur L tq

$$c_1(L, h)^{\wedge n} = \mu$$

- Difficultés analytiques pour donner un sens à $c_1(L, h)^{\wedge n}$ (produit de distributions!)
- Méthode variationnelle: Berman, Boucksom, Guedj et Zeriahi.
- Même énoncé pour des variétés sur $(K, |\cdot|)$ non-archimédien (Boucksom Favre Jonsson)

Surface torique

- Groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^2 = (\mathbb{C}^*)^2$
- Surface torique compacte lisse = compactification de $(\mathbb{C}^*)^2$, $\mathbb{G}_m^2$-équivariante
- Une telle compactification est codée par la donnée d'un nombre fini de vecteurs entiers (+ conditions)

Surface torique

- Groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^2 = (\mathbb{C}^*)^2$
- Surface torique compacte lisse = compactification de $(\mathbb{C}^*)^2$, $\mathbb{G}_m^2$-équivariante
- Une telle compactification est codée par la donnée d'un nombre fini de vecteurs entiers (+ conditions)

Surface torique

- Groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^2 = (\mathbb{C}^*)^2$
- Surface torique compacte lisse = compactification de $(\mathbb{C}^*)^2$, $\mathbb{G}_m^2$-équivariante
- Une telle compactification est codée par la donnée d'un nombre fini de vecteurs entiers (+ conditions)

Surface torique

- Groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^2 = (\mathbb{C}^*)^2$
- Surface torique compacte lisse = compactification de $(\mathbb{C}^*)^2$, $\mathbb{G}_m^2$-équivariante
- Une telle compactification est codée par la donnée d'un nombre fini de vecteurs entiers (+ conditions)

Surface torique et polytope

P polygone à sommets entiers dans $\mathbb{E}_2$ (de Delzant)

- Fonction support: $h_P(x) = \sup\{\langle x, y\rangle,\ y \in P\}$ (convexe et linéaire par morceaux)
- Lieu de non-différentiabilité de h_P définit une surface torique compacte lisse X_P + un fibré en droite.

$$L_P \to X_P$$

- Application moment: $\varpi : X_P \to P$

Retour à Minkowski-Aleksandrov

P polygone de Delzant dans $\mathbb{E}_2$

Théorème (Yau-Kołodziej-BBGZ torique)

Soit μ une mesure positive sur X_P

- $S^1 \times S^1$*-invariante;*
- *de masse* $2\mathrm{vol}(P)$.
- $\varpi_* \mu$ *atomique supportée sur* $\mathrm{Int}(P)$.

Alors, il existe une unique métrique hermitienne h sur L continue semipositive, et $S^1 \times S^1$-invariante tq

$$c_1(L, h)^{\wedge 2} = \mu.$$

Retour à Minkowski-Aleksandrov

P polytope de Delzant dans $\mathbb{E}_2$.

Théorème (Aleksandrov)

Étant donnés des vecteurs unitaires $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{E}_2 \times \mathbb{R}_+^*$, et des constantes $a_1, \ldots, a_n > 0$ tq $\sum a_i = \mathrm{Aire}(P)$, il existe un unique polyèdre $\Pi \subset \mathbb{E}_2 \times \mathbb{R}_-$ tq

- $\Pi \cap \mathbb{E}_2 \times (-\infty, A] = P \times (-\infty, A]$;
- *Π possède exactement n faces compactes;*
- *chaque vecteur v_i est normal à une face compacte $F_i$de Π, et $\mathrm{Aire}(F_i) = a_i$.*