

Arbres réels et Espaces de valuations

Charles Favre

`favre@math.jussieu.fr`

Thèse d'habilitation

Structure du mémoire d'habilitation

Trois problèmes

- Dynamique des applications polynomiales $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ (avec M. Jonsson).
- Dynamique des fractions rationnelles sur un corps p -adique: $R : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ (avec J. Rivera-Letelier).
- Analyse des singularités des fonctions plurisousharmoniques (avec M. Jonsson).

Structure du mémoire d'habilitation

Trois problèmes

- Dynamique des applications polynomiales $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ (avec M. Jonsson).
- Dynamique des fractions rationnelles sur un corps p -adique: $R : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ (avec J. Rivera-Letelier).
- Analyse des singularités des fonctions plurisousharmoniques (avec M. Jonsson).

Structure du mémoire d'habilitation

Trois problèmes

- Dynamique des applications polynomiales $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ (avec M. Jonsson).
- Dynamique des fractions rationnelles sur un corps p -adique: $R : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ (avec J. Rivera-Letelier).
- Analyse des singularités des fonctions plurisousharmoniques (avec M. Jonsson).

Structure du mémoire d'habilitation

Trois problèmes

- Dynamique des applications polynomiales $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ (avec M. Jonsson).
- Dynamique des fractions rationnelles sur un corps p -adique: $R : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ (avec J. Rivera-Letelier).
- Analyse des singularités des fonctions plurisousharmoniques (avec M. Jonsson).

Structure du mémoire d'habilitation

Trois problèmes

- Dynamique des applications polynomiales $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ (avec M. Jonsson).
- Dynamique des fractions rationnelles sur un corps p -adique: $R : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ (avec J. Rivera-Letelier).
- Analyse des singularités des fonctions plurisousharmoniques (avec M. Jonsson).

Une méthode analogue: étude de la **trace** de l'objet sur un **arbre réel**.

Quelques exemples d'arbres



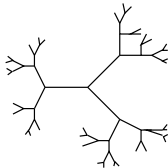
Quelques exemples d'arbres

Arbre simplicial ayant
une infinite de branches

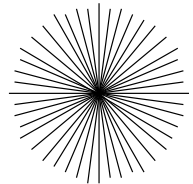
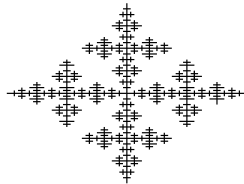
Arbre fini



Arbre localement fini



Arbre reel ayant une
infinite de pts de branchement



Fonctions plurisousharmoniques

- Définition (Oka, Lelong, 1942). $u : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,
semicontinue supérieurement,

$$u(p) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + e^{i\theta}\zeta) d\theta .$$

- Fonctions convexes pour la géométrie complexe.

$$(t_1, t_2) \mapsto \sup\{u, |z_i| \leq e^{t_i}\}$$

est convexe et croissante en chaque variable.

Fonctions plurisousharmoniques

- Définition (Oka, Lelong, 1942). $u : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,
semicontinue supérieurement,

$$u(p) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + e^{i\theta}\zeta) d\theta .$$

- Fonctions convexes pour la géométrie complexe.

$$(t_1, t_2) \mapsto \sup\{u, |z_i| \leq e^{t_i}\}$$

est convexe et croissante en chaque variable.

Fonctions plurisousharmoniques

- Définition (Oka, Lelong, 1942). $u : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,
semicontinue supérieurement,

$$u(p) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + e^{i\theta}\zeta) d\theta .$$

- Fonctions convexes pour la géométrie complexe.

$$(t_1, t_2) \mapsto \sup\{u, |z_i| \leq e^{t_i}\}$$

est convexe et croissante en chaque variable.

Fonctions plurisousharmoniques

- Définition (Oka, Lelong, 1942). $u : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,
semicontinue supérieurement,

$$u(p) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + e^{i\theta}\zeta) d\theta .$$

- Fonctions convexes pour la géométrie complexe.

$$(t_1, t_2) \mapsto \sup\{u, |z_i| \leq e^{t_i}\}$$

est convexe et croissante en chaque variable.

Exemple: fonction psh associée à un idéal

$$I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$$

- $u_I = \log \max\{|f_j|\}$ est psh. Unique à $O(1)$ près.
- $\sum_1^N c_k u_{I_k}$ est psh
- $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^2} \log |z - \frac{1}{k}|$ est psh

Exemple: fonction psh associée à un idéal

$$I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$$

- $u_I = \log \max\{|f_j|\}$ est psh. Unique à $O(1)$ près.
- $\sum_1^N c_k u_{I_k}$ est psh
- $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^2} \log |z - \frac{1}{k}|$ est psh

Exemple: fonction psh associée à un idéal

$$I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$$

- $u_I = \log \max\{|f_i|\}$ est psh. Unique à $O(1)$ près.
- $\sum_1^N c_k u_{I_k}$ est psh
- $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^2} \log |z - \frac{1}{k}|$ est psh

Exemple: fonction psh associée à un idéal

$$I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$$

- $u_I = \log \max\{|f_i|\}$ est psh. Unique à $O(1)$ près.
- $\sum_1^N c_k u_{I_k}$ est psh
- $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^2} \log |z - \frac{1}{k}|$ est psh

Exemple: fonction psh associée à un idéal

$$I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$$

- $u_I = \log \max\{|f_i|\}$ est psh. Unique à $O(1)$ près.
- $\sum_1^N c_k u_{I_k}$ est psh
- $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^2} \log |z - \frac{1}{k}|$ est psh

Exemple: fonction psh associée à un idéal

$$I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$$

- $u_I = \log \max\{|f_j|\}$ est psh. Unique à $O(1)$ près.
- $\sum_1^N c_k u_{I_k}$ est psh
- $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^2} \log |z - \frac{1}{k}|$ est psh

Théorème (Bremermann, Demailly)

Toute fonction psh est limite de $c_n u_{I_n}$ dans L^1_{loc} .

Qu'est ce qu'une singularité de fonction psh?

Definition

$$\text{Sing}(u) = \{u = -\infty\}.$$

- $\text{Sing}(u_I) = V(I)$. Singularités logarithmiques.
- $\text{Sing}\left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^2} \log |z - \frac{1}{k}|\right) = \left\{\frac{1}{k}\right\}_{k > 0}$

Clé pour comprendre le lien psh/hol.

Qu'est ce qu'une singularité de fonction psh?

Definition

$$\text{Sing}(u) = \{u = -\infty\}.$$

- $\text{Sing}(u_I) = V(I)$. Singularités logarithmiques.
- $\text{Sing}\left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^2} \log |z - \frac{1}{k}|\right) = \left\{\frac{1}{k}\right\}_{k > 0}$

Clé pour comprendre le lien psh/hol.

Qu'est ce qu'une singularité de fonction psh?

Definition

$$\text{Sing}(u) = \{u = -\infty\}.$$

- $\text{Sing}(u_I) = V(I)$. Singularités logarithmiques.
- $\text{Sing}\left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^2} \log |z - \frac{1}{k}|\right) = \{\frac{1}{k}\}_{k > 0}$

Clé pour comprendre le lien psh/hol.

Qu'est ce qu'une singularité de fonction psh?

Definition

$$\text{Sing}(u) = \{u = -\infty\}.$$

- $\text{Sing}(u_I) = V(I)$. Singularités logarithmiques.
- $\text{Sing}\left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^2} \log |z - \frac{1}{k}|\right) = \left\{\frac{1}{k}\right\}_{k > 0}$

Clé pour comprendre le lien psh/hol.

Mesurer les singularités de fonctions psh

Deux méthodes:

- L^2 (sophistiquée et puissante);
- L^∞ (naïve mais concrète)

Mesurer les singularités de fonctions psh

Deux méthodes:

- L^2 (sophistiquée et puissante);
- L^∞ (naïve mais concrète)

Méthode L^∞

- Nombre de Lelong (1957)

$$\begin{aligned} \nu^L(u, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\log r} \sup\{u, |z| \leq r\} \\ &= \sup\{c > 0, u \leq c \log |z| + O(1)\} \end{aligned}$$

- Nombre de Kiselman (1987) Poids $s_i > 0$ sur la coordonnée z_i .

$$\begin{aligned} \nu_{z,s}^K(u, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{s_1 s_2}{\log r} \sup\left\{u, |z_i| < r^{1/s_i}\right\} \\ &= \sup\left\{c > 0, u \leq \frac{c}{s_1 s_2} \log \max |z_i|^{s_i} + O(1)\right\} \end{aligned}$$

- Nombre de Demailly (1987)

Méthode L^∞

- Nombre de Lelong (1957)

$$\begin{aligned} \nu^L(u, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\log r} \sup\{u, |z| \leq r\} \\ &= \sup\{c > 0, u \leq c \log |z| + O(1)\} \end{aligned}$$

- Nombre de Kiselman (1987) Poids $s_i > 0$ sur la coordonnée z_i .

$$\begin{aligned} \nu_{z,s}^K(u, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{s_1 s_2}{\log r} \sup\{u, |z_i| < r^{1/s_i}\} \\ &= \sup\left\{c > 0, u \leq \frac{c}{s_1 s_2} \log \max |z_i|^{s_i} + O(1)\right\} \end{aligned}$$

- Nombre de Demailly (1987)

Méthode L^∞

- Nombre de Lelong (1957)

$$\begin{aligned} \nu^L(u, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\log r} \sup\{u, |z| \leq r\} \\ &= \sup\{c > 0, u \leq c \log |z| + O(1)\} \end{aligned}$$

- Nombre de Kiselman (1987) Poids $s_i > 0$ sur la coordonnée z_i .

$$\begin{aligned} \nu_{z,s}^K(u, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{s_1 s_2}{\log r} \sup\{u, |z_i| < r^{1/s_i}\} \\ &= \sup\left\{c > 0, u \leq \frac{c}{s_1 s_2} \log \max |z_i|^{s_i} + O(1)\right\} \end{aligned}$$

- Nombre de Demailly (1987)

Méthode L^∞

- Nombre de Lelong (1957)

$$\begin{aligned} \nu^L(u, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\log r} \sup\{u, |z| \leq r\} \\ &= \sup\{c > 0, u \leq c \log |z| + O(1)\} \end{aligned}$$

- Nombre de Kiselman (1987) Poids $s_i > 0$ sur la coordonnée z_i .

$$\begin{aligned} \nu_{z,s}^K(u, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{s_1 s_2}{\log r} \sup\{u, |z_i| < r^{1/s_i}\} \\ &= \sup\left\{c > 0, u \leq \frac{c}{s_1 s_2} \log \max |z_i|^{s_i} + O(1)\right\} \end{aligned}$$

- Nombre de Demailly (1987)

Méthode L^∞

- Nombre de Lelong (1957)

$$\begin{aligned} \nu^L(u, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\log r} \sup\{u, |z| \leq r\} \\ &= \sup\{c > 0, u \leq c \log |z| + O(1)\} \end{aligned}$$

- Nombre de Kiselman (1987) Poids $s_i > 0$ sur la coordonnée z_i .

$$\begin{aligned} \nu_{z,s}^K(u, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{s_1 s_2}{\log r} \sup\{u, |z_i| < r^{1/s_i}\} \\ &= \sup\left\{c > 0, u \leq \frac{c}{s_1 s_2} \log \max |z_i|^{s_i} + O(1)\right\} \end{aligned}$$

- Nombre de Demailly (1987)

Méthode L^∞

- Nombre de Lelong (1957)

$$\begin{aligned} \nu^L(u, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\log r} \sup\{u, |z| \leq r\} \\ &= \sup\{c > 0, u \leq c \log |z| + O(1)\} \end{aligned}$$

- Nombre de Kiselman (1987) Poids $s_i > 0$ sur la coordonnée z_i .

$$\begin{aligned} \nu_{z,s}^K(u, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{s_1 s_2}{\log r} \sup\left\{u, |z_i| < r^{1/s_i}\right\} \\ &= \sup\left\{c > 0, u \leq \frac{c}{s_1 s_2} \log \max |z_i|^{s_i} + O(1)\right\} \end{aligned}$$

- Nombre de Demailly (1987)

Lelong et Kiselman sous un oeil valuatif

$$f = \sum a_k z_1^{k_1} z_2^{k_2}$$

- $\nu^L(\log |f|) = \nu_m(f) = \min\{k_1 + k_2, a_k \neq 0\}$. Thie (1967).
- $\nu_{z,s}^K(\log |f|) = \min\{k_1 s_1 + k_2 s_2, a_k \neq 0\}$.

Nombre de Kiselman \Leftrightarrow Valuation monomiale

Lelong et Kiselman sous un oeil valuatif

$$f = \sum a_k z_1^{k_1} z_2^{k_2}$$

- $\nu^L(\log |f|) = \nu_m(f) = \min\{k_1 + k_2, a_k \neq 0\}$. Thie (1967).
- $\nu_{z,s}^K(\log |f|) = \min\{k_1 s_1 + k_2 s_2, a_k \neq 0\}$.

Nombre de Kiselman \Leftrightarrow Valuation monomiale

Lelong et Kiselman sous un oeil valuatif

$$f = \sum a_k z_1^{k_1} z_2^{k_2}$$

- $\nu^L(\log |f|) = \nu_m(f) = \min\{k_1 + k_2, a_k \neq 0\}$. Thie (1967).
- $\nu_{z,s}^K(\log |f|) = \min\{k_1 s_1 + k_2 s_2, a_k \neq 0\}$.

Nombre de Kiselman \Leftrightarrow Valuation monomiale

Lelong et Kiselman sous un oeil valuatif

$$f = \sum a_k z_1^{k_1} z_2^{k_2}$$

- $\nu^L(\log |f|) = \nu_m(f) = \min\{k_1 + k_2, a_k \neq 0\}$. Thie (1967).
- $\nu_{z,s}^K(\log |f|) = \min\{k_1 s_1 + k_2 s_2, a_k \neq 0\}$.

Nombre de Kiselman \Leftrightarrow Valuation monomiale

Méthode L^2

- $c(u) = \sup\{c, e^{-cu} \in L^2_{\text{loc}}\} \in]0, +\infty[.$
- $c(\log |z_1^p + z_2^q|) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$
- $\mathcal{J}(u) = \{\text{germes } f, |f|e^{-u} \in L^2_{\text{loc}}\}.$
- $c(u) = \sup\{c > 0, \mathcal{J}(cu) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)\}.$
- Demailly: $\frac{1}{i} u_{\mathcal{J}(tu)} \rightarrow u.$

Méthode L^2

- $c(u) = \sup\{c, e^{-cu} \in L^2_{\text{loc}}\} \in]0, +\infty[.$
- $c(\log |z_1^p + z_2^q|) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$
- $\mathcal{J}(u) = \{\text{germes } f, |f|e^{-u} \in L^2_{\text{loc}}\}.$
- $c(u) = \sup\{c > 0, \mathcal{J}(cu) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)\}.$
- Demailly: $\frac{1}{t}u_{\mathcal{J}(tu)} \rightarrow u.$

Méthode L^2

- $c(u) = \sup\{c, e^{-cu} \in L^2_{\text{loc}}\} \in]0, +\infty[.$
- $c(\log |z_1^p + z_2^q|) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$
- $\mathcal{J}(u) = \{\text{germes } f, |f|e^{-u} \in L^2_{\text{loc}}\}.$
- $c(u) = \sup\{c > 0, \mathcal{J}(cu) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)\}.$
- Demailly: $\frac{1}{i} u_{\mathcal{J}(tu)} \rightarrow u.$

Méthode L^2

- $c(u) = \sup\{c, e^{-cu} \in L^2_{\text{loc}}\} \in]0, +\infty[.$
- $c(\log |z_1^p + z_2^q|) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$
- $\mathcal{J}(u) = \{\text{germes } f, |f|e^{-u} \in L^2_{\text{loc}}\}.$
- $c(u) = \sup\{c > 0, \mathcal{J}(cu) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)\}.$
- Demailly: $\frac{1}{t}u_{\mathcal{J}(tu)} \rightarrow u.$

Méthode L^2

- $c(u) = \sup\{c, e^{-cu} \in L^2_{\text{loc}}\} \in]0, +\infty[.$
- $c(\log |z_1^p + z_2^q|) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$
- $\mathcal{J}(u) = \{\text{germes } f, |f|e^{-u} \in L^2_{\text{loc}}\}.$
- $c(u) = \sup\{c > 0, \mathcal{J}(cu) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)\}.$
- Demailly: $\frac{1}{t}u_{\mathcal{J}(tu)} \rightarrow u.$

Méthode L^2

- $c(u) = \sup\{c, e^{-cu} \in L^2_{\text{loc}}\} \in]0, +\infty[.$
- $c(\log |z_1^p + z_2^q|) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$
- $\mathcal{J}(u) = \{\text{germes } f, |f|e^{-u} \in L^2_{\text{loc}}\}.$
- $c(u) = \sup\{c > 0, \mathcal{J}(cu) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)\}.$
- Demailly: $\frac{1}{t}u_{\mathcal{J}(tu)} \rightarrow u.$

L^2 vs. L^∞

Skoda (1972): $\frac{1}{2}\nu^L(u) \leq c^{-1}(u) \leq \nu^L(u)$

L^2 vs. L^∞

Skoda (1972): $\frac{1}{2}\nu^L(u) \leq c^{-1}(u) \leq \nu^L(u)$

{ Analyse L^2 sur $(\mathbb{C}^n, 0)$ }

\iff

{ Analyse L^∞ dans tous les modèles $\pi : X_\pi \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ }

L^2 vs. L^∞

Théorème

$$e^{-u} \in L^2_{\text{loc}} \iff \sup_{z,s} \frac{\nu_{z,s}^K(u)}{s_1 + s_2} < 1 .$$

L^2 vs. L^∞

Théorème

$$e^{-tu} \in L^2_{\text{loc}} \iff \sup_{z,s} \frac{\nu_{z,s}^K(u)}{s_1 + s_2} < \frac{1}{t}.$$

Conséquences

- $c^{-1}(u) = \sup_{z,s} \frac{v_{z,s}^K(u)}{s_1 + s_2} \cdot \Rightarrow$ Skoda.
- $e^{-c(u)u} \notin L_{loc}^2$. (Conjecture d'ouverture de Demailly et Kollàr)

Conséquences

- $c^{-1}(u) = \sup_{z,s} \frac{v_{z,s}^K(u)}{s_1 + s_2} \cdot \Rightarrow$ Skoda.
- $e^{-c(u)u} \notin L_{loc}^2$. (Conjecture d'ouverture de Demailly et Kollàr)

Conséquences

- $c^{-1}(u) = \sup_{z,s} \frac{v_{z,s}^K(u)}{s_1 + s_2} \Rightarrow$ Skoda.
- $e^{-c(u)u} \notin L_{\text{loc}}^2$. (Conjecture d'ouverture de Demailly et Kollàr)

Idée de la preuve

\Rightarrow

- $e^{-u} \in L^2_{\text{loc}} \Rightarrow \frac{v_{z,s}^K(u)}{s_1+s_2} < 1$ (facile)
- Point Clé: $\sup_{z,s} \frac{v_{z,s}^K(u)}{s_1+s_2}$ est atteint

\Leftarrow :

- Sing. log.
- Approx. Demailly

Idée de la preuve

\Rightarrow

- $e^{-u} \in L^2_{\text{loc}} \Rightarrow \frac{v_{z,s}^K(u)}{s_1+s_2} < 1$ (facile)
- Point Clé: $\sup_{z,s} \frac{v_{z,s}^K(u)}{s_1+s_2}$ est atteint

\Leftarrow :

- Sing. log.
- Approx. Demailly

Idée de la preuve

\Rightarrow

- $e^{-u} \in L^2_{\text{loc}} \Rightarrow \frac{\nu_{z,s}^K(u)}{s_1+s_2} < 1$ (facile)
- Point Clé: $\sup_{z,s} \frac{\nu_{z,s}^K(u)}{s_1+s_2}$ est atteint

\Leftarrow :

- Sing. log.
- Approx. Demailly

Idée de la preuve

\Rightarrow

- $e^{-u} \in L^2_{\text{loc}} \Rightarrow \frac{\nu_{z,s}^K(u)}{s_1+s_2} < 1$ (facile)
- Point Clé: $\sup_{z,s} \frac{\nu_{z,s}^K(u)}{s_1+s_2}$ est atteint

\Leftarrow :

- Sing. log.
- Approx. Demailly

Idée de la preuve

\Rightarrow

- $e^{-u} \in L^2_{\text{loc}} \Rightarrow \frac{\nu_{z,s}^K(u)}{s_1+s_2} < 1$ (facile)
- Point Clé: $\sup_{z,s} \frac{\nu_{z,s}^K(u)}{s_1+s_2}$ est atteint

\Leftarrow :

- Sing. log.
- Approx. Demailly

Le résultat clé

- Organiser $\{\nu(u \circ \pi, p)\}$, $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, $p \in \pi^{-1}\{0\}$.
 - $p \rightsquigarrow \nu(u \circ \pi, p) \in \mathbb{R}$
 - Zariski: $\{p\} \leftrightarrow \{\text{valuations: } \nu_p\} = \mathcal{V}$
- \mathcal{V} est arbre.
- $g_u : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ est concave.

Le résultat clé

- Organiser $\{\nu(u \circ \pi, p)\}$, $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, $p \in \pi^{-1}\{0\}$.
 - $p \rightsquigarrow \nu(u \circ \pi, p) \in \mathbb{R}$
 - Zariski: $\{p\} \leftrightarrow \{\text{valuations: } \nu_p\} = \mathcal{V}$
- \mathcal{V} est arbre.
- $g_u : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ est concave.

Le résultat clé

- Organiser $\{\nu(u \circ \pi, p)\}$, $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, $p \in \pi^{-1}\{0\}$.
 - $p \rightsquigarrow \nu(u \circ \pi, p) \in \mathbb{R}$
 - Zariski: $\{p\} \leftrightarrow \{\text{valuations: } \nu_p\} = \mathcal{V}$
- \mathcal{V} est arbre.
- $g_u : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ est concave.

Le résultat clé

- Organiser $\{\nu(u \circ \pi, p)\}$, $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, $p \in \pi^{-1}\{0\}$.
 - $p \rightsquigarrow \nu(u \circ \pi, p) \in \mathbb{R}$
 - Zariski: $\{p\} \leftrightarrow \{\text{valuations: } \nu_p\} = \mathcal{V}$
- \mathcal{V} est arbre.
- $g_u : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ est concave.

Le résultat clé

- Organiser $\{\nu(u \circ \pi, p)\}$, $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, $p \in \pi^{-1}\{0\}$.
 - $p \rightsquigarrow \nu(u \circ \pi, p) \in \mathbb{R}$
 - Zariski: $\{p\} \leftrightarrow \{\text{valuations: } \nu_p\} = \mathcal{V}$
- \mathcal{V} est arbre.
- $g_u : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ est concave.

Valuations

Definition

$$\nu : \mathbb{C}[[x, y]] \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

- $\nu|_{\mathbb{C}^*} \equiv 0$;
- $\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$;
- $\nu(f + g) \geq \min\{\nu(f), \nu(g)\}$;
- $\nu(\mathfrak{m}) > 0$.

Valuations (exemples)

- Valuation monomiale.

$$\nu_{z,s}(\sum a_{ij} z^i w^j) = \min\{is_1 + js_2, a_k \neq 0\}$$

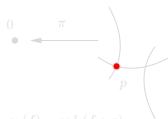
- Valuation divisorielle.

- Valuation quasimonomiale.

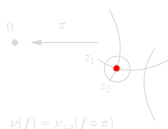
- Valuations de courbes

$$\nu_\phi(f) = \{\phi^{-1}(0)\} \cdot \{f^{-1}(0)\}.$$

Valuation divisorielle



Valuations Quasimonomiales



Valuations (exemples)

- Valuation monomiale.

$$\nu_{z,s}(\sum a_{ij} z^i w^j) = \min\{is_1 + js_2, a_k \neq 0\}$$

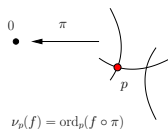
- Valuation divisorielle.

- Valuation quasimonomiale.

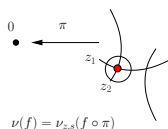
- Valuations de courbes

$$\nu_\phi(f) = \{\phi^{-1}(0)\} \cdot \{f^{-1}(0)\}.$$

Valuation divisorielle



Valuations Quasimonomiales



Valuations (exemples)

- Valuation monomiale.

$$\nu_{z,s}(\sum a_{ij} z^i w^j) = \min\{is_1 + js_2, a_k \neq 0\}$$

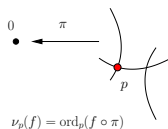
- Valuation divisorielle.

- Valuation quasimonomiale.

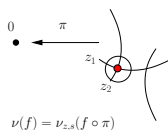
- Valuations de courbes

$$\nu_\phi(f) = \{\phi^{-1}(0)\} \cdot \{f^{-1}(0)\}.$$

Valuation divisorielle



Valuations Quasimonomiales



Valuations (exemples)

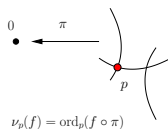
- Valuation monomiale.

$$\nu_{z,s}(\sum a_{ij} z^i w^j) = \min\{is_1 + js_2, a_k \neq 0\}$$

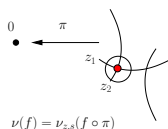
- Valuation divisorielle.
- Valuation quasimonomiale.
- Valuations de courbes

$$\nu_\phi(f) = \{\phi^{-1}(0)\} \cdot \{f^{-1}(0)\}.$$

Valuation divisorielle



Valuations Quasimonomiales



Topologie

- $\mathcal{V} = \{ \text{valuations normalisées } \nu(\mathfrak{m}) = +1 \}$
- Compact pour la convergence simple
- Relation d'ordre $\nu \leq \mu \Leftrightarrow \forall f, \nu(f) \leq \mu(f)$

Topologie

- $\mathcal{V} = \{ \text{valuations normalisées } \nu(\mathfrak{m}) = +1 \}$
- Compact pour la convergence simple
- Relation d'ordre $\nu \leq \mu \Leftrightarrow \forall f, \nu(f) \leq \mu(f)$

Topologie

- $\mathcal{V} = \{ \text{valuations normalisées } \nu(\mathfrak{m}) = +1 \}$
- Compact pour la convergence simple
- Relation d'ordre $\nu \leq \mu \Leftrightarrow \forall f, \nu(f) \leq \mu(f)$

Géométrie

Théorème

(\mathcal{V}, \leq) est un arbre:

- ν_m est l'unique élément minimal;
- $(\{\nu_m \leq \cdot \leq \nu\}, \leq) \simeq ([0, 1], \leq)$

Segments quasimonomiaux: $\{\nu_{(1,s)}\}_{s \geq 1}$.

Géométrie

Théorème

(\mathcal{V}, \leq) est un arbre:

- ν_m est l'unique élément minimal;
- $(\{\nu_m \leq \cdot \leq \nu\}, \leq) \simeq ([0, 1], \leq)$

Segments quasimonomiaux: $\{\nu_{(1,s)}\}_{s \geq 1}$.

Géométrie

Théorème

(\mathcal{V}, \leq) est un arbre:

- ν_m est l'unique élément minimal;
- $(\{\nu_m \leq \cdot \leq \nu\}, \leq) \simeq ([0, 1], \leq)$

Segments quasimonomiaux: $\{\nu_{(1,s)}\}_{s \geq 1}$.

Géométrie

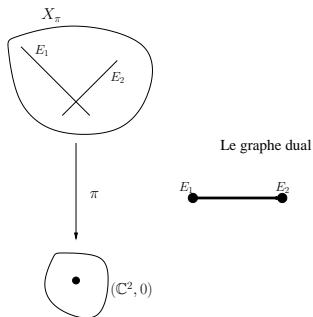
Théorème

(\mathcal{V}, \leq) est un arbre:

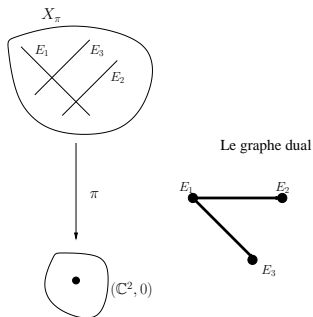
- ν_m est l'unique élément minimal;
- $(\{\nu_m \leq \cdot \leq \nu\}, \leq) \simeq ([0, 1], \leq)$

Segments quasimonomiaux: $\{\nu_{(1,s)}\}_{s \geq 1}$.

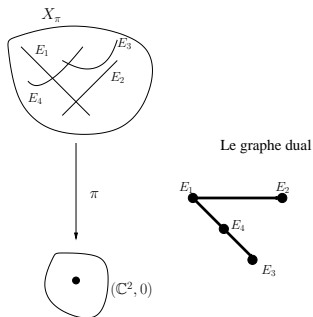
\mathcal{V} ... un arbre?



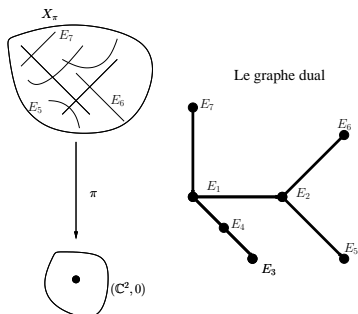
$\mathcal{V} \dots$ un arbre?



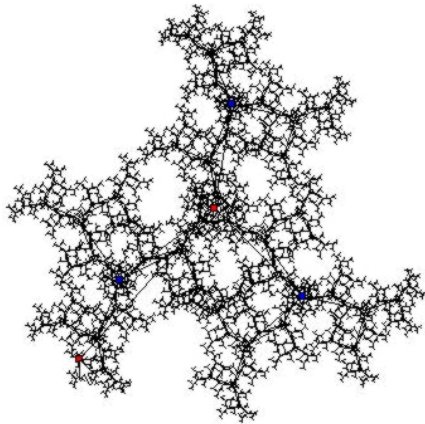
\mathcal{V} ... un arbre?



\mathcal{V} ... un arbre?



\mathcal{V} ... un arbre?



Métrique

Definition

Le défaut: $\alpha(\nu) = \sup_f \frac{\nu(f)}{\nu_m(f)}$.

Théorème

$\alpha : [\nu_m, \nu] \rightarrow [1, \alpha(\nu)]$ est une bijection.

$\nu(f) = \nu_m(f) \times \alpha(\nu) \Leftrightarrow \nu \leq \nu_f$.

Polynômes-clés.

Métrique

Definition

Le défaut: $\alpha(\nu) = \sup_f \frac{\nu(f)}{\nu_m(f)}$.

Théorème

$\alpha : [\nu_m, \nu] \rightarrow [1, \alpha(\nu)]$ est une bijection.

$\nu(f) = \nu_m(f) \times \alpha(\nu) \Leftrightarrow \nu \leq \nu_f$.

Polynômes-clés.

Métrique

Definition

Le défaut: $\alpha(\nu) = \sup_f \frac{\nu(f)}{\nu_m(f)}$.

Théorème

$\alpha : [\nu_m, \nu] \rightarrow [1, \alpha(\nu)]$ est une bijection.

$\nu(f) = \nu_m(f) \times \alpha(\nu) \Leftrightarrow \nu \leq \nu_f$.

Polynômes-clés.

Métrique

Definition

Le défaut: $\alpha(\nu) = \sup_f \frac{\nu(f)}{\nu_m(f)}$.

Théorème

$\alpha : [\nu_m, \nu] \rightarrow [1, \alpha(\nu)]$ est une bijection.

$\nu(f) = \nu_m(f) \times \alpha(\nu) \Leftrightarrow \nu \leq \nu_f$.

Polynômes-clés.

Les idéaux (trace sur \mathcal{V})

Théorème

$g_I(\nu) = \min\{\nu(f), f \in I\}$. $g_I : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est

- *croissante,*
- *localement constante hors d'un arbre fini,*
- *affine par morceau en α ,*
- *concave (au sens des arbres).*

Les idéaux (trace sur \mathcal{V})

Théorème

$g_I(\nu) = \min\{\nu(f), f \in I\}$. $g_I : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est

- *croissante,*
- *localement constante hors d'un arbre fini,*
- *affine par morceau en α ,*
- *concave (au sens des arbres).*

Les idéaux (trace sur \mathcal{V})

Théorème

$g_I(\nu) = \min\{\nu(f), f \in I\}$. $g_I : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est

- *croissante,*
- *localement constante hors d'un arbre fini,*
- *affine par morceau en α ,*
- *concave (au sens des arbres).*

Les idéaux (trace sur \mathcal{V})

Théorème

$g_I(\nu) = \min\{\nu(f), f \in I\}$. $g_I : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est

- *croissante,*
- *localement constante hors d'un arbre fini,*
- *affine par morceau en α ,*
- *concave (au sens des arbres).*

Les idéaux (trace sur \mathcal{V})

Théorème

$g_I(\nu) = \min\{\nu(f), f \in I\}$. $g_I : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est

- *croissante,*
- *localement constante hors d'un arbre fini,*
- *affine par morceau en α ,*
- *concave (au sens des arbres).*

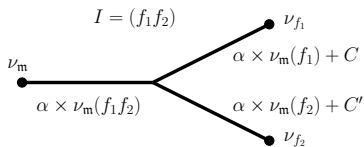
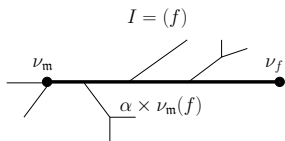
Les idéaux (trace sur \mathcal{V})

Théorème

$g_I(\nu) = \min\{\nu(f), f \in I\}$. $g_I : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est

- *croissante,*
- *localement constante hors d'un arbre fini,*
- *affine par morceau en α ,*
- *concave (au sens des arbres).*

Illustration de g_I



Preuve (première)

► le théorème

Théorème

$$e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \iff \sup_{z,s} \frac{\nu_{z,s}^K(u_I)}{s_1 + s_2} < 1 .$$

I idéal, $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ résolution, $E \subset \pi^{-1}(0)$

- $e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \iff \text{ord}_E(I) < \text{ord}_E(\text{Jac } \pi) + 1$
 $e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \iff \frac{\nu_E(I)}{A(\nu_E)} < 1$
- $A(\nu_E) = \frac{\text{ord}_E(\text{Jac } \pi) + 1}{\text{ord}_E(\pi^* m)} \rightsquigarrow$ **Finesse**

Preuve (première)

▶ le théorème I idéal, $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ résolution, $E \subset \pi^{-1}(0)$

- $e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \Leftrightarrow \text{ord}_E(I) < \text{ord}_E(\text{Jac } \pi) + 1$

- $e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \Leftrightarrow \frac{\nu_E(I)}{A(\nu_E)} < 1$

- $A(\nu_E) = \frac{\text{ord}_E(\text{Jac } \pi) + 1}{\text{ord}_E(\pi^* m)} \rightsquigarrow \text{Finesse}$

Preuve (première)

▶ le théorème I idéal, $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ résolution, $E \subset \pi^{-1}(0)$

- $e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \Leftrightarrow \text{ord}_E(I) < \text{ord}_E(\text{Jac } \pi) + 1$

$$e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \Leftrightarrow \frac{\nu_E(I)}{A(\nu_E)} < 1$$

- $A(\nu_E) = \frac{\text{ord}_E(\text{Jac } \pi) + 1}{\text{ord}_E(\pi^* m)} \rightsquigarrow$ **Finesse**

Preuve (première)

▶ le théorème I idéal, $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ résolution, $E \subset \pi^{-1}(0)$

- $e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \Leftrightarrow \text{ord}_E(I) < \text{ord}_E(\text{Jac } \pi) + 1$

$$e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \Leftrightarrow \frac{\nu_E(I)}{A(\nu_E)} < 1$$

- $A(\nu_E) = \frac{\text{ord}_E(\text{Jac } \pi) + 1}{\text{ord}_E(\pi^* m)} \rightsquigarrow \text{Finesse}$

Preuve (première)

▶ le théorème I idéal, $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ résolution, $E \subset \pi^{-1}(0)$

- $e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \Leftrightarrow \text{ord}_E(I) < \text{ord}_E(\text{Jac } \pi) + 1$

$$e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \Leftrightarrow \frac{\nu_E(I)}{A(\nu_E)} < 1$$

- $A(\nu_E) = \frac{\text{ord}_E(\text{Jac } \pi) + 1}{\text{ord}_E(\pi^* \mathfrak{m})} \rightsquigarrow \text{Finesse}$

Preuve (première)

▶ le théorème I idéal, $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ résolution, $E \subset \pi^{-1}(0)$

- $e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \Leftrightarrow \text{ord}_E(I) < \text{ord}_E(\text{Jac } \pi) + 1$

$$e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \Leftrightarrow \frac{\nu_E(I)}{A(\nu_E)} < 1$$

- $A(\nu_E) = \frac{\text{ord}_E(\text{Jac } \pi) + 1}{\text{ord}_E(\pi^* \mathfrak{m})} \rightsquigarrow$ **Finesse**

La finesse

Théorème

- $A : \mathcal{V} \rightarrow [2, +\infty]$ *s'étend continûment.*
- $\frac{dA}{d\alpha}$ *est entier et croissant.*
- $\frac{dA}{d\alpha} = 1 \Leftrightarrow \nu$ *est monomiale.*

La finesse

Théorème

- $A : \mathcal{V} \rightarrow [2, +\infty]$ *s'étend continûment.*
- $\frac{dA}{d\alpha}$ *est entier et croissant.*
- $\frac{dA}{d\alpha} = 1 \Leftrightarrow \nu$ *est monomiale.*

La finesse

Théorème

- $A : \mathcal{V} \rightarrow [2, +\infty]$ s'étend continûment.
- $\frac{dA}{d\alpha}$ est entier et croissant.
- $\frac{dA}{d\alpha} = 1 \Leftrightarrow \nu$ est monomiale.

Preuve (dernière)

► le théorème

Théorème

$$e^{-u_I} \in L^2_{\text{loc}} \iff \sup_{z,s} \frac{\nu_{z,s}^K(u_I)}{s_1 + s_2} < 1 .$$

- $e^{-u_I} \in L^2_{\text{loc}} \iff \frac{\nu_E(I)}{A(\nu_E)} < 1$
- g_I concave + A convexe $\Rightarrow \sup \frac{\nu_E(I)}{A(\nu_E)}$ atteint sur $\frac{dA}{d\alpha} = 1$.

Preuve (dernière)

▶ le théorème

- $e^{-u_I} \in L^2_{\text{loc}} \Leftrightarrow \frac{\nu_E(I)}{A(\nu_E)} < 1$
- g_I concave + A convexe $\Rightarrow \sup \frac{\nu_E(I)}{A(\nu_E)}$ atteint sur $\frac{dA}{d\alpha} = 1$.

Preuve (dernière)

▶ le théorème

- $e^{-u_I} \in L^2_{\text{loc}} \Leftrightarrow \frac{\nu_E(I)}{A(\nu_E)} < 1$
- g_I concave + A convexe $\Rightarrow \sup \frac{\nu_E(I)}{A(\nu_E)}$ atteint sur $\frac{dA}{d\alpha} = 1$.

Preuve (dernière)

▶ le théorème

- $e^{-u_I} \in L^2_{\text{loc}} \Leftrightarrow \frac{\nu_E(I)}{A(\nu_E)} < 1$
- g_I concave + A convexe $\Rightarrow \sup \frac{\nu_E(I)}{A(\nu_E)}$ atteint sur $\frac{dA}{d\alpha} = 1$.

Les fonctions psh

Definition

$$g_u(\nu) = \nu^K(u \circ \pi) \text{ avec } \pi_* \nu^K = \nu.$$

Théorème

$g_l : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante, concave pour α (au sens des arbres).

$$\Rightarrow \sup \frac{\nu(l)}{A(\nu)} < 1 \text{ atteint sur } \frac{dA}{d\alpha} = 1.$$

Les fonctions psh

Definition

$$g_u(\nu) = \nu^K(u \circ \pi) \text{ avec } \pi_* \nu^K = \nu.$$

Théorème

$g_l : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante, concave pour α (au sens des arbres).

$$\Rightarrow \sup \frac{\nu(l)}{A(\nu)} < 1 \text{ atteint sur } \frac{dA}{d\alpha} = 1.$$

Les fonctions psh

Definition

$$g_u(\nu) = \nu^K(u \circ \pi) \text{ avec } \pi_* \nu^K = \nu.$$

Théorème

$g_I : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante, concave pour α (au sens des arbres).

$$\Rightarrow \sup \frac{\nu(I)}{A(\nu)} < 1 \text{ atteint sur } \frac{dA}{d\alpha} = 1.$$

Les fonctions psh

Definition

$$g_u(\nu) = \nu^K(u \circ \pi) \text{ avec } \pi_* \nu^K = \nu.$$

Théorème

$g_l : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante, concave pour α (au sens des arbres).

$$\Rightarrow \sup \frac{\nu(l)}{A(\nu)} < 1 \text{ atteint sur } \frac{dA}{d\alpha} = 1.$$

Les fonctions psh

Definition

$$g_u(\nu) = \nu^K(u \circ \pi) \text{ avec } \pi_* \nu^K = \nu.$$

Théorème

$g_l : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante, concave pour α (au sens des arbres).

$$\Rightarrow \sup \frac{\nu(l)}{A(\nu)} < 1 \text{ atteint sur } \frac{dA}{d\alpha} = 1.$$

Les fonctions psh

Definition

$$g_u(\nu) = \nu^K(u \circ \pi) \text{ avec } \pi_* \nu^K = \nu.$$

Théorème

$g_l : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante, concave pour α (au sens des arbres).

$$\Rightarrow \sup \frac{\nu(l)}{A(\nu)} < 1 \text{ atteint sur } \frac{dA}{d\alpha} = 1.$$

Résumé de la preuve

► le théorème

Théorème

$$e^{-u} \in L_{\text{loc}}^2 \iff \sup_{z,s} \frac{\nu_{z,s}^K(u)}{s_1 + s_2} < 1 .$$

- $e^{-u_l} \in L_{\text{loc}}^2 \iff \frac{\nu(l)}{A(\nu)} < 1$.
- $\sup \nu(l)/A(\nu)$ atteint sur une valuation monomiale.
- $\tilde{c}(u) = \sup g_u/A$ atteint sur une valuation monomiale
- $\tilde{c}(u) \geq 1$: estimation directe
- $\tilde{c}(u) < 1$: approx Demailly $\tilde{c}(u_{l_n}) < 1$

Résumé de la preuve

▶ le théorème

- $e^{-u_I} \in L^2_{\text{loc}} \Leftrightarrow \frac{\nu(I)}{A(\nu)} < 1$.
- $\sup \nu(I)/A(\nu)$ atteint sur une valuation monomiale.
- $\tilde{c}(u) = \sup g_u/A$ atteint sur une valuation monomiale
- $\tilde{c}(u) \geq 1$: estimation directe
- $\tilde{c}(u) < 1$: approx Demailly $\tilde{c}(u_{I_n}) < 1$

Résumé de la preuve

▶ le théorème

- $e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \Leftrightarrow \frac{\nu(I)}{A(\nu)} < 1$.
- $\sup \nu(I)/A(\nu)$ atteint sur une valuation monomiale.
- $\tilde{c}(u) = \sup g_u/A$ atteint sur une valuation monomiale
- $\tilde{c}(u) \geq 1$: estimation directe
- $\tilde{c}(u) < 1$: approx Demailly $\tilde{c}(u_{I_n}) < 1$

Résumé de la preuve

▶ le théorème

- $e^{-u_I} \in L^2_{\text{loc}} \Leftrightarrow \frac{\nu(I)}{A(\nu)} < 1$.
- $\sup \nu(I)/A(\nu)$ atteint sur une valuation monomiale.
- $\tilde{c}(u) = \sup g_u/A$ atteint sur une valuation monomiale
- $\tilde{c}(u) \geq 1$: estimation directe
- $\tilde{c}(u) < 1$: approx Demailly $\tilde{c}(u_{I_n}) < 1$

Résumé de la preuve

▶ le théorème

- $e^{-u_I} \in L^2_{\text{loc}} \Leftrightarrow \frac{\nu(I)}{A(\nu)} < 1$.
- $\sup \nu(I)/A(\nu)$ atteint sur une valuation monomiale.
- $\tilde{c}(u) = \sup g_u/A$ atteint sur une valuation monomiale
- $\tilde{c}(u) \geq 1$: estimation directe
- $\tilde{c}(u) < 1$: approx Demailly $\tilde{c}(u_{I_n}) < 1$

Résumé de la preuve

▶ le théorème

- $e^{-u_I} \in L_{\text{loc}}^2 \Leftrightarrow \frac{\nu(I)}{A(\nu)} < 1$.
- $\sup \nu(I)/A(\nu)$ atteint sur une valuation monomiale.
- $\tilde{c}(u) = \sup g_u/A$ atteint sur une valuation monomiale
- $\tilde{c}(u) \geq 1$: estimation directe
- $\tilde{c}(u) < 1$: approx Demailly $\tilde{c}(u_{I_n}) < 1$

Difficultés $\dim \geq 3$

- $g_U(\nu_p) = \nu(u \circ \pi, p)$ est bien définie.
- \mathcal{V} est une union de plaque affine de \dim réelle $n - 1$.
- g_U concave sur chaque plaque.
- Finesse
- $\sup \frac{g_U(\nu)}{A(\nu)} < 1$ atteint?

Affaire à suivre!!!

Difficultés $\dim \geq 3$

- $g_U(\nu_p) = \nu(u \circ \pi, p)$ est bien définie.
- \mathcal{V} est une union de plaque affine de \dim réelle $n - 1$.
- g_U concave sur chaque plaque.
- Finesse
- $\sup \frac{g_U(\nu)}{A(\nu)} < 1$ atteint?

Affaire à suivre!!!

Difficultés $\dim \geq 3$

- $g_u(\nu_p) = \nu(u \circ \pi, p)$ est bien définie.
- \mathcal{V} est une union de plaque affine de \dim réelle $n - 1$.
- g_u concave sur chaque plaque.
- Finesse
- $\sup \frac{g_u(\nu)}{A(\nu)} < 1$ atteint?

Affaire à suivre!!!

Difficultés $\dim \geq 3$

- $g_u(\nu_p) = \nu(u \circ \pi, p)$ est bien définie.
- \mathcal{V} est une union de plaque affine de \dim réelle $n - 1$.
- g_u concave sur chaque plaque.
- Finesse
 - $\sup \frac{g_u(\nu)}{A(\nu)} < 1$ atteint?

Affaire à suivre!!!

Difficultés $\dim \geq 3$

- $g_u(\nu_p) = \nu(u \circ \pi, p)$ est bien définie.
- \mathcal{V} est une union de plaque affine de \dim réelle $n - 1$.
- g_u concave sur chaque plaque.
- Finesse
- $\sup \frac{g_u(\nu)}{A(\nu)} < 1$ atteint?

Affaire à suivre!!!

Difficultés $\dim \geq 3$

- $g_u(\nu_p) = \nu(u \circ \pi, p)$ est bien définie.
- \mathcal{V} est une union de plaque affine de \dim réelle $n - 1$.
- g_u concave sur chaque plaque.
- Finesse
- $\sup \frac{g_u(\nu)}{A(\nu)} < 1$ atteint?

Affaire à suivre!!!