MAT311 - 2010-2011.
ANALYSE RÉELLE ET COMPLEXE

Feuille d'exercices numéro 5

Espace de Hilbert 1

Exercices de base

Exercice 1.
Soit h une forme hermitienne sur un espace vectoriel de dimension finie H. On veut montrer qu'il existe une base dans laquelle $h(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_j y_j$

1. Montrer le résultat si $\dim(H)=1$.
2. Montrer que si H est de dimension $n\geq 1$ il existe v tel que $h(v,v)=1$. Montrer que $(\mathbb{C}v)^{\perp}=\{x\in H \mid h(x,v)=0\}$ est un espace de dimension $n-1$, et que la restriction de h à $(\mathbb{C}v)^{\perp}$ est une forme hermitienne.
3. Conclure en utilisant un raisonnement par récurrence.

Exercice 2. Soit C un convexe fermé dans un espace de Hilbert, H. Montrer que l'analogue du théorème de la projection reste vrai : pour tout x dans H il existe $u\in C$ unique tel que $\|x-u\|=d(x,C)$ et que l'on a $\Re(\langle x-u,u-v\rangle)\leq 0$ quel que soit v dans C.

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert, et $(e_n)_{n\geq 1}$ une base hilbertienne. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à termes réels positifs, telle que $\sum_0^{+\infty}|a_n|^2$ converge. Montrer que l'ensemble $\{x\in H \mid x=\sum_0^{+\infty}x_n e_n, |x_n|\leq a_n\}$ est un compact de H.

Exercice 4. Démontrer que l'espace $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est complet

Exercices plus avancés

Exercice 5. (« Frames ») Soit e_k une famille de vecteurs d'un espace de Hilbert H. On suppose dans tout cet exercice l'existence de constantes positives A,B telle que pour tout vecteur x on a

$$A\|x\|^2\leq\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2\leq B\|x\|^2$$

On dit alors que la famille (e_k) est un « frame »(ce qui se traduit par « repère »en français). On veut montrer qu'il existe une famille v_k de vecteurs telle que pour tout x on ait

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}\langle v_k,x\rangle e_k$$

On considère l'application linéaire F de H dans $\ell^2(\mathbb{N})$ donnée par

$$Fx = (\langle e_k, x\rangle)_{k\geq 1}$$

1. Vérifier que F est bien définie, continue, et que son image que l'on note V est fermée (on pourra considérer une suite convergente $(F(x_n))_{n\geq 1}$ et montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy).
   On munira V du produit hermitien induit par le produit canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$
2. Montrer que F est une bijection continue d'inverse continu de H dans V.
3. Montrer que $F^* : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow H$ adjoint de F est bien définie, que c'est une application continue de V dans H, et qu'elle est inversible, d'inverse continu.
4. Montrer que $(F^*)^{-1}x = (c_k)_{k\geq 1}$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k = x$
5. On note $\pi_k : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application de projection sur la k-ième coordonnée. Montrer que $\pi_k \circ (F^*)^{-1}$ est une forme linéaire continue, et qu'il existe donc v_k tel que $\pi_k \circ (F^*)^{-1}(x) = \langle v_k, x\rangle$. Montrer que les v_k sont les vecteurs satisfaisant l'égalité :
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v_k, x\rangle e_k$$
6. On dit qu'un « frame » est serré si $A = B = 1$. Montrer que si de plus e_k est de norme 1 pour tout k, alors le « frame » est une base Hilbertienne.
7. Donner un exemple de « frame » serré qui ne soit pas une base Hilbertienne.

Exercice 6. Soit l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$. On veut montrer que les polynômes forment un sous-espace vectoriel dense de H. Soit f un élément de H. On pose

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{zt-t^2}dt$$

1. Montrer que F est bien définie et a un développement en série entière convergeant sur $\mathbb{C}$
$$F(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{j!} \int_{\mathbb{R}} f(t)t^j e^{-t^2}dt$$
2. On suppose que f est orthogonale pour le produit hermitien de H à l'espace engendré par les polynômes. En déduire que $F \equiv 0$ et donc que $F(ix) = 0$ quel que soit x.
3. Montrer que $F(ix)$ est la transformée de Fourier de $f(t)e^{-t^2}$ et en déduire que $f = 0$.
4. Conclure.

Exercice 7. On veut montrer que si f est de classe C^1 sur $\mathbb{S}^1$, les sommes partielles de Fourier convergent uniformément vers f. On pose $D_n(t) = \sum_{p=-n}^{n} e^{ipt} = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}$

1. Soit K un sous-ensemble compact de $L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une suite a_n ne dépendant que de K, telle que si f est dans K, et notant $c_n(f)$ les coefficients de Fourier de f, on ait $|c_n(f)| \leq a_n$. On pourra raisonner par l'absurde, et considérer une suite f_n de K telle que $|\langle f_n, e_n\rangle| \geq \delta_0 > 0$ et en extraire une suite convergente.

2. Montrer que la somme partielle de Fourier $s_n(f)(s) = \sum_{j=-n}^{n} c_n(f)e^{ins}$ est donnée par $s_n(f)(s) = \int_{\mathbb{S}^1} f(t)D_n(s-t)dt = \int_{\mathbb{S}^1} f(s-t)D_n(t)dt$
3. Montrer que $f(s) - s_n(f)(s)$ est donnée par $\int_{\mathbb{S}^1} \frac{f(s)-f(s-t)}{\sin(t/2)} \sin((n+1/2)t)dt$ et que ceci s'écrit comme somme de deux coefficients de Fourier de $\frac{f(s)-f(s-t)}{\sin(t/2)} = g_s(t)$
4. Montrer que si f est de classe C^1, $s \longrightarrow g_s$ est continue à valeurs dans C^0 et donc continue comme application à valeurs dans L^2.
5. Conclure

Exercice 8. Soit l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$. On considère les polynômes de Hermite $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ et les fonctions de Hermite $\psi_n(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} H_n(x)$.

1. Montrer que H_n est un polynôme de degré n et qu'il est orthogonal (pour le produit hermitien de H) à l'espace engendré par les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.
2. Montrer que $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ et que $\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$
3. Montrer que $(\frac{d}{dx} + x)\psi_n(x) = 2n\psi_{n-1}$ et que $(-\frac{d}{dx} + x)\psi_n = \psi_{n+1}$
4. Montrer enfin que $(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2)\psi_n(x) = (2n+1)\psi_n(x)$
5. Montrer que ψ_n est une fonction propre pour la transformée de Fourier (on pourra utiliser l'équation différentielle satisfaite par $\widehat{\psi_n}$).

Exercice 9. Soit H un espace de Hilbert. On veut montrer que si la suite $(x_k)_{k\geq 1}$ converge faiblement dans H, alors elle est bornée. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une suite $x_k \rightharpoonup \bar{x}$ telle que x_k tend vers l'infini. Quitte à soustraire $\bar{x}$, on peut même se limiter au cas où $x_k \rightharpoonup 0$ et $|x_k|$ tend vers l'infini ce qu'on suppose dans la suite.

1. On veut construire par récurrence une base Hilbertienne (éventuellement d'un sous-espace de H) $(e_k)_{k\geq 1}$ vérifiant la condition suivante : pour tout N il existe $k(N) > k(N-1)$ tel que $|\langle x_{k(N)}, e_N\rangle| > C_N$ où $\lim_N C_N = +\infty$.
   Supposons la base construite jusqu'au N-ième terme et construisons là au terme suivant. Soit $F_N =< e_1, ..., e_N >$. Comme le produit scalaire des x_k avec $e_1, ..., e_N$ tend vers 0, la projection de x_k sur $F_N^\perp$ pour k assez grand sera de norme supérieure à $N+1$. Soit $C_{N+1}e_{N+1}$ la projection d'un tel x_k, que nous notons $x_{k(N)}$, où e_{N+1} est de norme 1 et $C_{N+1} > N+1$.
2. Montrer que $z = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{C_N} e_N$ est convergente dans H et que $\langle z, x_k\rangle$ ne tend pas vers 0.
3. Conclure.

Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Banach-Steinhaus, qui affirme que si L_n est une suite d'applications linéaires continues entre espaces de Banach, soit elle est uniformément bornée, c'est-à-dire qu'il existe C tel que $\|L_n\| \leq C$, soit il existe x tel que $\|L_n x\| \longrightarrow +\infty$.