MAT431 — Promotion 2005
Travail personnel
A remettre en petite classe le mardi 10 octobre 2006

Exercice 1

1) Soient Ω ouvert non vide de $\mathbf{R}^D$ et $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On suppose que $\langle S, \phi \rangle = 0$ pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ vérifiant $\langle T, \phi \rangle = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $S = \lambda T$.
2) On suppose que $D = 1$ et que Ω est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$. Déduire du 1) que toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant $T' = 0$ est une fonction constante sur Ω.

Exercice 2

On considère l'équation

$$\partial_t u + \partial_x(\tfrac{1}{2}u^2) = 0\,, \tag{1}$$

d'inconnue la fonction $u : (t, x) \mapsto u(t, x) \in \mathbf{R}$.
1) A quelle condition portant sur u_+, u_- et $s \in \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$u(t, x) = u_- \mathbf{1}_{x<st} + u_+ \mathbf{1}_{x \geq st}\,, \quad (t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$$

est-t-elle solution de l'équation (1) dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R})$?
2) Montrer qu'il existe une infinité de fonctions u de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ vérifiant l'équation (1) au sens des distributions sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ ainsi que la condition initiale

$$\lim_{t \to 0^+} u(t, x) = -1 \text{ si } x < 0\,, \quad \lim_{t \to 0^+} u(t, x) = 1 \text{ si } x > 0\,.$$

Problème

Pour tout $\lambda > 0$, on note $m_\lambda : x \mapsto \lambda x$. Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^D)$ ou $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^D \setminus \{0\})$ et tout $\lambda > 0$, on note T_λ la distribution $T_\lambda = T \circ m_\lambda$. On dit que la distribution T est homogène de degré α si $T \neq 0$ et $T_\lambda = \lambda^\alpha T$ pour tout $\lambda > 0$.
1) Montrer que δ_0 est une distribution homogène dans $\mathbf{R}^D$, que la distribution $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est homogène dans $\mathbf{R}$, et donner leurs degrés d'homogénéité.
2) On suppose que $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^D)$ ou $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^D \setminus \{0\})$ est une distribution homogène de degré α. Montrer que $\partial_{x_i} T$ est aussi une distribution homogène pour tout $1 \leq i \leq D$, et préciser son degré d'homogénéité.
3) Montrer que des distributions homogènes de degrés distincts sont linéairement indépendantes.
4) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^D)$ homogène de degré α. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{D} \partial_{x_k}(x_k T) = (D + \alpha) T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^D)\,.$$

(On pourra calculer $\frac{d}{dt}\phi(tx)$ pour $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^D)$).

5) Sur $\mathbf{R}$, quelles sont les distributions homogènes de degré 0? de degré -1?
Soit $A \in C(\mathbf{R}^D \setminus \{0\})$ non identiquement nulle et homogène de degré 0.
6) Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ et tout $x \in \mathbf{R}^D$ tel que $x \neq 0$, on pose $F_\alpha(x) = \frac{A(x)}{\|x\|^\alpha}$.
a) Montrer que, pour tout $\alpha < D$, la fonction F_α est localement intégrable sur $\mathbf{R}^D$.

Dans la suite, on notera encore F_α l'élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^D)$ défini par la fonction localement intégrable F_α.
b) Montrer que F_α est une distribution homogène sur $\mathbf{R}^D$; quel est son degré d'homogénéité?
7) Calculer

$$\sum_{k=1}^{D} \partial_{x_k}(x_k F_D) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^D)\,.$$

8) a) La fonction F_D appartient-elle à $L^1_{loc}(\mathbf{R}^D)$?
b) A quelle condition portant sur A la fonction F_D se définit-elle une distribution homogène de degré $-D$ sur $\mathbf{R}^D$ tout entier?
c) A quoi ce résultat correspond-il dans le cas $D = 1$?