MAT431 — PROMOTION 2007

A remettre en petite classe le mardi 6 janvier 2009

On sait construire des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ qui ne sont dérivables en aucun point de $\mathbf{R}$. Une telle fonction étant localement intégrable puisque continue, elle possède toutefois une dérivée au sens des distributions. On va étudier ici, à la fois du point de vue classique et par le calcul des distributions un exemple proposé par Weierstrass de fonction continue sur $\mathbf{R}$ mais nulle part dérivable.

I

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par la série

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \cos(2^n \cdot 2\pi x) .$$

1) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

Pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on pose $u_n(x) = \sin(2^n \cdot 2\pi x)$.

2) a) Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$; montrer que

$$\int_{\mathbf{R}} u_n(x)\phi(x)dx = O(2^{-n}) \qquad \text{pour } n \to +\infty .$$

2) b) En déduire que la suite

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} u_n$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ vers une distribution que l'on notera

$$\sum_{n \geq 0} u_n .$$

2) c) Calculer la dérivée au sens des distributions de f.

II

Dans la suite de ce problème, on notera

$$D_N(x) = \sum_{|k| \leq N} e^{i2\pi kx} , \qquad \text{et } F_N(x) = \sum_{|k| \leq N} (1 - \tfrac{|k|}{N+1}) e^{i2\pi kx} .$$

3) Montrer que la suite double de distributions

$$\sum_{-m \leq k \leq n} \delta_k$$

indexée par $m, n \geq 0$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ lorsque (m, n) tend vers l'infini, vers une distribution sur $\mathbf{R}$ notée

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_k .$$

4) a) Montrer que, pour tout $N \geq 0$ et tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$,

$$D_N(x) = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} .$$

b) Montrer que la suite D_N converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, lorsque $N \to +\infty$, vers une limite que l'on calculera.

5) a) Montrer que

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x)\,, \quad x \in \mathbf{R}\,,\ N \geq 0\,.$$

5) b) En déduire que, pour tout $N \geq 0$ et tout $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$, l'on a

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2\,.$$

5 c) Montrer que la suite F_N converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, lorsque $N \to +\infty$, vers une limite que l'on calculera.

On notera dans ce qui suit

$$Q_N = \int_{-1/2}^{1/2} F_N(x)^2 dx\,.$$

6) a) Montrer que, pour tout $N \geq 0$ et tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\setminus\{0\}$, l'on a

$$F_N(x) \leq \frac{4}{(N+1)x^2}\,.$$

6) b) Montrer que, pour tout $N \geq 0$, l'on a

$$Q_N \geq \tfrac{1}{4}(N+1)\,.$$

III

Soient $g \in C(\mathbf{R})$, un entier $N \geq 1$ et $k_0 \in \mathbf{Z}$. On suppose que

$$g(x) = O(x) \text{ lorsque } x \to 0\,,$$

et que

$$\mathcal{F}(g\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]})(2\pi k) = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } 1 \leq |k-k_0| \leq N\,.$$

6) Montrer que

$$\mathcal{F}(g\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]})(2\pi k_0) = \frac{1}{Q_N}\int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi k_0 x} g(x) F_N(x)^2 dx\,.$$

7) a) Montrer que

$$\frac{1}{Q_N}\left|\int_{|x|\leq 1/N} e^{i2\pi k_0 x} g(x) F_N(x)^2 dx\right| \leq \frac{C_1}{N}\sup_{|x|\leq 1/N}\frac{|g(x)|}{|x|}\,,$$

où C_1 est une constante positive que l'on estimera.

7) b) Montrer que

$$\frac{1}{Q_N}\left|\int_{1/N\leq|x|\leq 1/N^{1/4}} e^{i2\pi k_0 x} g(x) F_N(x)^2 dx\right| \leq \frac{C_2}{N}\sup_{|x|\leq 1/N^{1/4}}\frac{|g(x)|}{|x|}\,,$$

où C_2 est une constante positive que l'on estimera.

7) c) Montrer que

$$\frac{1}{Q_N}\left|\int_{1/N^{1/4}\leq|x|\leq 1/2} e^{i2\pi k_0 x} g(x) F_N(x)^2 dx\right| \leq \frac{C_3}{N^2}\int_{-1/2}^{1/2}|g(x)|dx$$

où C_3 est une constante positive que l'on estimera.

7) d) Déduire de ce qui précède que

$$|\mathcal{F}(g\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]})(2\pi k_0)| \leq \frac{C}{N} \sup_{|x|\leq 1/N^{1/4}} \frac{|g(x)|}{|x|} + \frac{C'}{N^2}\int_{-1/2}^{1/2} |g(x)|dx$$

où C et C' sont deux constantes positives que l'on demande d'estimer.

IV

On considère à nouveau la fonction f du I, ainsi que $x_0 \in \mathbf{R}$ quelconque.

8) a) On suppose que f est dérivable au point x_0, et on pose

$$g(x) = f(x_0 + x) - f(x_0)\cos(x) - f'(x_0)\sin(x)\,.$$

Calculer

$$\mathcal{F}(g\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]})(2\pi \cdot 2^n)\,, \qquad \text{pour tout } n \geq 1\,.$$

8) b) Déduire du 7) d) que

$$\mathcal{F}(g\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]})(2\pi \cdot 2^n) = o(2^{-n})$$

lorsque $n \to +\infty$.

9) Déduire de tout ce qui précède que f n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$.