MAT431 — Promotion 2008

A remettre en petite classe le mardi 12 janvier

Exercice

Soit $h \in \mathbf{R}^*$; on considère, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la distribution sur $\mathbf{R}$ définie par

$$T_n = \delta_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} \delta_0^{(k)} .$$

1) Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le support de T_n.
2) Soit $(S_n)_{n \geq 1}$ suite d'éléments de $\mathcal{E}'(\mathbf{R})$ convergeant au sens des distributions vers S. Supposons qu'il existe un compact $K \subset \mathbf{R}$ tel que $\mathrm{supp}(S_n) \subset K$ pour tout $n \geq 1$. Que peut-on dire de $\mathrm{supp}(S)$?
3) Soit ϕ une fonction holomorphe sur le disque

$$D(0, R) = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| < R\}$$

où $R > |h|$. La suite $\langle T_n, \phi\big|_{\mathbf{R}} \rangle$ admet-elle une limite pour $n \to +\infty$? Si oui, laquelle?
4) La suite $(T_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente au sens des distributions?

Problème

En 1860, Maxwell propose une formule donnant la densité de probabilité pour les vecteurs vitesses de molécules de gaz parfait monoatomique à l'équilibre thermodynamique dans un container, en supposant que les molécules rebondissent de façon élastique sur la paroi du container. Notons $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3$ la variable de vitesse des molécules de gaz, et F la densité de probabilité du nombre de molécules dans l'espace $\mathbf{R}^3$ des vitesses. Autrement dit, $F \in L^1(\mathbf{R}^3)$ et vérifie

$$(0.1) \qquad F(v) \geq 0 \text{ p.p. en } v \in \mathbf{R}^3 , \quad \text{ et } \int_{\mathbf{R}^3} F(v) dv = 1 .$$

La signification physique de F est la suivante: si N est le nombre total de molécules de gaz dans le container, et si A est une partie mesurable de $\mathbf{R}^3$, le nombre total de molécules dont les vitesses appartiennent à A vaut

$$N \int_A F(v) dv .$$

L'argument de Maxwell est le suivant: soit f, la fonction mesurable définie p.p. sur $\mathbf{R}$ par la formule

$$(0.2) \qquad f(v_1) = \iint_{\mathbf{R}^2} F(v_1, v_2, v_3) dv_2 dv_3 .$$

Maxwell établit alors, à partir de considérations physiques, que

$$(0.3) \qquad F(v_1, v_2, v_3) = f(v_1) f(v_2) f(v_3)$$

et qu'il existe une fonction mesurable Φ définie p.p. sur $\mathbf{R}_+$ t.q.

(0.4) $\quad F(v_1, v_2, v_3) = \Phi(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$ p.p. en $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3$.

Il déduit alors des conditions (0.3-0.4) que F est de la forme

$$F_T(v) = \frac{1}{(2\pi T)^{3/2}} e^{-\frac{v_1^2+v_2^2+v_3^2}{2T}} \tag{0.5}$$

où $T > 0$ est proportionnelle à la température absolue du gaz dans le container.

Le but de ce problème est d'arriver à une démonstration rigoureuse de la conclusion de Maxwell en s'appuyant sur les seules hypothèses (0.1-0.2-0.3-0.4), et en utilisant le calcul des distributions.

1) Montrer que $f \in L^1(\mathbf{R})$, que $f(v_1) \geq 0$ p.p. en $v_1 \in \mathbf{R}$, et calculer $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(v_1)dv_1$.

2) Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on note $\mathcal{R}[\theta]$ la rotation d'angle θ dans $\mathbf{R}^2$. Montrer que $(f \otimes f) \circ \mathcal{R}[\theta] = f \otimes f$.

3) Soit $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ telle que $U \circ \mathcal{R}[\theta] = U$ pour tout $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2})U = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)\,.$$

4) Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$. Calculer la distribution $Af' + Bv_1 f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, où

$$A = \int_{\mathbf{R}} v_2 f(v_2)\psi(v_2)dv_2\,, \qquad \text{et } B = \int_{\mathbf{R}} f(v_2)\psi'(v_2)dv_2\,.$$

5) Quelles sont les distributions $V \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telles que $V' = 0$?

6) Déduire de ce qui précède que f est de la forme

$$f(v_1) = Ce^{-Dv_1^2} \text{ p.p. en } v_1 \in \mathbf{R}\,,$$

où C et D sont deux réels strictement positifs, et préciser la relation existant entre C et D.

7) Etablir la formule de Maxwell (0.5).

8) Montrer que, lorsque $T \to 0^+$, la famille de fonctions F_T définie par la formule (0.5) converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$ vers une limite que l'on calculera. Pouvez-vous proposer une interprétation physique de ce résultat?

9) Trouver toutes les distributions $W \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telles que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, l'on ait

$$(W \otimes W) \circ \mathcal{R}[\theta] = W \otimes W\,.$$

10) Quels commentaires vous inspire la comparaison des résultats des questions 6) et 9)?