MAT431 — Promotion 2010

A remettre en petite classe le mardi 3 janvier

I

1) Soit Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$, et soit T une distribution à support compact $K \subset \Omega$. Soit $\phi \in C^\infty(\Omega)$, et soit $(\phi_n)_{n\geq 1}$, une suite d'éléments de $C^\infty(\Omega)$. On suppose qu'il existe un voisinage V de K dans Ω tel que

$$(H) \qquad \partial^\alpha \phi_n \to \partial^\alpha \phi \quad \text{uniformément sur } V \text{ pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^N$$

lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $\langle T, \phi_n \rangle \to \langle T, \phi \rangle$ lorsque $n \to +\infty$.

2) Pour tout $m \geq 1$, on considère la distribution

$$T_m = \sum_{k=1}^{m} \delta_{1/k} - m\delta_0 + (\ln m)\delta'_0 \,.$$

Montrer que, lorsque $m \to +\infty$, la suite T_m converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ vers une distribution T.

3) Quels sont les supports de T_m pour $m \geq 1$ et de T?

4) Calculer les ordres de T_m pour $m \geq 1$ et de T.

5) Soit $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$, nulle sur $\mathrm{supp}(T)$. A-t-on $\langle T, \phi \rangle = 0$?

6) Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\phi_n \in C^\infty(\mathbf{R})$, croissante sur $\mathbf{R}$ et satisfaisant aux conditions suivantes:

$$\begin{cases} \phi_n(x) = 0 & \text{pour tout } x \in \left]-\infty, \dfrac{1}{n+1}\right] \,, \\[2ex] \phi_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} & \text{pour tout } x \in \left[\dfrac{1}{n}, +\infty\right[\,. \end{cases}$$

Montrer que $\phi_n \to 0$ uniformément sur $\mathbf{R}$ lorsque $n \to +\infty$, et que $\phi_n^{(\alpha)} \to 0$ uniformément sur $\mathrm{supp}(T)$ pour tout entier $\alpha \geq 1$.

7) Calculer $\langle T, \phi_n \rangle$.

8) Quel énoncé l'exemple ci-dessus vous permet-il de réfuter?

II

On rappelle la formule

$$\int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,, \quad x, y > 0\,.$$

Pour tout $\alpha > -1$, on pose

$$Y_\alpha(x) := \frac{x_+^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,, \qquad \text{où } x_+^\alpha := \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0\,, \\ 0 & \text{si } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Pour $\alpha > -1$, la fonction Y_α est localement intégrable sur $\mathbf{R}$; pour tout entier $m \geq 1$ et tout $\alpha \in [-m, -m+1[$, on définit $Y_{-m+\alpha}$ comme distribution sur $\mathbf{R}$ par la formule $Y_{-m+\alpha} := Y_\alpha^{(m)}$.

Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ telle que $Y_{-1-\alpha} \star T = 0$.

1) Montrer que, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, l'on a $\langle Y_{-\alpha} \star T, \phi' \rangle = 0$.
2) Montrer que $\langle Y_{-\alpha} \star T, \phi' \rangle = 0$ pour tout $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ à support dans un intervalle de la forme $]-\infty, L]$ avec $L \in \mathbf{R}$.
3) Calculer, pour $\alpha \in]0,1[$, le produit de convolution $Y_{-\alpha} \star Y_{-1+\alpha}$. (On précisera le sens des différents objets mathématiques mis en jeu.)
4) Pour tout $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, on note $\tilde{S} := S \circ (-Id_{\mathbf{R}})$. Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ à support dans un intervalle de la forme $]-\infty, L]$ avec $L \in \mathbf{R}$ telle que $\tilde{Y}_{-\alpha} \star \phi' = \psi'$.
5) Déduire de ce qui précède que $T = 0$.
6) Sachant que la convolution par $Y_{-1-\alpha}$ définit une puissance fractionnaire de la dérivation, quel énoncé ce résultat généralise-t-il?