Distributions, analyse de Fourier, EDP
Amphi no. 2

Fonctions plateau

Lemme: Soient Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$ et K compact inclus dans Ω. Il existe une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\boxed{0 \leq \phi \leq 1\,, \quad \text{supp}(\phi) \text{ compact } \subset \Omega\,, \quad \text{et } \phi = 1 \text{ au voisinage de } K}$$

Application: densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$

Thm: Soient Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$ et $f \in L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p < \infty$.

$$\boxed{\text{Pour tout } \eta > 0, \text{ il existe } f_\eta \in C_c^\infty(\Omega) \text{ t.q. } \|f - f_\eta\|_{L^p(\Omega)} < \eta}$$

Pour la démonstration, cf. polycopié, pp. 26–27.

Partitions de l'unité

Thm: Soient $K \subset \mathbf{R}^N$ compact et $\Omega_1, \ldots, \Omega_n \subset \mathbf{R}^N$ ouverts t.q.

$$\boxed{K \subset \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_j \,.}$$

Alors il existe $\phi_1 \in C_c^\infty(\Omega_1), \ldots, \phi_n \in C_c^\infty(\Omega_n)$ t.q.

$$\boxed{0 \leq \phi_j \,, \quad \text{et} \sum_{1 \leq j \leq n} \phi_j = 1 \text{ sur un voisinage de } K}$$

•Les fonctions plateau servent à localiser sans dégrader la régularité (jusqu'au niveau C^∞)
•Les partitions de l'unité servent à passer du local au global en gardant la régularité des objets locaux

Programme des 2 prochains amphis

•Définition des distributions — une généralisation de la notion de fonction

•Opérations élémentaires sur les distributions (dérivation. . .)

•Convergence des suites de distributions

DEFINITION DES DISTRIBUTIONS

Notion de distribution

Une distribution T sur Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$ est une forme linéaire sur $C_c^\infty(\Omega)$, continue au sens suivant:

pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbf{N}$ tq.

$$\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)\,,\ \operatorname{supp} \phi \subset K \Rightarrow |\langle T, \phi \rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq p_K} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

Lorsque p_K peut être choisi indépendamment de K, on dit que T est une distribution d'ordre $\leq p$ dans Ω.

•Ordre de T= le plus petit entier $p \geq 0$ t.q. T soit d'ordre $\leq p$

•**Notation:** $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace vectoriel des distributions sur Ω

Examples de distributions

Exemple 1: toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, définit une distribution sur Ω en posant

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$$

La distribution T_f est d'ordre 0

Prop:

L'application linéaire $f \mapsto T_f$ de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est injective (et non surjective...)

•On identifiera donc la FONCTION f à la DISTRIBUTION T_f

Exemple 2: la masse de Dirac en $x_0 \in \Omega$ ouvert de $\mathbf{R}^N$, définie par

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0)$$

est une distribution d'ordre 0 dans Ω

Exemple 3: distributions positives

Def: Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite positive ($T \geq 0$) si on a

$$\boxed{\langle T, \phi \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ t.q. } \phi \geq 0 \text{ sur } \Omega}$$

La masse de Dirac δ_{x_0} est une distribution positive sur $\mathbf{R}^N$

Thm: Toute distribution positive sur un ouvert de $\mathbf{R}^N$ est d'ordre 0.

Exemple 4: la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'appartient pas à $L^1_{loc}(\mathbf{R})$. Mais on définit la distribution valeur principale de $\frac{1}{x}$ par la formule

$$\left\langle vp\frac{1}{x}, \phi \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx$$

qui est une distribution d'ordre 1 sur $\mathbf{R}$

Le caractère impair de $\frac{1}{x}$ joue ici un rôle essentiel

Suites convergentes dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Une suite (T_n) de distributions sur Ω converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, ce que l'on note

$$\boxed{T_n \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ si } \langle T_n, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle \text{ pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega)}$$

Exemple 1: soit (f_n), suite de fonctions mesurables sur Ω vérifiant

$$f_n \geq 0 \text{ pp. sur } \Omega\,, \; \mathrm{supp}(f_n) \subset \overline{B(x_0, r_n)} \subset \Omega\,, \; \text{et } \int_\Omega f_n(x)dx \to 1$$

Alors, si $r_n \to 0$, on a $f_n \to \delta_{x_0}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemple 2: par définition $\frac{\mathbf{1}_{|x|\geq 1/n}}{x} \to vp\frac{1}{x}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ pour $n \to \infty$

OPERATONS SUR LES DISTRIBUTIONS

Soient Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$;

$$\boxed{\text{on définit } S = \partial_{x_i} T \text{ par } \langle S, \phi \rangle = -\langle T, \partial_{x_i} \phi \rangle\,, \quad i = 1, \ldots, N}$$

On vérifie sans peine que $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Exemple 1: soit $f \in C^1(\Omega)$; en intégrant par parties, on voit que

$$\boxed{\partial_{x_i} T_f = T_{\partial_{x_i} f}\,, \qquad i = 1, \ldots, N}$$

Autrement dit, la dérivation au sens des distributions coïncide avec la dérivation usuelle pour les fonctions de classe C^1

Exemple 2: Fonction de Heaviside $H = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$ (indicatrice de $\mathbf{R}_+$) c.a.d.

$$H(x) = 1 \text{ si } x \geq 0\,, \qquad H(x) = 0 \text{ si } x < 0$$

Alors

$$\boxed{H' = \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R})}$$

Exemple 3: On a

$$\boxed{(\ln|x|)' = vp\frac{1}{x} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R})}$$

Lemme (Symétrie des dérivées secondes) Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\partial_{x_i}\left(\partial_{x_j} T\right) = \partial_{x_j}\left(\partial_{x_i} T\right), \qquad i, j = 1, \ldots, N$$

On définit par récurrence les **dérivées partielles successives de** T

Déf: pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la distribution $\partial^\alpha T$ est donnée par

$$\langle \partial^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Exemple 4: Pour tout entier positif m

$$\partial^m \delta_{x_0} = \delta_{x_0}^{(m)} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}), \quad \text{où } \langle \delta_{x_0}^{(m)}, \phi \rangle := (-1)^m \phi^{(m)}(x_0)$$

On vérifie sans peine que $\delta_{x_0}^{(m)}$ est une distribution d'ordre m sur $\mathbf{R}$

Continuité de la dérivation

Pour tout multi-indice α, lorsque $n \to \infty$

$$\boxed{T_n \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow \partial^\alpha T_n \to \partial^\alpha T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)}$$

Exemple 5: En particulier, si $f_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ pour tout $n \geq 1$, alors

$$\boxed{f_n \to f \text{ dans } L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow \partial^\alpha T_{f_n} \to \partial^\alpha T_f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)}$$

Exemple 6: Soit $f^{in} \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$; posons $f(t,x) = f^{in}(x - tv)$ p.p. en $(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$. On vérifie que

$$\boxed{\partial_t f + \sum_{i=1}^N v_i \partial_{x_i} f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)}$$

<u>Dém:</u> Régulariser f^{in}, applique la méthode des caractéristiques, puis passer à la limite au sens des distributions

Produit par une fonction C^∞

Déf: pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi \in C^\infty(\Omega)$

on définit la distribution $S = \psi T$ par $\langle S, \phi \rangle = \langle T, \psi\phi \rangle$

Il faut vérifier la continuité de S: or, d'après la formule de Leibnitz

$$\max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha (\psi\phi)(x)| \leq M_{p,K,\psi} \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

$$\text{avec } M_{p,K,\psi} = 2^p \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|$$

Exemple: soient $x_0 \in \Omega$ et $\psi \in C^\infty(\Omega)$; alors

$$\psi\delta_{x_0} = \psi(x_0)\delta_{x_0}$$

Exercice: résoudre l'équation $xT = 1$ d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$

Continuité du produit par une fonction C^∞: soient $\psi \in C^\infty(\Omega)$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ suite de distributions sur Ω

$$\boxed{T_n \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \ \Rightarrow \psi T_n \to \psi T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)}$$

Formule de Leibnitz: soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a \in C^\infty(\Omega)$; pour tout multi-indice α, on a

$$\boxed{\partial^\alpha(aT) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} a)\partial^\beta T}$$

<u>Exercice:</u> pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$, tout $m \in \mathbf{N}$ et tout $a \in C^\infty(\mathbf{R})$, exprimer $a\delta_{x_0}^{(m)}$ comme combinaison linéaire de $\delta_{x_0}, \delta'_{x_0}, \ldots, \delta_{x_0}^{(m)}$

Restriction: Soient $\omega \subset \Omega$ deux ouverts de $\mathbf{R}^N$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La restriction de T à ω est $T\big|_\omega \in \mathcal{D}'(\omega)$ définie par

$$\left\langle T\big|_\omega, \phi \right\rangle = \langle T, \tilde{\phi} \rangle\,, \quad \text{où } \tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{si } x \notin \omega \end{cases}$$

Principe de recollement: Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ famille d'ouverts de $\mathbf{R}^N$ et soient $T_i \in \mathcal{D}'(\omega_i)$ pour tout $i \in I$. Alors

$$T_i\big|_{\omega_i\cap\omega_j} = T_j\big|_{\omega_i\cap\omega_j} \text{ dès que } \omega_i \cap \omega_j \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{il existe une unique distribution } T \in \mathcal{D}'\left(\bigcup_{i\in I} \omega_i\right) \text{ t.q. } T_i = T\big|_{\omega_i}$$

Méthode: recoller les distributions T_i par partitions de l'unité

Changement de variables dans les distributions (pp. 81–83)

Soient Ω_1, Ω_2 ouverts de $\mathbf{R}^N$, et $\chi : \Omega_1 \to \Omega_2$ un C^∞-difféomorphisme. A tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega_1)$, on associe $\chi_*(\phi) \in C_c^\infty(\Omega_2)$ donnée par

$$\boxed{\chi_*(\phi) : y \mapsto \phi(\chi^{-1}(y))|\det D\chi(\chi^{-1}(y))|^{-1}}$$

Déf: Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, on définit la distribution composée $T \circ \chi \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ par

$$\boxed{\langle T \circ \chi, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_1), C_c^\infty(\Omega_1)} = \langle T, \chi_*(\phi) \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_2), C_c^\infty(\Omega_2)}}$$

Exemples:

1) pour toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega_2)$, on a

$$(T_f) \circ \chi = T_{f \circ \chi} \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$$

2) en posant $x_0 = \chi^{-1}(y_0)$, on a

$$\delta_{y_0} \circ \chi = |\det D\chi(x_0)|^{-1} \delta_{x_0} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$$

3) en particulier, pour $\lambda > 0$, notons $M_\lambda : x \mapsto \lambda x$; alors

$$\delta_0 \circ M_\lambda = \lambda^{-N} \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$$

Dérivation/Intégration sous le crochet de dualité

Prop. (p. 83): Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert, une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et une fonction $\phi \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^n_y)$ à support dans $K \times \mathbf{R}^n$, où K est un compact $\subset \Omega$. Alors la fonction $y \mapsto \langle T, \phi(\cdot, y)\rangle$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$ et vérifie

$$\boxed{\partial_y^\alpha \langle T, \phi(\cdot, y)\rangle = \langle T, \partial_y^\alpha \phi(\cdot, y)\rangle\,, \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}^n\,,\ \forall y \in \mathbf{R}^n}$$

Prop. (p. 85): Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert, une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et une fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^n_y)$. Alors

$$\boxed{\int_{\mathbf{R}^n} \langle T, \phi(\cdot, y)\rangle dy = \left\langle T, \int_{\mathbf{R}^n} \phi(\cdot, y) dy \right\rangle}$$

Produit de distributions (pp. 86–87)

En général, il n'est PAS POSSIBLE de définir le produit de deux distributions

$$\delta_{x_1}\delta_{x_2} = 0 \text{ si } x_1 \neq x_2\,, \qquad \delta_{x_0}^2 = ???$$

Il n'est même pas possible, en général, de définir le produit d'une distribution par une fonction qui ne serait pas de classe C^∞

$$\delta_0 = H' = (H^2)' = 2H\delta_0 = (H^3)' = 3H^2\delta_0 = 3H\delta_0$$

ce qui entraînerait que $2 = 3\ldots$

Distributions/Fonctions: dictionnaire	
Crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$	Intégrale $\int$
Distribution T_f	Fonction f
Dérivation	Intégration par parties
Dérivation sous le crochet	Dérivation sous le signe $\int$
Intégration sous le crochet	Thm. de Fubini

Stratégie pour définir des opérations linéaires sur $\mathcal{D}'$

1) Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert et $A : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ linéaire continue, sa transposée est l'application linéaire continue $A^* : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ (rappel: $L^\infty(\Omega) =$ dual topologique de $L^1(\Omega)$) définie par

$$\int_\Omega Af(x)\phi(x)dx = \int_\Omega f(x)A^*\phi(x)dx$$

2) Si $A^*(C_c^\infty(\Omega)) \subset C_c^\infty(\Omega)$, tenter de prolonger A à $\mathcal{D}'(\Omega)$ en posant

$$\langle AT, \phi\rangle = \langle T, A^*\phi\rangle$$

c'est à dire tenter de prolonger A par $\left(A^*\big|_{C_c^\infty(\Omega)}\right)^*$

Pbm: la forme linéaire AT ainsi définie vérifie-t-elle la propriété de continuité des distributions sur Ω?