# Distributions, analyse de Fourier, EDP
# Amphi no. 3

# Continuité de la dérivation

Pour tout multi-indice $\alpha$, lorsque $n \to \infty$

$$\boxed{T_n \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow \partial^\alpha T_n \to \partial^\alpha T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)}$$

**Exemple 5:** En particulier, si $f_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ pour tout $n \geq 1$, alors

$$\boxed{f_n \to f \text{ dans } L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow \partial^\alpha T_{f_n} \to \partial^\alpha T_f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)}$$

**Exemple 6:** Soit $f^{in} \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$; posons $f(t,x) = f^{in}(x - tv)$ p.p. en $(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$. On vérifie que

$$\boxed{\partial_t f + \sum_{i=1}^{N} v_i \partial_{x_i} f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)}$$

<u>Dém:</u> Régulariser $f^{in}$, applique la méthode des caractéristiques, puis passer à la limite au sens des distributions

# Produit par une fonction $C^\infty$

**Déf:** pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi \in C^\infty(\Omega)$

on définit la distribution $S = \psi T$ par $\langle S, \phi \rangle = \langle T, \psi\phi \rangle$

Il faut vérifier la continuité de $S$: or, d'après la formule de Leibnitz

$$\max_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha(\psi\phi)(x)| \leq M_{p,K,\psi} \max_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

$$\text{avec } M_{p,K,\psi} = 2^p \max_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \psi(x)|$$

**Exemple:** soient $x_0 \in \Omega$ et $\psi \in C^\infty(\Omega)$; alors

$$\psi\delta_{x_0} = \psi(x_0)\delta_{x_0}$$

<u>Exercice:</u> résoudre l'équation $xT = 1$ d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$

**Continuité du produit par une fonction** $C^\infty$**:** soient $\psi \in C^\infty(\Omega)$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ suite de distributions sur $\Omega$

$$\boxed{T_n \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \ \Rightarrow \psi T_n \to \psi T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)}$$

**Formule de Leibnitz:** soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a \in C^\infty(\Omega)$; pour tout multi-indice $\alpha$, on a

$$\boxed{\partial^\alpha(aT) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} a)\partial^\beta T}$$

Exercice: pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$, tout $m \in \mathbf{N}$ et tout $a \in C^\infty(\mathbf{R})$, exprimer $a\delta_{x_0}^{(m)}$ comme combinaison linéaire de $\delta_{x_0}, \delta'_{x_0}, \ldots, \delta_{x_0}^{(m)}$

**Restriction:** Soient $\omega \subset \Omega$ deux ouverts de $\mathbf{R}^N$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La restriction de $T$ à $\omega$ est $T\big|_\omega \in \mathcal{D}'(\omega)$ définie par

$$\left\langle T\big|_\omega, \phi \right\rangle = \langle T, \tilde{\phi} \rangle \,, \qquad \text{où } \tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{si } x \notin \omega \end{cases}$$

**Principe de recollement:** Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ famille d'ouverts de $\mathbf{R}^N$ et soient $T_i \in \mathcal{D}'(\omega_i)$ pour tout $i \in I$. Alors

$$T_i\big|_{\omega_i \cap \omega_j} = T_j\big|_{\omega_i \cap \omega_j} \text{ dès que } \omega_i \cap \omega_j \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{il existe une unique distribution } T \in \mathcal{D}'\left(\bigcup_{i \in I} \omega_i\right) \text{ t.q. } T_i = T\big|_{\omega_i}$$

Méthode: recoller les distributions $T_i$ par partitions de l'unité

Soient $\Omega_1, \Omega_2$ ouverts de $\mathbf{R}^N$, et $\chi : \Omega_1 \to \Omega_2$ un $C^\infty$-difféomorphisme. A tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega_1)$, on associe $\chi_*(\phi) \in C_c^\infty(\Omega_2)$ donnée par

$$\boxed{\chi_*(\phi) : y \mapsto \phi(\chi^{-1}(y))|\det D\chi(\chi^{-1}(y))|^{-1}}$$

**Déf:** Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, on définit la distribution composée $T \circ \chi \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ par

$$\boxed{\langle T \circ \chi, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_1), C_c^\infty(\Omega_1)} = \langle T, \chi_*(\phi) \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_2), C_c^\infty(\Omega_2)}}$$

**Exemples:**

1) pour toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega_2)$, on a

$$(T_f) \circ \chi = T_{f \circ \chi} \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$$

2) en posant $x_0 = \chi^{-1}(y_0)$, on a

$$\delta_{y_0} \circ \chi = |\det D\chi(x_0)|^{-1} \delta_{x_0} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$$

3) en particulier, pour $\lambda > 0$, notons $M_\lambda : x \mapsto \lambda x$; alors

$$\delta_0 \circ M_\lambda = \lambda^{-N} \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$$

**Prop. (p. 83):** Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert, une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et une fonction $\phi \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^n_y)$ à support dans $K \times \mathbf{R}^n$, où $K$ est un compact $\subset \Omega$. Alors la fonction $y \mapsto \langle T, \phi(\cdot, y)\rangle$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbf{R}^n$ et vérifie

$$\boxed{\partial_y^\alpha \langle T, \phi(\cdot, y)\rangle = \langle T, \partial_y^\alpha \phi(\cdot, y)\rangle\,, \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}^n\,,\ \forall y \in \mathbf{R}^n}$$

**Prop. (p. 85):** Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert, une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et une fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^n_y)$. Alors

$$\boxed{\int_{\mathbf{R}^n} \langle T, \phi(\cdot, y)\rangle dy = \left\langle T, \int_{\mathbf{R}^n} \phi(\cdot, y) dy \right\rangle}$$

# Produit de distributions (pp. 86–87)

En général, il n'est PAS POSSIBLE de définir le produit de deux distributions

$$\delta_{x_1}\delta_{x_2} = 0 \text{ si } x_1 \neq x_2\,, \qquad \delta_{x_0}^2 = ???$$

Il n'est même pas possible, en général, de définir le produit d'une distribution par une fonction qui ne serait pas de classe $C^\infty$

$$\delta_0 = H' = (H^2)' = 2H\delta_0 = (H^3)' = 3H^2\delta_0 = 3H\delta_0$$

ce qui entraînerait que $2 = 3\ldots$

| Distributions/Fonctions: dictionnaire | |
|---|---|
| Crochet de dualité $\langle \cdot , \cdot \rangle$ | Intégrale $\displaystyle\int$ |
| Distribution $T_f$ | Fonction $f$ |
| Dérivation | Intégration par parties |
| Dérivation sous le crochet | Dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ |
| Intégration sous le crochet | Thm. de Fubini |

# Stratégie pour définir des opérations linéaires sur $\mathcal{D}'$

1) Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert et $A : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ linéaire continue, sa transposée est l'application linéaire continue $A^* : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ (rappel: $L^\infty(\Omega) =$ dual topologique de $L^1(\Omega)$) définie par

$$\int_\Omega Af(x)\phi(x)dx = \int_\Omega f(x)A^*\phi(x)dx$$

2) Si $A^*(C_c^\infty(\Omega)) \subset C_c^\infty(\Omega)$, tenter de prolonger $A$ à $\mathcal{D}'(\Omega)$ en posant

$$\langle AT, \phi\rangle = \langle T, A^*\phi\rangle$$

c'est à dire tenter de prolonger $A$ par $\left(A^*\big|_{C_c^\infty(\Omega)}\right)^*$

**Pbm:** la forme linéaire $AT$ ainsi définie vérifie-t-elle la propriété de continuité des distributions sur $\Omega$?

# Vers la formule des sauts

Sur $\mathbf{R}$, la dérivation des distributions correspond à l'intégration par parties

Réciproquement, la formule de Green(-Ostrogradsky), ainsi que la notion de mesure de surface s'interprètent dans le cadre des distributions

Applications: formulation au sens des distributions de conditions de transmission à travers des interfaces (par ex. relations de Rankine-Hugoniot pour les ondes de choc en dynamique des gaz)

# Formule des sauts, dim. 1 (pp. 89–90)

**Thm:** soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $C^1$ par morceaux présentant des discontinuités de 1ère espèce aux points $a_1 < \ldots < a_n$. Alors

$$\boxed{f' = \{f'\} + \sum_{k=1}^{n} (f(a_k + 0) - f(a_k - 0))\delta_{a_k} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R})}$$

avec la notation

$$\boxed{\{f'\} = \left(f\big|_{\mathbf{R}\setminus\{a_1,\ldots,a_n\}}\right)'}$$

•C'est une généralisation de la formule $H' = \delta_0$

Soit $I \ni t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma = \gamma(I) \subset \mathbf{R}^2$ injective de classe $C^1$ sur le segment $I$ et t.q. $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Abscisse curviligne sur $\Gamma$: fonction $s : \Gamma \mapsto R$ t.q. $\frac{d}{dt}s(\gamma(t)) = |\dot{\gamma}(t)|$

Elément de longueur sur la courbe $\Gamma$ = différentielle d'une abscisse curviligne:

$$ds(\gamma(t)) = |\dot{\gamma}(t)|dt$$

Longueur de la courbe $\Gamma$: $\displaystyle\int_\Gamma ds(M) = \int_I |\dot{\gamma}(t)|dt$

Intégrale curviligne sur $\Gamma$: distribution d'ordre 0 sur $\mathbf{R}^2$ définie par

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^2) \ni \phi \mapsto \int_\Gamma \phi(M)ds(M) := \int_I \phi(\gamma(t)|\dot{\gamma}(t)|dt$$

Soient $I, J$ segments de $\mathbf{R}$ et $I \times J \ni (u, v) \mapsto M(u, v) \in \mathbf{R}^3$ de classe $C^1$ injective t.q. $(\partial_u M(u, v), \partial_v M(u, v))$ libre pour tout $(u, v) \in I \times J$

Plan tangent $T_{M(u,v)}\Sigma$ à la surface $\Sigma = M(I \times J)$ au point $M(u, v)$:

$$\{M(u, v) + \lambda \partial_u M(u, v) + \mu \partial_v M(u, v) \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$$

Elément de surface sur $\Sigma$:

$$d\sigma(M(u, v)) = |\partial_u M(u, v) \wedge \partial_v M(u, v)| du dv$$

Distribution (d'ordre 0) de simple couche de densité $f \in C(\Sigma)$:

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^3) \ni \phi \mapsto \int_\Sigma f(M)\phi(M) d\sigma(M)$$
$$= \int_{I \times J} f\phi(M(u, v)) |\partial_u M \wedge \partial_v M|(u, v) du dv$$

# Formules en coordonnées cartésiennes pp. 197, 203, 208

•Courbe de $\mathbf{R}^2$ d'équation $y = f(x)$ avec $f$ de classe $C^1$:

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx \quad \text{(élément de longueur)}$$

•Surface de $\mathbf{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$ avec $f$ de classe $C^1$:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{1 + |\partial_x f(x,y)|^2 + |\partial_y f(x,y)|^2}dxdy \\ &= \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}dxdy \quad \text{(élément de surface)} \end{aligned}$$

•Hypersurface de $\mathbf{R}^N$ d'équation $x_N = f(x_1, \ldots, x_{N-1})$ avec $f \in C^1$:
par analogie, l'élément de surface s'écrit

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla f(x_1, \ldots, x_{N-1})|^2}dx_1 \ldots dx_N$$

# Exemple: élément de surface sur la sphère

•Sphère unité $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$:

$$]-\pi,\pi[\times]0,\pi[\ni(\phi,\theta)\mapsto(\cos\phi\sin\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\theta)\mathbf{S}^2\setminus\Pi$$

où $\Pi$ est le demi-plan d'équation $x_1 \leq 0$ et $x_2 = 0$

•Elément de surface:

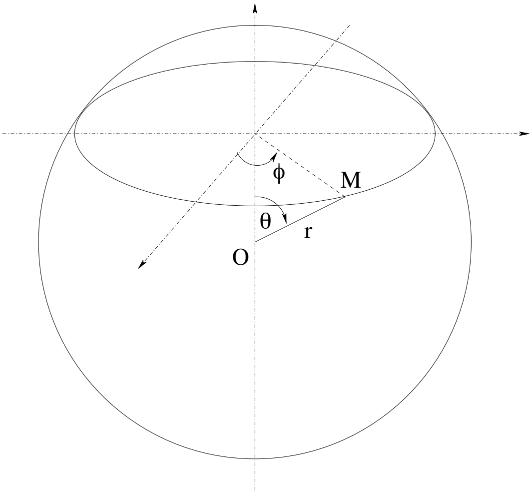
$$\partial_\phi M = (-\sin\phi\sin\theta, \cos\phi\sin\theta, 0)\,,$$
$$\partial_\theta M = (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, -\sin\theta)$$

de sorte que

$$\partial_\phi M \wedge \partial_\theta M = (-\cos\phi\sin^2\theta, -\sin\phi\sin^2\theta, -\cos\theta\sin\theta)$$

Donc l'élément de surface vaut

$$d\sigma := \sqrt{\sin^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta}d\phi d\theta = \sin\theta d\phi d\theta$$




Coordonnées sphériques dans $\mathbf{R}^3$

# Rappel: formule de Green-Riemann (p. 92)

Soit $K \subset \mathbf{R}^2$ compact t.q. $\partial K =$ réunion finie de courbes de Jordan régulières $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ paramétrées par $s$ et orientées de sorte que $K$ soit localement à gauche de $\gamma_i$ parcourue dans le sens des $s$ croissants

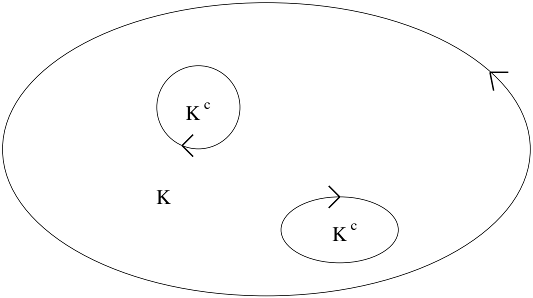
•**Formule de Green-Riemann** $P, Q$ continues au voisinage de $K$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} Pdx + Qdy = \int_K (\partial_x Q - \partial_y P) dxdy}$$

Cette formule s'écrit encore

$$\int_{\partial K} (Q, -P)(\sigma) \cdot \nu(\sigma) ds(\sigma) = \int_K \mathrm{div}(Q, -P)(x, y) dxdy$$

où $\nu(\gamma_i(s)) := (\gamma_{i,y}'(s), -\gamma_{i,x}'(s))$ normale extérieure




Bord orienté d'un compact de $\mathbf{R}^2$