Distributions, analyse de Fourier, EDP
Amphi no. 5

Corollaire: soit $(\phi_n)_{n\geq 1}$ suite de $C^\infty(\Omega)$ t.q. pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$

$$\partial^\alpha \phi_n \to \partial^\alpha \phi \text{ uniformément sur tout compact de } \Omega$$

Alors, pour tout $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, on a

$$\langle T, \phi_n \rangle \to \langle T, \phi \rangle$$

Prolongement par 0**:** à $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ on associe son prolongement par 0 hors de Ω, notée $\dot{T} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et définie par

$$\langle \dot{T}, \phi \rangle_{\mathcal{E}'(\mathbf{R}^N), C^\infty(\mathbf{R}^N)} = \left\langle T, \phi\big|_\Omega \right\rangle_{\mathcal{E}'(\Omega), C^\infty(\Omega)}$$

Soient Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$, une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$

Thm: Si $\operatorname{supp}(T) \subset \{x_0\}$, alors T est une combinaison linéaire finie de δ_{x_0} et de ses dérivées.

C.a.d. qu'il existe $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^N}$ t.q. $\lambda_\alpha = 0$ sauf pour un nombre fini de α et

$$\boxed{T = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^N} \lambda_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}}$$

Notation: $M_\lambda : \mathbf{R}^N \ni x \mapsto \lambda x \in \mathbf{R}^N$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$

•Soit Ω cône ouvert de $\mathbf{R}^N$(ouvert de $\mathbf{R}^N$ t.q. $\lambda > 0 \Rightarrow M_\lambda(\Omega) \subset \Omega$)

•Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite homogène de degré β si on a

$$T \circ M_\lambda = \lambda^\beta T \quad \text{pour tout } \lambda > 0$$

Exemples: (a) δ_0 et $\text{vp}\frac{1}{x}$ sont homogènes de degré -1 dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$;
(b) pf x_+^a est homogène de degré a pour tout réel $a \neq$ entier négatif
(c) $\partial^\alpha \delta_0$ est homogène de degré $-N-|\alpha|$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$; en particulier δ_0 est homogène de degré $-N$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$

Prop: (p. 103) Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ distribution homogène de degré β; alors

$$\partial^\alpha T \text{ est homogène de degré } \beta - |\alpha| \text{ pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^N$$

Prop: (pp. 110–112)
Toute distribution homogène de degré $> -N$ sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ se prolonge de manière unique en une distribution homogène sur $\mathbf{R}^N$ de même degré.

FAUX pour une distribution homogène de degré $-N$ sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$

Ex: 1) $\frac{1}{|x|} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}\setminus\{0\})$ n'a pas de prolongement homogène $\in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$

2) (cf. Prop. 4.1.8, pp. 125–126) pour $A \in C(\mathbf{R}^N)$

$$\frac{1}{|x|^N} A\left(\frac{x}{|x|}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \Leftrightarrow \int_{\mathbf{S}^{N-1}} A(\omega)\,d\sigma(\omega) = 0$$

Distributions homogènes + à support dans $\{0\}$

Dans l'étude des EDP, on utilisera souvent l'argument suivant:

•Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$ homogène de degré $-N+m$ t.q. $\partial^\alpha T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$, avec $|\alpha| = m > 0$.

1) d'une part, T admet un unique prolongement $\tilde{T} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ homogène de degré $-N+m$;

2) d'autre part, $\partial^\alpha \tilde{T}\big|_{\mathbf{R}^N \setminus \{0\}} = 0$, c.a.d. $\mathrm{supp}(\partial^\alpha \tilde{T}) = \{0\}$.

ALORS $\partial^\alpha \tilde{T}$ =distribution homogène de degré $-N+m-|\alpha| = -N$ sur $\mathbf{R}^N$ à support dans $\{0\}$. Elle est donc de la forme

$$\partial^\alpha \tilde{T} = c\delta_0 \quad \text{avec } c \in \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C}$$

Extension aux distributions du produit de convolution

BUTS:

•d'abord, le même que pour les fonctions: approcher les distributions par des fonctions régulières

•mais plus généralement, les opérations invariantes par translation sur les fonctions ou les distributions définies sur $\mathbf{R}^N$ (par ex. la dérivation) peuvent être comme produits de convolution par des distributions

$\Rightarrow$ la convolution est l'un des outils fondamentaux pour l'étude des EDP à coefficients constants

•BUT: pour tout $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ et $\phi \in C_c(\mathbf{R}^N)$, on a la formule

$$f \star \phi(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(z)\phi(x-z)dz\,, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^N$$

et on veut la généraliser au cas où $f \to T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$

Notation: translation $\tau_z\phi(x) := \phi(x-z)$; antipodie $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$

Déf: Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$; on pose

$$T \star \phi(x) = \langle T, \phi(x-\cdot)\rangle = \langle T, \tau_x\tilde{\phi}\rangle\,, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^N\,.$$

Donc $T \star \phi$ est une FONCTION définie en tout point de $\mathbf{R}^N$

Premières propriétés

Majoration du support: Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$,

$$\boxed{\operatorname{supp}(T \star \phi) \subset \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(\phi)}$$

Dém: si $x \notin \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(\phi)$, alors $\phi(x - \cdot)$ est à support dans $\{x - z \mid z \in \operatorname{supp}(\phi)\}$ donc $\operatorname{supp}(\phi(x - \cdot)) \cap \operatorname{supp}(T) = \varnothing$. Donc $T \star \phi(x) = \langle T, \phi(x - \cdot)\rangle = 0$

Régularité: Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, le produit de convolution $T \star \phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$, et on a

$$\boxed{\partial^\alpha(T \star \phi) = (\partial^\alpha T) \star \phi = T \star (\partial^\alpha \phi)\,, \qquad \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^N}$$

Dém: découle du théorème de dérivation sous le crochet de dualité.

Convergence et distributions

Convergence dans C_c^∞ (p. 59): soient Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, ainsi qu'une suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ de $C_c^\infty(\Omega)$. On dit que $\phi_n \to \phi$ dans $C_c^\infty(\Omega)$ ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées

1) il existe $K \subset \Omega$ compact INDEPENDANT DE n tel que

$$\operatorname{supp}(\phi_n) \subset K \text{ pour tout } n \geq 1$$

2) pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on a $\partial^\alpha \phi_n \to \partial^\alpha \phi$ uniformément sur Ω .

Prop: (p. 60) toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est séquentiellement continue sur $C_c^\infty(\Omega)$

$$\phi_n \to \phi \text{ dans } C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow \langle T, \phi_n \rangle \to \langle T, \phi \rangle$$

Dém: Appliquer la "propriété de continuité" des distributions.

Thm: (Régularisation par convolution) Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $(\zeta_\epsilon)_{\epsilon>0}$ suite régularisante de $\mathbf{R}^N$; alors

$$\boxed{T_\epsilon := T \star \zeta_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^N), \quad \text{et} \quad T_\epsilon \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \text{ pour } \epsilon \to 0^+}$$

<u>Dém:</u> Par intégration sous le crochet de dualité pour $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$,

$$\int_{\mathbf{R}^N} (T \star \psi)(x)\phi(x)dx = \langle T, \tilde{\psi} \star \phi \rangle, \quad \text{où } \tilde{\psi}(x) = \psi(-x).$$

Appliquer cette formule avec $\psi = \zeta_\epsilon$.

Thm: (Densité de C_c^∞ dans $\mathcal{D}'$) Soient un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ et une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Il existe une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ de $C_c^\infty(\Omega)$ t.q.

$$T_n \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \to \infty$$

Applications de la régularisation des distributions

On peut définir de nouvelles opérations linéaires sur les distributions par densité à partir des opérations correspondantes sur les fonctions

Exemples:

•Produit tensoriel de distributions

•Composée d'une distribution et d'une application C^∞ (cf. polycopié pp. 136–139)

Produit tensoriel de distributions (pp. 133–136)

Produit de deux distributions dans des VARIABLES DIFFERENTES: étendre aux distributions l'opération définie sur les fonctions L^1_{loc} par

$$f \otimes g(x,y) := f(x)g(y)$$

Prop. et Déf. Soient $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^m$ et $\Omega_2 \subset \mathbf{R}^n$ ouverts. Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $S \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, on définit $S \otimes T \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ par

$$\boxed{\langle S \otimes T, \phi \rangle := \Big\langle S, \langle T, \phi(x_1, \cdot)\rangle \Big\rangle = \Big\langle T, \langle S, \phi(\cdot, x_2)\rangle \Big\rangle}$$

Pour S et T d'ordre fini, on a $\text{ordre}(S \otimes T) \leq \text{ordre}(S) + \text{ordre}(T)$

Exemple:

$$\delta_{x_0} \otimes 1 \text{ est définie par } \langle \delta_{x_0} \otimes 1, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x_0, y)dy$$

Principe de bornitude uniforme

<u>RAPPEL:</u> **Thm. de Banach-Steinhaus.** Soient E espace de Banach et $(L_n)_{n\geq 1}$ suite de formes LINÉAIRES CONTINUES sur E. Supposons que

$$L_n(x) \to L(x) \text{ pour tout } x \in E \text{ lorsque } n \to +\infty\,.$$

Alors L est une forme linéaire CONTINUE sur E.

Principe de bornitude uniforme dans $\mathcal{D}'$ (p. 60): Soient Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$, une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et K compact $\subset \Omega$. Supposons que

$$\text{la suite } \langle T_n, \phi\rangle \text{ converge pour tout } \phi \in C^\infty(\Omega) \text{ à support dans } K$$

Alors, il existe $C > 0$ et $p \in \mathbf{N}$ tels que, pour tout $\phi \in C^\infty(\Omega)$

$$\operatorname{supp}(\phi) \subset K \Rightarrow \sup_{n\geq 1} |\langle T_n, \phi\rangle| \leq C \max_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

Conséquences du principe de bornitude uniforme

1) **Thm. de Banach-Steinhaus dans $\mathcal{D}'$ (p. 70):** Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si la suite $\langle T_n, \phi\rangle$ est convergente pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ alors il existe $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ t.q. $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

2) **Continuité du crochet de dualité (p. 71):** Soient $(T_n)_{n\geq 1}$ suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $(\phi_n)_{n\geq 1}$ suite de $C_c^\infty(\Omega)$. Alors

$$\phi_n \to \phi \text{ dans } C_c^\infty(\Omega) \text{ et } T_n \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow \langle T_n, \phi_n\rangle \to \langle T, \phi\rangle$$

3)**Proposition 4.2.7 (p. 132):** soient $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite de distributions sur $\mathbf{R}^N$. Alors, pour tout multi-indice α

$$\begin{aligned} T_n \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) &\Rightarrow T_n \star \phi \to T \star \phi \text{ C.U. sur tout compact} \\ &\Rightarrow \partial^\alpha(T_n \star \phi) \to \partial^\alpha(T \star \phi) \text{ C.U. sur tout compact} \end{aligned}$$

Notation: Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$, on note $\tilde{T} = T \circ (-Id) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$

$$\langle \tilde{T}, \phi \rangle = \langle T, \tilde{\phi} \rangle \,, \quad \text{où} \quad \tilde{\phi}(x) := \phi(-x) \,, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Déf: Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, on définit $T \star S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ par

$$\boxed{\langle T \star S, \phi \rangle := \langle T, \tilde{S} \star \phi \rangle \,, \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)}$$

Le membre de droite est bien défini, puisque $\tilde{S} \star \phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ est à support dans $\mathrm{supp}(\phi) + \mathrm{supp}(\tilde{S})$ compact.

<u>EXEMPLE FONDAMENTAL:</u> notons τ_a la translation $x \mapsto x + a$ sur $\mathbf{R}^N$; alors

$$T \star \delta_a = T \circ \tau_{-a} \,, \qquad T \star \delta_0 = T$$

Majoration du support: pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$

$$\boxed{\operatorname{supp}(T \star S) \subset \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(S)}$$

Commutativité du produit de convolution: pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, on définit $S \star T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ par

$$\langle S \star T, \phi \rangle := \langle S, \tilde{T} \star \phi \rangle \,, \qquad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Le membre de droite est bien défini puisque $\tilde{T} \star \phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ et S est à support compact.

Thm:

$$\boxed{T \star S = S \star T \,, \qquad \text{pour tout } T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)\,,\ S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)}$$

Dém: régulariser S et intégrer sous le crochet de dualité

Continuité séquentielle de la convolution:

Thm: Soient des suites $T_n \to T$ et $S_n \to S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$. Soit $K \subset \mathbf{R}^N$ COMPACT FIXE, INDEPENDANT de n

$$\boxed{\mathrm{supp}(S_n) \subset K \text{ pour tout } n \Rightarrow T_n \star S_n \to T \star S \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)}$$

Dérivation et convolution:

Thm: pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\boxed{\partial^\alpha(T \star S) = (\partial^\alpha T) \star S = T \star (\partial^\alpha S)\,, \qquad \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^N}$$

<u>EXEMPLE FONDAMENTAL:</u> pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $\alpha \in \mathbf{N}^N$

$$\boxed{(\partial^\alpha \delta_0) \star T = T \star (\partial^\alpha \delta_0) = \partial^\alpha T}$$

Application: dérivation fractionnaire (p. 144)

Fonction Γ: rappelons que la fonction eulérienne Γ est donnée par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^z e^{-t} \frac{dt}{t}, \quad \Re(z) > 0$$

Propriétés: a) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, de sorte que $\Gamma(n+1) = n!$
b) $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur **C**

Distributions χ_+^a (p. 106): pour tout $a > -1$, on pose

$$\chi_+^a(x) = \frac{(x_+)^a}{\Gamma(a+1)}, \qquad \text{où } x_+ = \max(x, 0)$$

On définit ensuite $\chi_+^a \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ homogène de degré a pour tout $a \in \mathbf{R}$ par la formule

$$\chi_+^a = (\chi_+^{a+1})' = \ldots = (\chi_+^{a+n})' \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R})$$

Cas particuliers importants: a) $\chi_+^0 = H = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$ fonction de Heaviside

b) pour tout $k \geq 1$, on a $\chi_+^{-k} = \delta_0^{(k-1)}$; en particulier $\chi_+^{-1} = \delta_0$

Notion de dérivation fractionnaire: on a vu que, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k T = \delta_0^{(k)} \star T \,, \quad k \in \mathbf{N}^*$$

ceci suggère de définir, pour tout $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ et tout $a \in \mathbf{R}$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^a T = \chi_+^{-a-1} \star T \,, \quad a \in \mathbf{R}^*$$

Le cas $a = -1$ correspond à

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} T = H \star T \left(= \int_{-\infty}^{x} T(y)dy \text{ lorsque } T \text{ est une fonction } \right)$$

Thm: soient $T, S, R \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$, avec deux d'entre elles à support compact. Alors

$$\boxed{(T \star S) \star R = T \star (S \star R)}$$

•ATTENTION: cela peut être faux si un seul support est compact:

$$\boxed{\begin{aligned} (1 \star \delta_0') \star H = 0 \star H \quad &= 0\,, \\ 1 \star (\delta_0' \star H) = 1 \star H' \quad &= 1 \star \delta_0 = 1\,. \end{aligned}}$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, où H est la fonction de Heaviside:

$$H(x) = \mathbf{1}_{x \geq 0}$$