MAT 431 2012-2013

DISTRIBUTIONS, FOURIER ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Feuille d'exercices numéro 6

Fonctions C^∞

Exercice 1. Montrer que $\|x\|$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En déduire que $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et déterminer sa différentielle. Soit $n = 2$ et g une fonction C^2, déterminer $\Delta(g \circ f)$ en fonction de Δg (ne pas avoir peur de faire des calculs).

Exercice 2.
a) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.
b) Soit $n \geq 1$ entier. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ pour que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x^n}$ se prolonge en un fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.
a) Soit f de classe C^∞, définie dans la boule B de $\mathbb{R}^n$ et vérifiant $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $g_j \in C^\infty(B)$ telles que l'on ait $f(x) = \sum_1^d x_j g_j(x)$ dans B. (On utilisera la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $m = 0$.)
b) Soit maintenant Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine et $f \in C^\infty(\Omega)$ s'annulant en 0. Montrer qu'il existe des fonctions $g_j \in C^\infty(\Omega)$ telles que $f(x) = \sum_1^d x_j g_j(x)$ dans Ω. (On écrira f comme somme d'une fonction f_1 à support dans une petite boule et d'une fonction f_2 nulle au voisinage de 0.)

Exercice 4. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe deux fonctions positives f_1, f_2 de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $f = f_1 - f_2$. Même question en remplaçant $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ par $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 5. Soient $\lambda > 0, a$ et $S \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que

$$a(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad |\nabla a(x)| + |S(x)| + |\nabla S(x)| \leq M \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que l'équation de transport stationnaire

$$\lambda f(x) + v \cdot \nabla_x f(x) + a(x) f(x) = S(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

admet une unique solution bornée f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, et que cette solution est donnée par la formule

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t - \int_0^t a(x-sv)ds} S(x - tv) dt.$$

Exercice 6. On considère l'équation

$$\partial_t u + u^2 \partial_x u = 0$$

avec donnée initiale $u(0,x) = u_0(x)$ où u_0 est une fonction donnée.
a) Introduire une méthode des caractéristiques pour résoudre cette équation.
b) Quel est le temps maximal d'existence d'une solution régulière dans le cas où u_0 est une fonction régulière positive et croissante ? dans le cas où u_0 est une fonction régulière positive et décroissante ?

Exercice 7. On dit que f est homogène de degré m si $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\forall t > 0$, $f(tx) = t^m f(x)$. On suppose que f est $C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Montrer que f est homogène de degré m si et seulement si $df(x) \cdot x = mf(x)$. Trouver toutes les solutions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ de l'équation aux dérivées partielles

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Exercice 8.
a) Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\chi(x) = e^{-\frac{\|x\|^2}{1-\|x\|^2}} \text{ si } \|x\| < 1, \quad \chi(x) = 0 \text{ si } \|x\| \geq 1,$$

est de classe C^∞.
b) Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant $f(x) = \sin(e^x)$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = e^{\sin x}$ pour $2 \leq x \leq 3$.
c) Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive telle que F soit l'ensemble des points d'annulation de f.
d) Étant donné deux fermés disjoints F et G de $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à valeurs dans $[0,1]$ et telle que $F = g^{-1}(\{0\})$ et $G = g^{-1}(\{1\})$.
e) Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer que F est le support d'une fonction C^∞ si et seulement si F vaut l'adhérence de son intérieur.

Exercice 9. (Théorème de Borel) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite quelconque de nombres réels, et χ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\chi|_{[-1,1]} = 1$ et $\operatorname{Supp}\chi \subset [-2,2]$.
a) On pose $f_n(x) = a_n \frac{x^n}{n!}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right)$. Montrer que pour tout n, on peut choisir $\varepsilon_n > 0$ assez petit de sorte que

$$\forall k \leq n-1, \quad \|f_n^{(k)}\|_{L^\infty} \leq 2^{-n}.$$

b) En considérant $\sum_n f_n$, montrer qu'il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$ (Théorème de Borel).
c) Montrer que pour toute fonction paire $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, il existe $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = g(x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $p, q \in [1,\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Montrer que $f * g$ est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$. (On pourra utiliser le fait que $C_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in [1,\infty[$ et qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue.)

Exercice 11. Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ mesurable et de mesure de Lesbegue $|A| > 0$. Montrer que

$$A - A = \{x - y | x, y \in A\}$$

est un voisinage de 0. On pourra considérer la fonction $f * \tilde{f}$ où f est la fonction caractéristique de A et $\tilde{f}(x) = f(-x)$.

Exercice 12.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact inclus dans Ω. On note $F = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.
a) Soit $d(K, F) = \inf\{|x - y| \mid x \in K, y \in F\}$. Montrer que $d(K, F) > 0$ et que la borne inférieure est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $|x - y| = d(K, F)$. On note $\eta = d(K, F)$.
b) Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, K) \leq \varepsilon\}$. Montrer que pour tout $\varepsilon < \eta$, K_ε est un compact inclus dans Ω, et un voisinage de K.
c) Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive, à support dans $B(0, 1)$ et telle que $\int \chi = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\chi(x/\varepsilon)$ et on définit f_ε par

$$f_\varepsilon(x) = \int_{K_{2\varepsilon}} \chi_\varepsilon(x - y)dy.$$

Montrer que $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifie

$$\text{Supp}(f_\varepsilon) \subset K_{3\varepsilon}, \quad 0 \leq f_\varepsilon \leq 1, \quad f_\varepsilon|_{K_\varepsilon} = 1.$$

d) Montrer que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la famille de réels $\varepsilon^{|\alpha|} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f_\varepsilon(x)|$ reste bornée.
e) Soit $k \in \mathbb{N}$. Peut-on espérer trouver des fonctions f_ϵ valant 1 au voisinage de K, à support dans $K_{2\varepsilon}$ et vérifiant l'estimation plus forte : $\sup_{|\alpha|=k} \varepsilon^k \|\partial^\alpha f_\varepsilon\|_{L^\infty} \to 0$ pour $\varepsilon \to 0$. (Penser à la formule de Taylor).