Exercice I. Schémas pour la diffusion

On passe en revue quelques schémas numériques historiques pour la résolution numérique de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = 0.$$

On impose des conditions de périodicité au bord de $[0,1]$ en espace.

1. Étudier le schéma semi-discret

$$u_i'(t) - \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{\Delta x^2} = 0.$$

Montrer qu'il est d'ordre 2 en espace, ∞ en temps, et stable en norme L^2. Est-il convergent ? Et pourquoi ?

2. Étudier le schéma de Richardson

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

Montrer qu'il est d'ordre 2 en espace et 2 en temps. Monrer qu'il est inconditionellement instable pour tout $\Delta t > 0$.

3. Étudier le schéma de Dufort et Frankel

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - u_i^{n-1} - u_i^{n+1} + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

Monrer qu'il est inconditionellement stable pour tout $\Delta t > 0$. Quel est le problème ?

4. Étudier le schéma de Cranck-Nicolson

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0.$$

Quel est son avantage sur le schéma rétrograde qui suit ?

5. Etudier le schéma rétrograde

$$\frac{3u_i^{n+1} - 4u_i^n + u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0.$$

Exercice II. Le schéma saute-mouton (leap-frog) pour l'équation du transport

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0.$$

Ce schéma se définit par

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

1. Montrer que ce schéma est stable dans L^2 au sens de von Neumann, sous condition CFL.

2. Démontrer que ce schéma est consistant à l'ordre 2.

3. Dans le cas $a > 0$ on considère le problème pour $x \in]0,1[$. La condition au limite est de Dirichlet en $x = 0$.

Montrer qu'un schéma raisonnable s'écrit

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad i = 1,$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad 2 \le i \le p-1,$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad i = p.$$

4. Montrer que ce schéma est instable au sens de Fourier, à cause de la condition au bord à droite.

Exercice III. Schéma upwind pour l'équation du transport

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0, \quad a > 0,$$

avec condition de Dirichlet à gauche.

1. Écrire le schéma.

2. Montrer qu'il est stable dans tous les L^q sous CFL.

Exercice IV. Discrétisation en angle.

Soit la famille des polynômes de Legendre

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left((\mu^2-1)^n\right).$$

1. Montrer que le degré de P_n est n et que sa parité est celle de n.
2. Montrer qu'ils sont orthogonaux

$$\int_{-1}^{1} P_n(\mu)P_m(\mu)d\mu = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1}.$$

3. Montrer la relation de récurrence

$$\mu P_n(\mu) = \frac{(n+1)P_{n+1}(\mu) + nP_{n-1}(\mu)}{2n+1}.$$

4. Montrer que les racines de P_n sont réelles, distinctes, symétriques et comprises dans $]-1,1[$.
5. Montrer que P_n est solution de l'équation différentielle

$$(1-\mu^2)P_n'' - 2\mu P_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2\mu x}} = \sum_n P_n(\mu)x^n.$$

6. Soit l'équation

$$\partial_t f + \mu\partial_x f = \sigma\left(\frac{\int_{-1}^{1} f(\mu')d\mu'}{2} - f\right).$$

On approche f en tronquant la série

$$f(x,t,\mu) \approx \sum_{n=0}^{N} f_n(x,t)P_n(\mu).$$

Justifier le système

$$\partial_t f_n + \frac{n+1}{2n+1}\partial_x f_{n+1} + \frac{n}{2n+1}\partial_x f_{n-1} = \sigma\left(\delta_{n0}-1\right) f_n$$

pour $0 \le n \le N$. Par convention $f_{-1} = f_{N+1} = 0$.
7. Montrer l'inégalité

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{2}\int_{\mathbb{R}} f_n^2(x,t)dx\right) \le 0.$$

8. En déduire que ce procédé d'approximation angulaire est précis. Plus précisément montrer que

$$\sum_{n=0}^{N} f_n(x,t)P_n(\mu) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} f$$

dans $L^2(\mathbb{R})$. On fera toutes les hypothèses de régularité nécessaires.
9. Proposer une méthode numérique pour la résolution de

$$\partial_t X + A\partial_x X = 0.$$

où $A = A^t$ est une matrice symétrique de taille N. Appliquer à la discrétisation du système du **6.**.