

Transport et diffusion

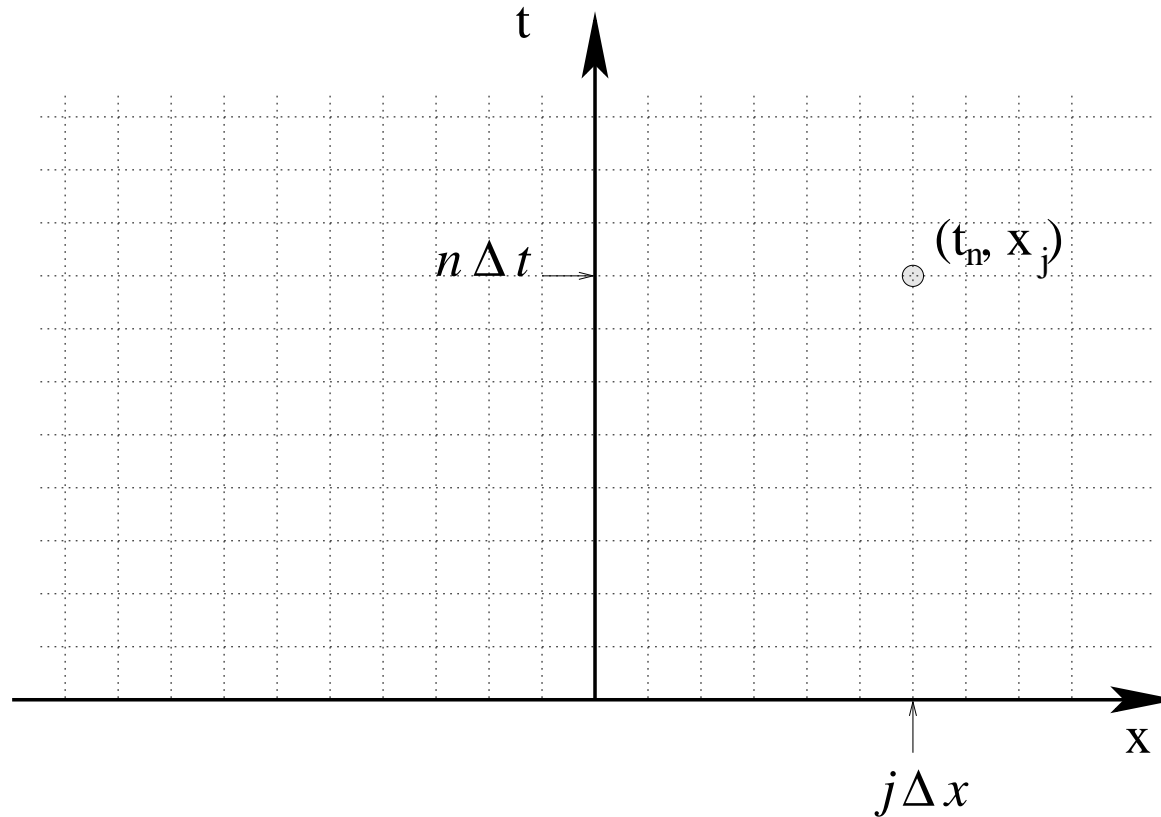
G. ALLAIRE

Cours no. 5 — le 6/II/2013

Méthodes numériques

- ➔ Différences finies en 1-d: rappels
- ➔ Equation de diffusion stationnaire
- ➔ Equation de transport
- ➔ Equation de transport stationnaire

(1) Rappels: différences finies



Maillage: discrétisation de l'espace et du temps

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \quad \text{pour} \quad n \geq 0, j \in \mathbb{Z}$$

$\Delta t =$ pas de temps, $\Delta x =$ pas d'espace (supposés "petits").

Exemple de l'équation de diffusion en 1-d

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t, x = 0) = u(t, x = 1) = 0 & \text{pour } t \in \mathbb{R}_*^+ \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & \text{dans } (0, 1) \end{array} \right.$$

avec $\nu > 0$.

Principe des différences finies

On calcule des **approximations**

$$u_j^n \approx u(t_n, x_j)$$

On remplace les dérivées par des **différences finies**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{ou bien} \quad \approx \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad \text{ou bien} \quad \approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

Principe de discrétisation:

on remplace un problème de dimension **infinie** (calculer la fonction $u(t, x)$) par un problème de dimension **finie** (calculer les valeurs discrètes u_j^n), qui seul peut être résolu par un ordinateur.

Différences divisées et formules de Taylor

Il n'y a pas **unicité** des formules d'approximation par différences finies.

On utilise des **formules de Taylor**. Par exemple

$$\begin{aligned}
 -u(t, x - \Delta x) + 2u(t, x) - u(t, x + \Delta x) = & -(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \\
 & - \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, x) + \mathcal{O}\left((\Delta x)^6\right)
 \end{aligned}$$

On en déduit la formule (centrée en espace)

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) \approx \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

à un terme d'ordre $(\Delta x)^2$ près.

Approximation de la dérivée en temps

⇒ **Schéma d'Euler explicite** (progressif en temps, ou "forward"):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

⇒ **Schéma d'Euler implicite** (rétrograde en temps, ou "backward"):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$$

Schémas pour l'équation de diffusion en 1-d

$\Delta x = 1/(N + 1)$, pour $1 \leq j \leq N$:

⇒ schéma d'Euler explicite: le plus simple

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

(explicite \Leftrightarrow formule immédiate pour trouver u^{n+1} en fonction de u^n)

⇒ schéma d'Euler implicite: le plus stable

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

(implicite \Leftrightarrow système linéaire pour trouver u^n en fonction de u^{n-1})

Initialisation: $u_j^0 = u_0(x_j)$ où $u_0(x)$ est la condition initiale.

Conditions aux limites: $u_0^n = u_{N+1}^n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Consistance et précision

Définition. Un schéma de formule $F(u_j^n) = 0$ est dit **consistant** avec l'équation qu'il discrétise si **l'erreur de troncature** vérifie

$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} F(u(t^n, x_j)) = 0$ **si et seulement si** $u(t, x)$ est solution de l'équation.

On dit que le schéma est précis à l'ordre p en x et à l'ordre q en t si l'erreur de troncature est $\mathcal{O}\left((\Delta x)^p + (\Delta t)^q\right)$.

Exercice. Les schémas d'Euler explicite et implicite sont d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

Stabilité

On considère une des deux normes discrètes

$$\|u^n\|_2 = \left(\sum_{j=1}^N \Delta x |u_j^n|^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|u^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |u_j^n|$$

Définition. Un schéma est dit **stable** pour une de ces normes s'il existe une constante $K > 0$ indépendante de Δt et Δx telle que

$$\|u^n\| \leq K \|u^0\| \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

quelle que soit la donnée initiale u^0 .

Si cette inégalité a lieu sous une condition entre Δt et Δx , on dit que le schéma est **conditionnellement stable**.

Condition de stabilité L^∞

Lemme. Le schéma explicite est stable en norme L^∞ si et seulement si la condition CFL suivante est satisfaite

$$2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2.$$

Démonstration (principe du maximum discret): le schéma explicite est équivalent à

$$u_j^{n+1} = \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j-1}^n + \left(1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_j^n + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j+1}^n$$

u_j^{n+1} est une **combinaison convexe** si la condition CFL est satisfaite.

Donc, pour $m \leq 0 \leq M$, si $2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$, on a

$$m \leq u_j^0 \leq M, \quad 1 \leq j \leq N \quad \Rightarrow \quad m \leq u_j^n \leq M, \quad 1 \leq j \leq N \text{ et } \forall n \geq 0.$$

Si la condition CFL n'est pas satisfaite, il y a instabilité. Exemple:

$$u_j^0 = (-1)^j \quad \Rightarrow \quad u_j^n = (-1)^j \left(1 - 4 \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \right)^n$$

qui tend (en valeur absolue) vers ∞ car $2\nu\Delta t > (\Delta x)^2 \Rightarrow 1 - 4\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} < -1$.

Exercice. Le schéma d'Euler implicite est inconditionnellement stable en norme L^∞ .

Stabilité L^2 : deux méthodes

1. Condition nécessaire de Von Neumann dans le cas périodique.
2. Inégalités d'énergie dans le cas général.

Dans le cas de **conditions aux limites périodiques** on peut utiliser une méthode **d'analyse de Fourier**.

Plutôt que de décrire en détails cette méthode, on rappelle une condition nécessaire très simple, dite de **Von Neumann**.

On considère une solution discrète particulière sous la forme d'un mode de Fourier, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$u_j^n = A(k)^n \exp(2i\pi k x_j) \quad \text{avec} \quad x_j = j\Delta x.$$

En injectant cette solution dans la définition du schéma on trouve une formule pour le **coefficient d'amplification** $A(k) \in \mathbb{C}$.

Condition nécessaire de stabilité de Von Neumann. Le schéma est stable **seulement si** le coefficient d'amplification vérifie

$$|A(k)| \leq 1 \text{ pour tout mode } k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque. Dans de nombreux cas on peut montrer que la condition **nécessaire** de Von Neumann est aussi suffisante (mais pas toujours !).

Lemme. La condition nécessaire de stabilité (en norme L^2) de Von Neumann est satisfaite inconditionnellement par le schéma d'Euler implicite, et sous la condition CFL $2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$ par le schéma explicite.

Démonstration. Schéma implicite

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

dont on déduit, pour la solution particulière $u_j^n = A(k)^n \exp(2i\pi k x_j)$,

$$A(k) \left(1 + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} (-\exp(-2i\pi k\Delta x) + 2 - \exp(2i\pi k\Delta x)) \right) = 1$$

On vérifie que

$$A(k) = \frac{1}{1 + \frac{4\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} (\sin(\pi k\Delta x))^2} \leq 1.$$

Pour le schéma explicite on trouve que $A(k) = 1 - \frac{4\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} (\sin(\pi k\Delta x))^2$.

Méthode d'inégalités d'énergie

Commençons par une inégalité d'énergie pour l'équation de diffusion.

Lemme. Soit $u(t, x)$ une solution régulière de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t, x = 0) = u(t, x = 1) = 0 & \text{pour } t \in \mathbb{R}_*^+ \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & \text{dans } (0, 1) \end{array} \right.$$

Alors elle vérifie l'inégalité, dite **d'énergie**, pour tout $t > 0$,

$$\int_0^1 |u(t, x)|^2 dx \leq \int_0^1 |u_0(x)|^2 dx.$$

Remarque. Rien à voir, parfois, avec l'énergie physique !

Démonstration. On multiplie l'équation par u et on intègre par parties

$$\int_0^1 u \frac{\partial u}{\partial t} dx + \nu \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \nu \left(u \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) - u \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) \right) = 0.$$

Les termes de bord s'annulent à cause des conditions aux limites et, en intégrant en temps, on obtient

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |u(t, x)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 |u(0, x)|^2 dx + \nu \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(s, x) \right)^2 dx ds = 0$$

d'où l'on déduit le résultat en minorant par zéro la dernière intégrale.

Lemme. Soit $u^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq N}$ la solution discrète du schéma implicite. Alors elle vérifie l'inégalité

$$\|u^n\|_2 \leq \|u^0\|_2.$$

Donc, le schéma implicite est inconditionnellement stable en norme L^2 .

Démonstration. On multiplie par $(\Delta t \Delta x) u_j^n$ la formule du schéma implicite

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

et on somme en j (équivalent de l'intégration en espace) pour obtenir

$$\Delta x \sum_{j=1}^N u_j^n (u_j^n - u_j^{n-1}) + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x} \sum_{j=1}^N u_j^n \left((u_j^n - u_{j+1}^n) - (u_{j-1}^n - u_j^n) \right) = 0.$$

On réarrange la dernière somme (équivalent d'une intégration par parties)

$$\Delta x \sum_{j=1}^N u_j^n (u_j^n - u_j^{n-1}) + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x} \sum_{j=1}^N u_j^n (u_j^n - u_{j+1}^n) - \frac{\nu \Delta t}{\Delta x} \sum_{j=0}^{N-1} u_{j+1}^n (u_j^n - u_{j+1}^n) = 0.$$

En utilisant la condition aux limites de Dirichlet, il vient

$$\Delta x \sum_{j=1}^N u_j^n (u_j^n - u_j^{n-1}) + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x} \sum_{j=0}^N (u_j^n - u_{j+1}^n)^2 = 0.$$

On minore par 0 la dernière somme

$$\Delta x \sum_{j=1}^N (u_j^n)^2 \leq \Delta x \sum_{j=1}^N u_j^n u_j^{n-1}$$

et par Cauchy-Schwarz $\|u^n\|_2 \leq \|u^{n-1}\|_2$, d'où le résultat.

Remarque. On a copié, dans le cas discret, la démonstration du cas continu !

Convergence

Théorème de Lax. Un schéma linéaire, consistant et stable est convergent.

De plus, si le schéma est précis à l'ordre p en x et à l'ordre q en t alors la vitesse de convergence est $\mathcal{O}\left((\Delta x)^p + (\Delta t)^q\right)$.

Démonstration. Voir le polycopié.

(2) Equation de diffusion stationnaire

Pour bien comprendre, on refait la même chose !

$$\begin{cases} -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma(x)u = f(x) & \text{dans } (0, 1) \\ u(x=0) = u(x=1) = 0 \end{cases}$$

avec $\nu > 0$, la source $f(x) \in L^2(0, 1)$ et l'absorption $\sigma(x) \geq 0$.

Lemme (estimation d'énergie). La solution u vérifie

$$\int_0^1 \left(\nu |u'|^2 + \sigma |u|^2 \right) dx = \int_0^1 f u dx,$$

donc il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute source f ,

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq C \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Schéma en stationnaire

$$\nu \frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{(\Delta x)^2} + \sigma_j u_j = f_j \quad 1 \leq j \leq N$$

avec les conditions aux limites: $u_0 = u_{N+1} = 0$.

Il faut résoudre un système linéaire pour trouver la solution discrète.

Lemme. La matrice du système est inversible.

Définition. Un schéma est dit **stable** pour la norme $\|u\|$ s'il existe une constante $K > 0$ indépendante de Δx telle que

$$\|(u_j)\| \leq K \|(f_j)\| \text{ quelle que soit la source } f.$$

Stabilité L^2 et convergence en stationnaire

On utilise l'approche d'inégalité d'énergie.

Norme L^2 discrète: $\|(u_j)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^N \Delta x |u_j|^2}$.

Lemme 1. La solution discrète vérifie

$$\nu \sum_{j=1}^N \frac{(u_j - u_{j-1})^2}{\Delta x} + \sum_{j=1}^N \Delta x \sigma_j (u_j)^2 = \sum_{j=1}^N \Delta x u_j f_j.$$

Lemme 2. Inégalité de Poincaré discrète: pour tout vecteur (v_j) avec $v_0 = v_{N+1} = 0$

$$\sum_{j=1}^N \Delta x (v_j)^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Delta x \left(\frac{v_j - v_{j-1}}{\Delta x} \right)^2.$$

Conclusion: le schéma est stable L^2 car $\|(u_j)\|_2 \leq \frac{1}{2\nu} \|(f_j)\|_2$.

Preuves des Lemmes 1 et 2

On multiplie le schéma par $\Delta x u_j$ et on "intègre par parties" en discret (réarrangement de la somme):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \Delta x \nu u_j \frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{(\Delta x)^2} &= \nu \sum_{j=1}^N u_j \frac{(u_j - u_{j-1}) - (u_{j+1} - u_j)}{\Delta x} \\ &= \nu \sum_{j=1}^N u_j \frac{(u_j - u_{j-1})}{\Delta x} - \nu \sum_{j=2}^{N+1} u_{j-1} \frac{(u_j - u_{j-1})}{\Delta x} = \nu \sum_{j=1}^N \frac{(u_j - u_{j-1})^2}{\Delta x} \end{aligned}$$

Inégalité de Poincaré:

$$v_j = \sum_{k=1}^j (v_k - v_{k-1}) \quad \Rightarrow \quad (v_j)^2 \leq j \sum_{k=1}^N (v_k - v_{k-1})^2$$

Or $\sum_{j=1}^N j = N(N+1)/2 \leq (2(\Delta x)^2)^{-1}$. D'où le résultat.

Convergence

Théorème de Lax. Le schéma converge au sens où la fonction

$$u^{\Delta x}(x) = u_j \quad \text{si } x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2} \quad \text{avec} \quad x_{j+1/2} = (j + 1/2)\Delta x$$

converge vers la solution exacte u , i.e.,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|u^{\Delta x} - u\|_{L^2(0,1)} = 0.$$

Preuve. Supposons que $u \in C^4[0, 1]$ (c'est vrai si f et σ sont régulières). La consistance du schéma donne

$$\left| \frac{-u(x - \Delta x) + 2u(x) - u(x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} + u''(x) \right| \leq \frac{(\Delta x)^2}{12} \max_{x \in [0,1]} |u''''(x)|$$

Soit l'erreur discrète $e_j = u_j - u(x_j)$ qui vérifie

$$\nu \frac{-e_{j-1} + 2e_j - e_{j+1}}{(\Delta x)^2} + \sigma_j e_j = \epsilon_j \quad 1 \leq j \leq N$$

avec les conditions aux limites, $e_0 = e_{N+1} = 0$, et le second membre

$$|\epsilon_j| \leq \frac{(\Delta x)^2}{12} \max_{x \in [0,1]} |u''''(x)|$$

On déduit de l'estimation d'énergie discrète

$$\|(e_j)\|_2 \leq \frac{1}{2\nu} \|(\epsilon_j)\|_2 \leq \frac{(\Delta x)^2}{24\nu} \max_{x \in [0,1]} |u''''(x)|$$

Enfin, $\|(e_j)\|_2 = \|u^{\Delta x} - P^{\Delta x}u\|_{L^2(0,1)}$ et $\|u - P^{\Delta x}u\|_{L^2(0,1)} \leq C\Delta x$ où

$$P^{\Delta x}u(x) = u(x_j) \quad \text{si } x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}.$$

Stabilité L^∞ et convergence en stationnaire

Lemme. Le schéma est stable L^∞ .

Preuve. Vérifions le principe du maximum discret. On suppose $f \geq 0$; montrons que $u_j \geq 0$.

S'il existe $u_j < 0$, soit j_0 le plus petit indice tel que $u_{j_0} \leq u_j$ pour tout j et $u_{j_0} < u_{j_0-1}$ (existe forcément car $u_0 = 0$). On a

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_{j_0} (\Delta x)^2 = \nu (-u_{j_0-1} + 2u_{j_0} - u_{j_0+1}) + \sigma_{j_0} (\Delta x)^2 u_{j_0} \\ &= \nu ((u_{j_0} - u_{j_0-1}) + (u_{j_0} - u_{j_0+1})) + \sigma_{j_0} (\Delta x)^2 u_{j_0} < 0 \end{aligned}$$

Contradiction, donc $u_j \geq 0$.

Théorème de Lax. Le schéma converge au sens où

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \max_{1 \leq j \leq N} |u(x_j) - u_j| = 0.$$

(3) Equation de transport

On suppose $V > 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pour } (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t, 0) = g(t) \text{ pour } t \in \mathbb{R}_*^+ \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0, 1). \end{array} \right.$$

Si on étend $u_0(x)$ par 0 en dehors de l'intervalle $(0, 1)$, et $g(t)$ par 0 pour $t < 0$, la **solution exacte** est

$$u(t, x) = u_0(x - Vt) + g(t - \frac{x}{V}).$$

Schéma décentré amont (upwind)

Un bon schéma: **schéma décentré amont**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{si } V > 0.$$

On va chercher l'information en **remontant le courant** (**une des idées majeures de l'analyse numérique**).

Autres schémas possibles: Lax-Friedrichs (trop diffusif), Lax-Wendroff (précis mais dispersif).

Condition aux limites du schéma: $u_0^n = g(t^n)$.

Analyse du schéma décentré amont

Lemme. Le schéma décentré amont est stable L^∞ sous la condition CFL

$$|V|\Delta t \leq \Delta x.$$

Il est précis d'ordre 1 seulement (sauf si $|V|\Delta t = \Delta x$). Il est donc convergent.

Preuve: on peut le réécrire sous la forme

$$u_j^{n+1} = \frac{V\Delta t}{\Delta x} u_{j-1}^n + \left(1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^n,$$

qui est une combinaison convexe si $0 \leq V\Delta t \leq \Delta x$, donc il vérifie un **principe du maximum discret**. L'erreur de troncature est

$$E = \frac{|V|}{2} (-\Delta x + |V|\Delta t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2).$$

Exercice. Montrer que le schéma explicite **centré**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \text{ est instable en norme } L^2.$$

Le schéma diamant (ou en croix), dû à Carlson

C'est un schéma centré qui utilise les inconnues intermédiaires

$$u_{j+1/2}^{n+1/2} \approx u(t^{n+1/2}, x_{j+1/2}).$$

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0, \\ u_j^{n+1} + u_j^n = u_{j+1/2}^{n+1/2} + u_{j-1/2}^{n+1/2}. \end{cases}$$

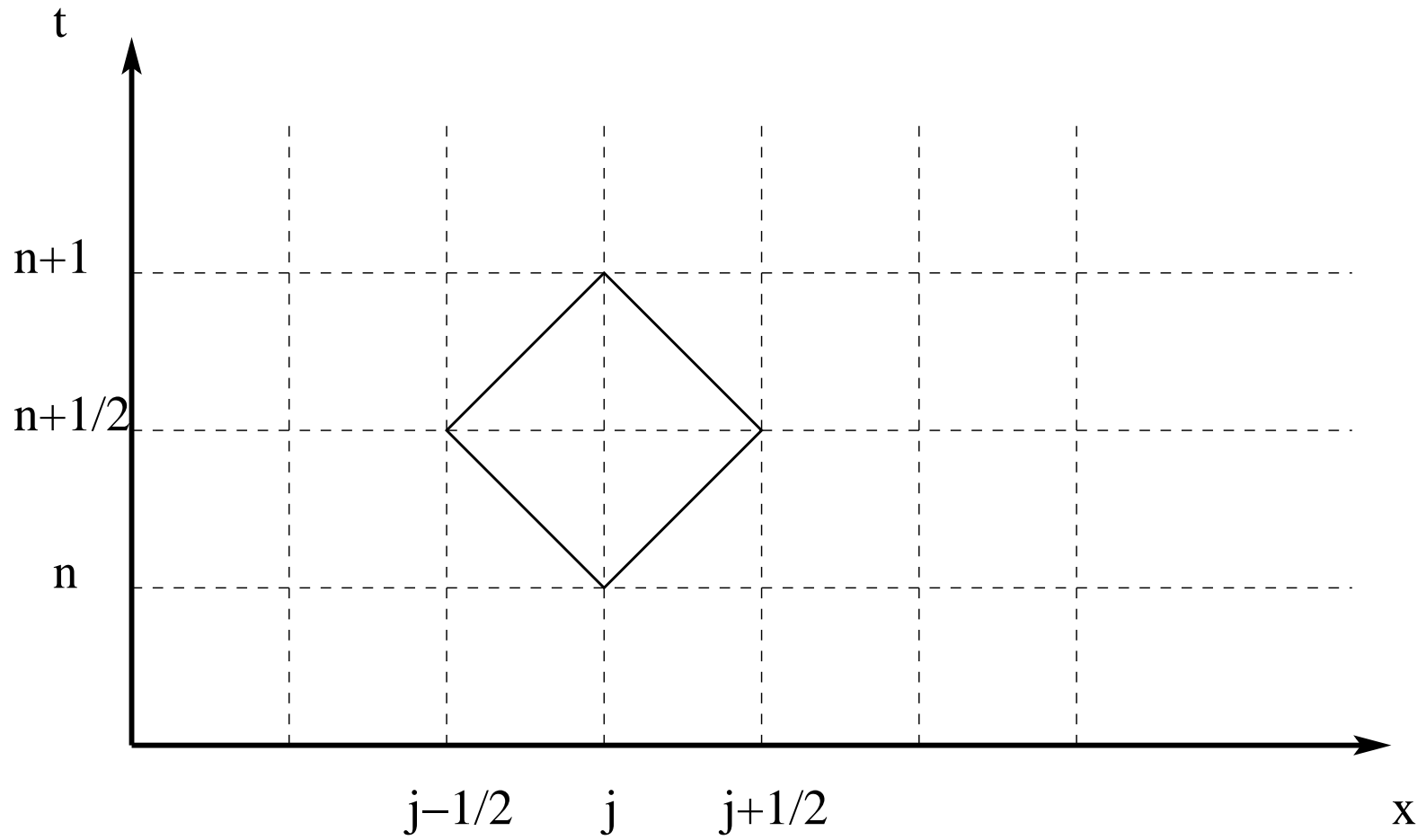
La deuxième relation est dite "diamant".

2 fois plus d'inconnues, mais 2 fois plus d'équations aussi !

Schéma très populaire pour Boltzmann linéaire.

Condition aux limites du schéma: $u_0^n = g(t^n)$.

Origine du nom diamant (ou croix)



Résolution du schéma diamant

On élimine l'inconnue $u_j^{n+1} = u_{j+1/2}^{n+1/2} + u_{j-1/2}^{n+1/2} - u_j^n$ pour se ramener au schéma (implicite à première vue)

$$u_{j+1/2}^{n+1/2} \left(1 + \frac{V \Delta t}{\Delta x} \right) + u_{j-1/2}^{n+1/2} \left(1 - \frac{V \Delta t}{\Delta x} \right) = 2u_j^n,$$

qui permet de calculer les valeurs $(u_{j+1/2}^{n+1/2})_j$ en fonction des valeurs précédentes $(u_j^n)_j$.

Si $V > 0$ on calcule $u_{1/2}^{n+1/2}$ en fonction de la condition aux limites g et de la relation diamant (voir polycopié).

Schéma implicite ou pas ?

La résolution du schéma est équivalente au système linéaire $Au^{n+1/2} = 2u^n$

$$A = \begin{pmatrix} 1+c & 0 & & & 0 \\ 1-c & 1+c & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-c & 1+c & 0 \\ 0 & & & 1-c & 1+c \end{pmatrix} \quad \text{avec } c = \frac{V\Delta t}{\Delta x}.$$

Pour $V > 0$, la matrice A est inversible et **triangulaire !**

Méthode des caractéristiques discrète: on calcule de proche en proche les valeurs $u_{j+1/2}^{n+1/2}$ pour j croissant (si $V > 0$).

En pratique le schéma est donc explicite !

Analyse du schéma diamant

Lemme 1. Le schéma diamant est consistant et précis à l'ordre 2 en espace et temps.

Preuve. Faire un développement de Taylor autour du point $(t^{n+1/2}, x_j)$.

Lemme 2. Le schéma diamant est **inconditionnellement** stable et convergent en norme L^2 .

Lemme 3 (inégalité d'énergie). La solution $u(t, x)$ vérifie

$$\int_0^1 u(t, x)^2 dx \leq \int_0^1 u_0(x)^2 dx + \int_0^t V g(t)^2 dt.$$

Preuve. Multiplier l'équation de transport par u et intégrer par parties.

Analyse du schéma diamant (suite)

Preuve du lemme 2. Intégration par parties discrètes.

On multiplie le schéma par $(u_j^{n+1} + u_j^n)$ et on utilise la relation diamant pour le deuxième terme

$$\frac{(u_j^{n+1})^2 - (u_j^n)^2}{\Delta t} + V \frac{(u_{j+1/2}^{n+1/2})^2 - (u_{j-1/2}^{n+1/2})^2}{\Delta x} = 0.$$

En sommant sur j , puisque la somme est "téléscopique" en $j + 1/2$, on obtient

$$\sum_{j=1}^N (u_j^{n+1})^2 \leq \sum_{j=1}^N (u_j^n)^2 + \frac{V \Delta t}{\Delta x} (u_{1/2}^{n+1/2})^2.$$

On somme ensuite sur n , avec encore une somme "téléscopique",

$$\sum_{j=1}^N \Delta x (u_j^{n+1})^2 \leq \sum_{j=1}^N \Delta x (u_j^0)^2 + V \sum_{k=0}^n \Delta t (u_{1/2}^{k+1/2})^2$$

Analyse du schéma diamant (fin)

La condition aux limites d'entrée est (tout calcul fait)

$$\begin{aligned} u_{1/2}^{n+1/2} &= \frac{g(t_n) + g(t_{n+1})}{2} + \frac{g(t_n) - g(t_{n+1})}{2 \frac{V\Delta t}{\Delta x}} \\ &= g(t_{n+1/2}) - \frac{\Delta x}{2V} g'(t_{n+1/2}) + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2 + (\Delta t)^2 \Delta x\right), \end{aligned}$$

d'où la stabilité L^2

$$\sum_{j=0}^N \Delta x (u_j^{n+1})^2 \leq \sum_{j=0}^N \Delta x (u_j^0)^2 + V \sum_{k=0}^n \Delta t (g^{k+1/2})^2 + \mathcal{O}\left(\Delta x + (\Delta t)^2\right)$$

Théorème de Lax. Le schéma converge en norme L^2 .

Démonstration. Voir polycopié.

(4) Transport stationnaire

Géométrie de **plaque infinie** (“slab”) dans le cas mono-groupe isotrope sans collisions

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial x}(x, \mu) + \sigma(x)u(x, \mu) = f(x, \mu) \text{ pour } (x, \mu) \in (-\ell, +\ell) \times (-1, +1) \\ u(-\ell, \mu) = 0 \text{ pour } \mu > 0, \quad u(+\ell, \mu) = 0 \text{ pour } \mu < 0, \end{cases}$$

où $\sigma(x) \geq 0$ est la section efficace d'absorption, $f(x, \mu)$ est un terme source.

On note $\mu_k \neq 0$ les vitesses discrètes.

On raisonne “vitesse par vitesse”: pour fixer les idées on suppose $\mu_k > 0$.

Attention ! Changement de notations.

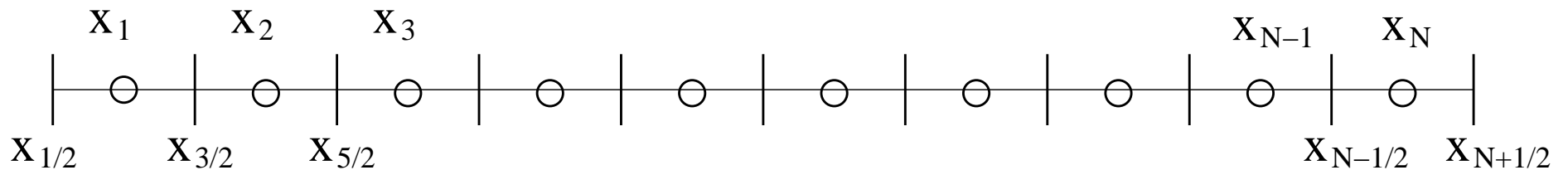
Pour être conforme aux notations usuelles dans la résolution de l'équation de Boltzmann, on change notre définition du maillage.

Les points du maillage délimitent des mailles,

$$x_{j+1/2} = -\ell + j\Delta x \text{ pour } j \in \{0, 1, \dots, N\} \text{ et } \Delta x = \frac{2\ell}{N},$$

Les points milieux sont maintenant définis comme centre des mailles par

$$x_j = -\ell + (j - 1/2)\Delta x \text{ pour } j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$



Ce changement s'interprète comme une méthode de volumes finis.

Schéma diamant stationnaire

Avec la notation $\sigma_j \approx \sigma(x_j)$ et $f_j^k \approx f(x_j, \mu_k)$

$$\mu_k \frac{u_{j+1/2}^k - u_{j-1/2}^k}{\Delta x} + \sigma_j u_j^k = f_j^k \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$$

avec la formule “diamant”

$$u_j^k = \frac{u_{j+1/2}^k + u_{j-1/2}^k}{2}.$$

Condition aux limites

$$u_{1/2}^k = 0 \text{ pour } \mu_k > 0$$

Méthode des caractéristiques discrètes: on calcule les valeurs $u_{j+1/2}^k$ pour j croissant (équivalent à la résolution d'un système linéaire triangulaire).

Schéma diamant stationnaire (suite)

On doit **éviter la valeur 0** pour la vitesse discrète μ_k si $\sigma_j \equiv \sigma$ peut s'annuler.

$$u_{j+1/2}^k = \frac{(2\mu_k - \sigma_j \Delta x) u_{j-1/2}^k + 2\Delta x f_j^k}{2\mu_k + \sigma_j \Delta x}$$

$$u_{j+1/2}^k = \frac{2\Delta x}{2\mu_k + \sigma \Delta x} \sum_{i=1}^j (A_k)^{j-i} f_i^k \quad \text{avec} \quad A_k = \frac{2\mu_k - \sigma \Delta x}{2\mu_k + \sigma \Delta x}$$

Lemme. Le schéma diamant est consistant et précis d'ordre 2 en espace. Il est inconditionnellement stable L^∞ (donc convergent), au sens où

$$|u_{j+1/2}^k| \leq \frac{2\ell}{|\mu_k|} \max_{x \in (-\ell, +\ell)} |f(x, \mu_k)| \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Il vérifie le principe du maximum discret sous la condition (restrictive)

$$\Delta x \leq \frac{2 \min_k |\mu_k|}{\sigma}.$$

Analyse du schéma diamant

Remarque. Si on tient absolument au principe du maximum discret il faut utiliser le schéma décentré amont ou bien une hybridation de ce schéma avec celui diamant.

Remarque. Si $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$, on peut montrer que le schéma diamant est stable L^2 .