ECOLE POLYTECHNIQUE
3ème année, MAP 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Examen écrit du 14 Mars 2012 (2 heures)

1 Transport et diffusion : 10 points

Etant donné trois nombres réels $\epsilon > 0$, $U_- > 0$ et $U_+ > 0$, soit $u_\epsilon \equiv u_\epsilon(x,\mu)$ la solution du problème aux limites

$$(T) \qquad \begin{cases} \mu\partial_x u_\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}(u_\epsilon - \langle u_\epsilon\rangle) = 0\,, & |x| < 1\,,\ |\mu| < 1\,, \\ u_\epsilon(-1,+\mu) = U_-\,, & 0 < \mu < 1\,, \\ u_\epsilon(+1,-\mu) = U_+\,, & 0 < \mu < 1\,, \end{cases}$$

où

$$\langle u_\epsilon\rangle(x) = \int_{-1}^{1} u_\epsilon(x,\mu)\frac{d\mu}{2}\,.$$

On admettra que le problème (T) admet, pour tout $\epsilon > 0$, une unique solution $u_\epsilon \in L^\infty([-1,1]^2)$ telle que $x \mapsto u_\epsilon(x,\mu)$ soit de classe C^1 sur $[-1,1]$.

1. Chercher une solution de (T) série formelle en puissances de ϵ de la forme
$$u_\epsilon(x,\mu) = \sum_{k\geq 0} \epsilon^k u_k(x,\mu)\,.$$
Préciser u_0, u_1 et u_2. Ecrire le problème aux limites de diffusion satisfait par u_0.

2. On pose
$$U(x) = \frac{U_+ + U_-}{2} + \frac{U_+ - U_-}{2}x\,, \quad |x| < 1\,.$$
Ecrire le problème vérifié par $v_\epsilon(x,\mu) = u_\epsilon(x,\mu) - U(x) + \epsilon\mu U'$ où U' est la dérivée (constante) de $U(x)$ par rapport à x.

3. Montrer que $\|v_\epsilon - \langle v_\epsilon\rangle\|^2_{L^2([-1,1]^2)} \leq C_0\epsilon^3$, où C_0 est une constante que l'on donnera en fonction de U_+ et U_-. (On pourra multiplier par v_ϵ chaque membre de l'équation satisfaite par v_ϵ, puis les intégrer en (x,μ) sur $[-1,1]^2$.)

4. On pose $S_\epsilon(x,\mu) = \frac{1}{\epsilon}(v_\epsilon(x,\mu) - \langle v_\epsilon\rangle(x))$. Montrer que
$$|v_\epsilon(x,\mu)| \leq \epsilon|\mu||U'| + \frac{\sqrt{2}}{|\mu|}\left(\int_{-1}^{1} S_\epsilon(x,\mu)^2 dx\right)^{1/2}$$

5. En déduire que, pour $\alpha > 0$,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{1}_{[\alpha,1]}(|\mu|) v_\epsilon(x,\mu)^2 dx d\mu \leq C_1 \epsilon^2 |U'|^2 + \frac{C_2}{\alpha^2} C_0 \epsilon$$

   où C_1 et C_2 sont deux constantes que l'on précisera.

6. Montrer que, pour $\alpha > 0$,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\alpha}^{\alpha} v_\epsilon(x,\mu)^2 dx d\mu \leq 2C_0\epsilon^3 + 8\alpha \|v_\epsilon\|^2_{L^2([-1,1]^2)}$$

7. En déduire que, pour tout $\epsilon \in]0,1]$, l'on a

$$\|u_\epsilon - U(x)\|_{L^2([-1,1]^2)} \leq C_3 |U'| \sqrt{\epsilon}$$

   où C_3 est une constante que l'on précisera.

2 Schéma numérique : 10 points

Soit un coefficient de diffusion $\nu > 0$. On considére l'équation de diffusion dans le domaine $(0,1)$ avec une condition aux limites de Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbf{R}_*^+ \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \text{ pour } t \in \mathbf{R}_*^+ \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0,1), \end{cases} \tag{1}$$

où $u_0(x)$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$. Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x = 1/(N+1) > 0$ (avec N un entier positif), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n \geq 0, j \in \{0, 1, ..., N+1\}.$$

On note u_j^n une approximation discrète au point (t_n, x_j) de la solution exacte $u(t,x)$. Pour un paramètre $\theta \in [0,1]$, on considère le θ-schéma suivant

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \quad & \frac{\nu}{(\Delta x)^2} \Big(\theta (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) \\ & + (1-\theta)(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \Big) = 0 \quad \text{pour } j \in \{1, ..., N\}, \end{aligned} \tag{2}$$

avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$ et la condition aux limites, pour tout $n \geq 1$, $u_0^n = u_{N+1}^n = 0$.

1. Montrer que le schéma (2) est consistant et précis à l'ordre 1 (au moins).

2. On note U^n le vecteur de composantes u_j^n, pour $1 \leq j \leq N$. En multipliant (2) par Δt et en notant $c = \nu \Delta t/(\Delta x)^2$, montrer que le schéma peut se réécrire sous la forme

$$AU^{n+1} = BU^n$$

où A et B sont deux matrices $N \times N$ que l'on précisera, avec A qui est en plus une M-matrice stricte. En déduire qu'il est toujours possible de calculer U^{n+1} en fonction de U^n.

3. Montrer que, sous une condition de type CFL que l'on donnera explicitement, le schéma (2) vérifie le principe du maximum discret. Que peut-on dire de sa convergence en norme L^∞ ?

4. On va désormais étudier la stabilité en norme L^2 du schéma. Montrer que le schéma (2) peut encore s'écrire

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + KU^* = 0, \tag{3}$$

avec $U^* = \theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n$ et K une matrice dont on montrera qu'elle est définie positive. Vérifier aussi que

$$2U^* = (U^{n+1} + U^n) + (2\theta - 1)(U^{n+1} - U^n).$$

5. En multipliant (3) par $2U^*$ montrer que, si $1/2 \leq \theta \leq 1$, le schéma est inconditionnellement stable en norme L^2 au sens où

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta x |u_j^{n+1}|^2 \leq \sum_{j=1}^{N} \Delta x |u_j^0|^2.$$