PRIX YAHYA OULD HAMIDOUNE 2013

NIVEAU SCOLAIRE

NOUAKCHOTT, 28 FÉVRIER 2013
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES

Aucun document n'est autorisé. Les appareils électroniques sont interdits. Le jury portera une attention toute particulière à la qualité de la rédaction (clarté, précision, concision, voire élégance). Les quatre exercices sont indépendants. Les candidats peuvent les traiter dans l'ordre qu'ils souhaitent, chaque exercice ayant la même valeur.

Exercice 1 Soit f une application de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombre réels. On suppose que f est minorée (c'est-à-dire que f n'est jamais inférieure à un certain réel A) et vérifie, pour tout entier relatif n,

$$f(n) \geq \frac{f(n+1)+f(n-1)}{2}.$$

1) Soit Δ la fonction d'accroissement définie par $\Delta(n) = f(n) - f(n-1)$. Montrer que pour tous entiers relatifs m et n, $m \geq n$, on a

$$(m-n)\Delta(m) \leq f(m) - f(n) \leq (m-n)\Delta(n+1).$$

2) En déduire que l'application f est constante.

Exercice 2 On considère dans cet exercice tous les tableaux carrés à 9 cases dans lesquelles sont placés tous les entiers de 1 à 9. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 9 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

À un tel tableau on associe les produits des éléments de ses lignes (56, 72, 90 dans l'exemple ci-dessus) et les produits des éléments de ses colonnes (54, 80, 84 dans l'exemple ci-dessus).

1) Étant donné un tel tableau, montrer qu'il a au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal 72.

2) Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal 72.

3) Étant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal 90.

4) Peut-on améliorer la valeur 90 ?

Exercice 3 Soit n un entier positif qui, lorsqu'il est écrit en base 10, possède les propriétés suivantes :

(i) son dernier chiffre est un 6,

(ii) le nombre m obtenu à partir de n en effaçant ce dernier chiffre (6, donc) et en le plaçant au début du nombre (m a donc le même nombre de chiffres que n) vaut $4n$ (bien lire : 4 fois n).

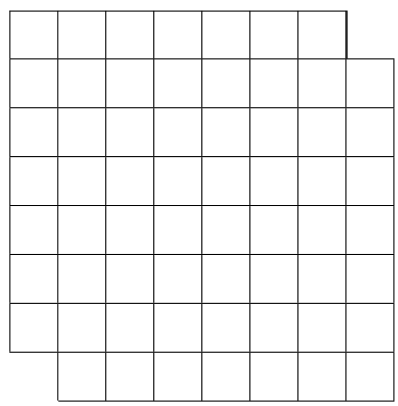
1) Montrer que m finit par un 4.

2) Montrer que n commence par un 1.

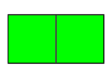
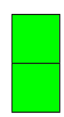
3) Que vaut le plus petit entier n ayant les propriétés (i) et (ii) ?

4) Y en a-t-il d'autres ?

Exercice 4 On considère un plateau de taille 8 sur 8 dont on enlève deux coins opposés de sorte qu'on obtient le plateau à 62 cases suivant :



On souhaite recouvrir ce plateau avec des dominos élémentaires de taille 1 sur 2, qu'on peut tourner d'un quart de tour, donc avec des pièces de forme

 ou 

Par recouvrir, on veut dire que chaque case doit être couverte par un domino (un demi-domino, pour être précis) exactement une fois. Chaque domino doit recouvrir exactement deux cases du plateau.

1) Montrer que ce n'est pas possible.

2) Question difficile : essayer de caractériser les plateaux à deux cases manquantes qui ne sont pas recouvrables par des dominos.