PRIX YAHYA OULD HAMIDOUNE

NIVEAU SCOLAIRE

NOUAKCHOTT, MARS 2012
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES

Aucun document n'est autorisé. Les appareils électroniques sont interdits. Ces exercices sont indépendants. Le jury portera une attention toute particulière à la qualité de la rédaction (clarté, précision, concision, voire élégance). Les quatre exercices sont indépendants. Les candidats peuvent les traiter dans l'ordre qu'ils souhaitent, chaque exercice ayant la même valeur.

Exercice 1 (i) Montrer qu'il existe un polynôme P à coefficients réels et de degré 2 tel que pour tout $x \in [-1, 1]$, on ait

$$|P(x) - |x|| \leq \frac{1}{8}.$$

(ii) Peut-on remplacer $\frac{1}{8}$ par un réel plus petit ?

Exercice 2 Soit α un réel positif ou nul. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}. \end{cases}$$

Exercice 3 Déterminer tous les nombres entiers naturels n tels qu'il existe n nombres entiers naturels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, distincts ou non, vérifiant

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} = 1.$$

Exercice 4 (i) Montrer qu'on ne peut pas recouvrir un disque fermé de rayon 1 du plan $\mathbb{R}^2$ par deux disques fermés de rayon $r < 1$.

(ii) Montrer que c'est en revanche possible avec trois disques fermés. Quelle est la plus petite valeur possible de r permettant une telle configuration ?