PRIX YAHYA OULD HAMIDOUNE

NIVEAU UNIVERSITAIRE

NOUAKCHOTT, 28 FÉVRIER 2013
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES

> *Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse.*
> *Le jury portera une attention particulière à la qualité de la rédaction.*
> *Aucun document n'est autorisé. Les appareils électroniques sont interdits.*

Problème 1 Soit ℓ un entier au moins égal à 1. Dans ce problème, un vecteur $\underline{a}$ de $\mathbb{R}^\ell$ sera appelé *séquence de longueur* ℓ si chacune de ses ℓ coordonnées vaut 1 ou -1. Les coordonnées d'une séquence $\underline{a}$ de longueur ℓ seront numérotées de 0 à $\ell - 1$, $\underline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1})$. On notera $\mathcal{S}_\ell$ l'ensemble des séquences de longueur ℓ. On appellera simplement *séquence*, tout vecteur qui est une séquence de longueur ℓ, pour un certain entier $\ell \geq 1$.

On dira que des séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une *paire complémentaire* si elles ont même longueur ℓ (qui sera appelée dorénavant *longueur de la paire*) et si elles vérifient, dans le cas où $\ell > 1$, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq \ell - 1$, la j-ième condition de corrélation :

$$\sum_{i=0}^{\ell-1-j} (a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j}) = 0.$$

Par convention, tout couple de séquences de longueur 1 est une paire complémentaire. Ainsi, pour tout entier $\ell \geq 1$, la complémentarité d'une paire de longueur ℓ implique $\ell - 1$ conditions de corrélation.

On désigne par $\mathcal{L}$ l'ensemble des entiers ℓ pour lesquels il existe au moins une paire complémentaire de longueur ℓ. Autrement dit, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des longueurs de paires complémentaires. Dans cette partie, on se propose d'étudier certaines propriétés de l'ensemble $\mathcal{L}$.

1. Montrer que 2 appartient à $\mathcal{L}$ et que 3 n'appartient pas à $\mathcal{L}$.
2. Soit ℓ un entier au moins égal à 1. Pour toute séquence, $\underline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1})$, de longueur ℓ, on définit le polynôme $P_{\underline{a}}$ par la formule

$$P_{\underline{a}}(X) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i X^i.$$

Un tel polynôme est appelé *polynôme séquentiel*.

(a) Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences. On considère la fonction définie pour x réel, $x \neq 0$, par

$$x \mapsto P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}).$$

Montrer que si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ ne sont pas deux séquences de même longueur, cette fonction n'est pas bornée sur $]0, +\infty[$.

Montrer que deux séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de même longueur forment une paire complémentaire si et seulement si cette fonction est constante. Exprimer cette constante en fonction de la longueur ℓ de la paire complémentaire $\underline{a}$, $\underline{b}$.

(b) Montrer que si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont des séquences de même longueur, $P_{\underline{a}}(1)$ et $P_{\underline{b}}(1)$ sont des entiers de même parité. En déduire que tout élément de $\mathcal{L}$ peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.

(c) Montrer que le complémentaire de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{N}$ est un ensemble infini [on pourra étudier le reste de la division par 4 d'un carré d'entier].

3. Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences de même longueur. On pose $U = \frac{1}{2}(P_{\underline{a}} + P_{\underline{b}})$ et $V = \frac{1}{2}(P_{\underline{a}} - P_{\underline{b}})$. Montrer que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une paire complémentaire si et seulement si la fonction

$$x \mapsto U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1})$$

est constante sur son domaine de définition.

4. Démontrer, pour toute séquence $\underline{v}$ de longueur paire $2m$ ($m \in \mathbb{N}$, non nul), l'équivalence des assertions suivantes :
   (i) 4 divise la somme $v_0 + v_1 + \ldots + v_{2m-1}$,
   (ii) le nombre de coordonnées de $\underline{v}$ égales à -1 a la même parité que m,
   (iii) $v_0 v_1 \ldots v_{2m-1} = (-1)^m$.

5. Soit $\ell \in \mathcal{L}$, $\ell \geq 2$, et soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences qui forment une paire complémentaire de longueur ℓ. Pour tout entier i, $1 \leq i \leq \ell - 1$, on pose $x_i = a_i b_i$.

   (a) Montrer que, pour tout entier j, $1 \leq j \leq \ell - 1$,

$$\prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k x_{k+j} = (-1)^{\ell-j}$$

   [considérer la somme des coordonnées de la séquence $(a_0 a_j, \ldots, a_{\ell-1-j} a_{\ell-1}, b_0 b_j, \ldots, b_{\ell-1-j} b_{\ell-1})$]

   (b) En déduire que, pour tout entier j, $0 \leq j \leq \ell - 1$,

$$x_j x_{\ell-1-j} = -1.$$

   (c) Montrer que tout élément ℓ de $\mathcal{L}$, $\ell \geq 2$, est pair.

Exercice 1
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement décroissante et telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} \, dx$$

est divergente.

Exercice 2
Soit I un intervalle réel et $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose qu'une suite de polynômes $(p_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers u. La fonction u est elle un polynôme ?
2. On suppose qu'une suite de polynômes $(p_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers u. La fonction u est elle un polynôme ?