PRIX YAHYA OULD HAMIDOUNE

Correction de l'épreuve
Niveau Universitaire

Nouakchott, 28 février 2013

Sommaire

L'épreuve était constituée de trois parties

Problème

Question 1

- Pour $\ell = 2$, il y a une seule condition
$$a_0 a_1 + b_0 b_1 = 0.$$
$\underline{a} = (1, -1)$ et $\underline{b} = (1, 1)$ font l'affaire. Donc $2 \in \mathcal{L}$.
- Pour $\ell = 3$, il y a deux conditions :
$$\begin{aligned} a_0 a_2 + b_0 b_2 &= 0 \qquad (1) \\ (a_0 a_1 + b_0 b_1) + (a_1 a_2 + b_1 b_2) &= 0. \qquad (2) \end{aligned}$$
De la relation (1), on déduit que soit $a_0 a_2 = 1$ et $b_0 b_2 = -1$, soit $a_0 a_2 = -1$ et $b_0 b_2 = 1$.
Dans le premier cas, on a $b_2 = -b_0$ et l'équation (2) devient
$$a_1 (a_0 + a_2) = 0,$$
soit $a_0 + a_2 = 0$, ce qui est impossible puisqu'on a supposé $a_0 a_2 = 1$. Conclusion : $3 \notin \mathcal{L}$.

Problème

Question 1

- Pour $\ell = 2$, il y a une seule condition

$$a_0 a_1 + b_0 b_1 = 0.$$

$\underline{a} = (1, -1)$ et $\underline{b} = (1, 1)$ font l'affaire. Donc $2 \in \mathcal{L}$.

- Pour $\ell = 3$, il y a deux conditions :

$$\begin{aligned} a_0 a_2 + b_0 b_2 &= 0 && (1) \\ (a_0 a_1 + b_0 b_1) + (a_1 a_2 + b_1 b_2) &= 0. && (2) \end{aligned}$$

De la relation (1), on déduit que soit $a_0 a_2 = 1$ et $b_0 b_2 = -1$, soit $a_0 a_2 = -1$ et $b_0 b_2 = 1$.
Dans le premier cas, on a $b_2 = -b_0$ et l'équation (2) devient

$$a_1(a_0 + a_2) = 0,$$

soit $a_0 + a_2 = 0$, ce qui est impossible puisqu'on a supposé $a_0 a_2 = 1$. Conclusion : $3 \notin \mathcal{L}$.

Problème

Question 2 (a)

Notons, pour $x \neq 0$

$$\varphi_{\underline{a}}(x) = P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}), \quad \varphi_{\underline{b}}(x) = P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}), \quad \varphi_{\underline{a},\underline{b}} = \varphi_{\underline{a}}+\varphi_{\underline{b}}.$$

Soient $\underline{a}$ une séquence de longueur ℓ et $\underline{b}$ est une séquence de longueur ℓ'.

- Au voisinage de l'infini, on a

$$\varphi_{\underline{a}}(x) \sim a_{\ell-1}a_0x^{\ell-1} \quad \text{et} \quad \varphi_{\underline{b}}(x) \sim b_{\ell'-1}b_0x^{\ell'-1}$$

Par conséquent, si $\ell \neq \ell'$, on a

$$\varphi_{\underline{a},\underline{b}}(x) \sim a_{\ell''-1}a_0x^{\ell''-1} \qquad \ell'' = \max(\ell, \ell') > 1$$

et la fonction $\varphi_{\underline{a},\underline{b}}$ n'est pas bornée.

- On a le même résultat au voisinage de 0, puisque $\varphi_{\underline{a},\underline{b}}(x) = \varphi_{\underline{a},\underline{b}}(1/x)$.
- **Conclusion** : si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ ne sont pas deux séquences de même longueur, la fonction $\varphi_{\underline{a},\underline{b}}$ n'est pas bornée sur $]0, +\infty[$.

Problème

Question 2 (a)

Notons, pour $x \neq 0$

$$\varphi_{\underline{a}}(x) = P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}), \quad \varphi_{\underline{b}}(x) = P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}), \quad \varphi_{\underline{a},\underline{b}} = \varphi_{\underline{a}} + \varphi_{\underline{b}}.$$

Soient $\underline{a}$ une séquence de longueur ℓ et $\underline{b}$ est une séquence de longueur ℓ'.

- Au voisinage de l'infini, on a

  $$\varphi_{\underline{a}}(x) \sim a_{\ell-1}a_0x^{\ell-1} \quad \text{et} \quad \varphi_{\underline{b}}(x) \sim b_{\ell'-1}b_0x^{\ell'-1}$$

  Par conséquent, si $\ell \neq \ell'$, on a

  $$\varphi_{\underline{a},\underline{b}}(x) \sim a_{\ell''-1}a_0x^{\ell''-1} \qquad \ell'' = \max(\ell, \ell') > 1$$

  et la fonction $\varphi_{\underline{a},\underline{b}}$ n'est pas bornée.
- On a le même résultat au voisinage de 0, puisque $\varphi_{\underline{a},\underline{b}}(x) = \varphi_{\underline{a},\underline{b}}(1/x)$.
- **Conclusion** : si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ ne sont pas deux séquences de même longueur, la fonction $\varphi_{\underline{a},\underline{b}}$ n'est pas bornée sur $]0, +\infty[$.

Problème

Question 2 (a)

Notons, pour $x \neq 0$

$$\varphi_{\underline{a}}(x) = P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}), \quad \varphi_{\underline{b}}(x) = P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}), \quad \varphi_{\underline{a},\underline{b}} = \varphi_{\underline{a}} + \varphi_{\underline{b}}.$$

Soient $\underline{a}$ une séquence de longueur ℓ et $\underline{b}$ est une séquence de longueur ℓ'.

- Au voisinage de l'infini, on a

  $$\varphi_{\underline{a}}(x) \sim a_{\ell-1}a_0 x^{\ell-1} \quad \text{et} \quad \varphi_{\underline{b}}(x) \sim b_{\ell'-1}b_0 x^{\ell'-1}$$

  Par conséquent, si $\ell \neq \ell'$, on a

  $$\varphi_{\underline{a},\underline{b}}(x) \sim a_{\ell''-1}a_0 x^{\ell''-1} \qquad \ell'' = \max(\ell, \ell') > 1$$

  et la fonction $\varphi_{\underline{a},\underline{b}}$ n'est pas bornée.
- On a le même résultat au voisinage de 0, puisque $\varphi_{\underline{a},\underline{b}}(x) = \varphi_{\underline{a},\underline{b}}(1/x)$.
- **Conclusion** : si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ ne sont pas deux séquences de même longueur, la fonction $\varphi_{\underline{a},\underline{b}}$ n'est pas bornée sur $]0, +\infty[$.

Problème

Question 2 (a)

On développe $\varphi_{\underline{a}}$ en puissances de x (et de $1/x$)

$$\varphi_{\underline{a}}(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\ell-1} a_i^2}_{\text{constante}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\ell-1}\left[\sum_{i=0}^{\ell-1-k} a_i a_{i+k}\right] x^k}_{\text{polynôme en } x} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\ell-1}\left[\sum_{i=0}^{\ell-1-k} a_i a_{i+k}\right] \frac{1}{x^k}}_{\text{polynôme en } 1/x}$$

On développe de même $\varphi_{\underline{b}}(x)$ et $\varphi_{\underline{a},\underline{b}}(x)$. Cette fonction est constante sur $\mathbb{R}^*$ si et seulement si les coefficients de x^k pour $k \neq 0$ sont tous nuls, *i.e.* pour tout $k = 1, \cdots, \ell - 1$, on a

$$\sum_{i=0}^{\ell-1-k} a_i a_{i+k} + b_i b_{i+k} = 0.$$

Les deux séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de même longueur ℓ forment donc une paire complémentaire

La constante vaut $\sum_{i=0}^{\ell-1} a_i^2 + b_i^2 = 2\ell$.

Problème

Question 2 (b)

$P_{\underline{a}}(1) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i = 2k - \ell$ où k est le nombre de composantes de $\underline{a}$ égales à 1. Donc $P_{\underline{a}}(1)$ et ℓ ont la même parité.
Si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont deux séquences formant une paire complémentaire de longueur ℓ, on a

$$P_{\underline{a}}^2(1) + P_{\underline{b}}^2(1) = 2\ell.$$

Dont on déduit que

$$\ell = \left(\frac{P_{\underline{a}}(1) + P_{\underline{b}}(1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{P_{\underline{a}}(1) - P_{\underline{b}}(1)}{2}\right)^2$$

Comme $P_{\underline{a}}(1)$ et $P_{\underline{b}}(1)$ sont de même parité, la longueur ℓ est bien somme de deux carrés d'entiers.

Problème

Question 2 (c)

On sait que tout $\ell \in \mathcal{L}$ s'écrit $\ell = m_1^2 + m_2^2$ avec $m_i \in \mathbb{N}$.
Or si $m_i = 2k$ alors $m_i^2 \equiv 0[4]$ et pour $m_i = 2k+1$, on a $m_i^2 \equiv 1[4]$. On en déduit que pour tout $\ell \in \mathcal{L}$, on a

$$\ell \equiv 0\,[4] \text{ ou } \ell \equiv 1\,[4] \text{ ou } \ell \equiv 2\,[4]\,.$$

L'ensemble $\{4k+3, k \in \mathbb{N}\}$ ne contient donc aucun élément de $\mathcal{L}$.
Le complémentaire de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{N}$ est un ensemble infini.

Problème

Question 3

On note simplement que

$$U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) = \frac{1}{2}\,\varphi_{\underline{a},\underline{b}}.$$

Problème

Question 4

Soit α le nombre de composantes de $\underline{v}$ égales à -1. On a

$$\sum_{i=0}^{2m-1} v_i = 2(m-\alpha) \quad \text{et} \quad \prod_{i=0}^{2m-1} v_i = (-1)^{\alpha}.$$

Donc

- 4 divise la somme si et seulement si $m-\alpha$ est pair
- le produit vaut $(-1)^m$ si et seulement si m et α sont de même parité.

Problème
Question 4

Soit α le nombre de composantes de $\underline{v}$ égales à -1. On a

$$\sum_{i=0}^{2m-1} v_i = 2(m-\alpha) \quad \text{et} \quad \prod_{i=0}^{2m-1} v_i = (-1)^\alpha.$$

Donc

- 4 divise la somme si et seulement si $m - \alpha$ est pair
- le produit vaut $(-1)^m$ si et seulement si m et α sont de même parité.

Problème

Question 5

1. La séquence

$$(a_0 a_j, \dots, a_{\ell-1-j} a_{\ell-1}, b_0 b_j, \dots, b_{\ell-1-j} b_{\ell-1})$$

   est de longueur paire $2(\ell - j)$. Sa somme est nulle, donc multiple de 4. Par conséquent (par la question précédente)

$$\prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k x_{k+j} = (-1)^{\ell-j}$$

2. On a d'une part $(-1)^{\ell-j} = \prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k x_{k+j}$, d'autre part $(-1)^{\ell-j+1} = \prod_{k=0}^{\ell-j} x_k x_{k+j-1}$. Le produit de ces égalités donne

$$-1 = \prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k x_{k+j} \prod_{k=0}^{\ell-j} x_k x_{k+j-1} = x_{\ell-j} x_{j-1}$$

3. Pour $\ell \in \mathcal{L}$ impair, $\ell = 2j+1$, on aurait par la relation précédente $x_j^2 = -1$ ce qui n'est pas possible. Donc ℓ est pair.

Problème

Question 6

1. On a
$$P_1(X) = 1 + X, \quad Q_1(X) = 1 - X$$
$$P_2(X) = 1 + X + X^2 - X^3, \quad Q_2(X) = 1 + X - X^2 + X^3.$$

2. On peut écrire sous forme matricielle les relations de récurrences
$$\begin{pmatrix} P_{n+1}(\pm 1) \\ Q_{n+1}(\pm 1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P_n(\pm 1) \\ Q_n(\pm 1) \end{pmatrix}, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
D'où
$$\begin{pmatrix} P_n(\pm 1) \\ Q_n(\pm 1) \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} P_1(\pm 1) \\ Q_1(\pm 1) \end{pmatrix}.$$

Problème

Question 6

1. On a
$$P_1(X) = 1 + X, \quad Q_1(X) = 1 - X$$
$$P_2(X) = 1 + X + X^2 - X^3, \quad Q_2(X) = 1 + X - X^2 + X^3.$$

2. On peut écrire sous forme matricielle les relations de récurrences
$$\begin{pmatrix} P_{n+1}(\pm 1) \\ Q_{n+1}(\pm 1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P_n(\pm 1) \\ Q_n(\pm 1) \end{pmatrix}, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
D'où
$$\begin{pmatrix} P_n(\pm 1) \\ Q_n(\pm 1) \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} P_1(\pm 1) \\ Q_1(\pm 1) \end{pmatrix}.$$

Problème
Question 6

1. $P_1(X) = 1 + X$, $Q_1(X) = 1 - X$, $P_2(X) =$, $Q_2(X) =$
2. $\begin{pmatrix} P_n(\pm 1) \\ Q_n(\pm 1) \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} P_1(\pm 1) \\ Q_1(\pm 1) \end{pmatrix}$.
3. Comme $A^{2k} = 2^k I$ et $A^{2k+1} = 2^k A$, on a

$$\begin{pmatrix} P_{2k+1}(\pm 1) \\ Q_{2k+1}(\pm 1) \end{pmatrix} = 2^k \begin{pmatrix} P_1(\pm 1) \\ Q_1(\pm 1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_{2k}(\pm 1) \\ Q_{2k}(\pm 1) \end{pmatrix} = 2^{k-1} A \begin{pmatrix} P_1(\pm 1) \\ Q_1(\pm 1) \end{pmatrix}.$$

D'où

$$P_{2n}(1) = Q_{2n}(1) = 2^n, P_{2n+1}(1) = 2^{n+1}, Q_{2n+1}(1) = 0.$$

$$P_{2n}(-1) = -Q_{2n}(-1) = 2^n, P_{2n+1}(-1) = 0, Q_{2n+1}(-1) = 2^{n+1}.$$

Problème

Question 7

1. On montre par récurrence que P_n et Q_n sont de degré $2^n - 1$.
2. On vérifie que les coefficients des polynômes, dans la base canonique, sont tous égaux à ± 1.
3. On utilise le résultat de la question 3 pour $U = P_n$ et $V(X) = X^{2^n} Q_n(X)$. Comme l'expression

   $$U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) = P_n(x)P_n(x^{-1}) + Q_n(x)Q_n(x^{-1})$$

   est constante (le prouver par récurrence), les polynômes P_n et Q_n forment une paire complémentaire de longueur 2^n, donc $2^n \in \mathcal{L}$.

Problème

Question 7

1. On montre par récurrence que P_n et Q_n sont de degré $2^n - 1$.
2. On vérifie que les coefficients des polynômes, dans la base canonique, sont tous égaux à ± 1.
3. On utilise le résultat de la question 3 pour $U = P_n$ et $V(X) = X^{2^n} Q_n(X)$. Comme l'expression

   $$U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) = P_n(x)P_n(x^{-1}) + Q_n(x)Q_n(x^{-1})$$

   est constante (le prouver par récurrence), les polynômes P_n et Q_n forment une paire complémentaire de longueur 2^n, donc $2^n \in \mathcal{L}$.

Problème

Question 7

1. On montre par récurrence que P_n et Q_n sont de degré $2^n - 1$.
2. On vérifie que les coefficients des polynômes, dans la base canonique, sont tous égaux à ± 1.
3. On utilise le résultat de la question 3 pour $U = P_n$ et $V(X) = X^{2^n} Q_n(X)$. Comme l'expression

   $$U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) = P_n(x)P_n(x^{-1}) + Q_n(x)Q_n(x^{-1})$$

   est constante (le prouver par récurrence), les polynômes P_n et Q_n forment une paire complémentaire de longueur 2^n, donc $2^n \in \mathcal{L}$.

Exercice 1

Tout d'abord notons que les hypothèses sur la fonction f entrainent que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. Supposons que l'intégrale converge et par conséquent que

$$\frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} = 1 - \frac{f(x+1)}{f(x)} \longrightarrow 0.$$

Pour tout $y \geq 0$, on a

$$0 < \frac{f(y+1)}{f(y)} < \frac{1}{f(y)} \int_y^{y+1} f(x)\,dx = \frac{1}{f(y)} \int_y^{\infty} (f(x) - f(x+1))\,dx$$
$$\leq \int_y^{\infty} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)}\,dx.$$

En passant à la limite dans cet encadrement de $\dfrac{f(y+1)}{f(y)}$, on obtient

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{f(y+1)}{f(y)} = 0,$$

ce qui est en contradiction avec la convergence de l'intégrale.

Exercice 2

Si l'intervalle I est borné, le théorème de Weierstrass nous apprend que toute fonction continue sur I est limite uniforme de polynômes. La situation est différente si l'intervalle I n'est pas borné. On suppose par exemple que $I = \mathbb{R}$.

1. Soit $(p_n)_n$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers f. Il existe un rang n_0 à partir duquel

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|p_n - f\|_\infty \leq 1.$$

On en déduit que le polynôme $p_{n+1} - p_n$ est borné puisque

$$\|p_{n+1} - p_n\|_\infty \leq \|p_n - f\|_\infty + \|p_{n+1} - f\|_\infty \leq 2.$$

Or un polynôme borné sur $\mathbb{R}$ est constant. Il existe donc un réel c_n tel que $p_{n+1} = p_n + c_n$. On en déduit que pour tout $n \geq n_0$,

$$p_{n+1} = p_{n_0} + (c_{n_0} + \ldots c_n).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient : $f = p_{n_0} + d$ et donc f est bien un polynôme.

Exercice 2

1. Si une suite de polynômes converge uniformément sur un intervalle non borné vers une fonction f alors f est un polynôme.
2. Si la suite converge simplement, la fonction f n'est pas (forcément) un polynôme. Exemple : la fonction exponentielle est développable en série entière (de rayon de convergence $R = +\infty$) et est donc limite simple de la suite polynomiale formée par ses sommes partielles.

Exercice 2

1. Si une suite de polynômes converge uniformément sur un intervalle non borné vers une fonction f alors f est un polynôme.
2. Si la suite converge simplement, la fonction f n'est pas (forcément) un polynôme. Exemple : la fonction exponentielle est développable en série entière (de rayon de convergence $R = +\infty$) et est donc limite simple de la suite polynomiale formée par ses sommes partielles.

PRIX YAHYA OULD HAMIDOUNE
Nouakchott, 28 février 2013

Merci!