PRIX YAHYA OULD HAMIDOUNE

NIVEAU UNIVERSITAIRE

2ÈME PARTIE

NOUAKCHOTT, MARS 2012

Correction des exercices

Exercice 1 Il s'agit de montrer l'équivalence entre les propriétés

(a) $\exists\sigma > 0$ tel que pour tous vecteurs x, y et z dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle Ax - Az, z - y\rangle \leq \sigma\langle Ax - Ay, x - y\rangle.$$

(b) $\langle Ax, y\rangle \leq \sigma\langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle$ pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$.

(c) $\langle Ax, y\rangle \leq \alpha\langle Ax, x\rangle + \beta\langle Ay, y\rangle$ pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$ avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et $\alpha\beta = \sigma$.

(d) $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$\Big|\langle Ax, y\rangle - \langle Ay, x\rangle\Big| \leq 2\delta\sqrt{\langle Ax, x\rangle}\sqrt{\langle Ay, y\rangle}$$

pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$ avec $\sigma = \frac{1}{4}(\delta^2 + 1)$.

Écartons tout de suite le cas d'une matrice nulle pour laquelle les relations sont trivialement vérifiées. On suppose dans la suite que la matrice A n'est pas nulle. Nous allons montrer les implications et équivalence

$$(a) \Longleftrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (b).$$

Mais d'abord quelques observations sur la relation (a) qui cache bien de propriétés :

- La relation (a) implique que la matrice A est semi-définie positive car pour $z = y = 0$, on obtient
$$0 \leq \sigma\langle Ax, x\rangle$$
et puisque $\sigma > 0$, $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ pour tout vecteur x.
- Il existe au moins un vecteur x pour lequel $\langle Ax, x\rangle > 0$. Si ce n'était pas le cas, on aurait, d'après (a),
$$\langle Ax - Az, z - y\rangle \leq 0.$$

En écrivant cette inégalité pour $w_1 = x - z$ et $y = z - w_2$, puis $y = z + w_2$, on obtient
$$\langle Aw_1, w_2\rangle = 0$$
pour tous vecteurs w_1 et w_2. Ce qui n'est possible que pour une matrice nulle. Or nous avons supposé que la matrice A n'est pas nulle.

- La relation (a) ne peut pas avoir lieu pour une valeur de σ trop petite (sauf dans le cas trivial $A = 0$ où on peut prendre $\sigma = 0$). En effet si on prend dans cette relation $z = \alpha x + (1-\alpha)y$, on obtient
$$(1-\alpha)\alpha\langle A(x-y), x-y\rangle \leq \sigma\langle A(x-y), x-y\rangle.$$
C'est-à-dire, puisqu'on peut avoir $\langle A(x-y), x-y\rangle > 0$ que $(1-\alpha)\alpha \leq \sigma$. Comme cette inégalité doit être vérifiée pour tout α, on doit avoir $\sigma \geq \frac{1}{4}$. Cette minoration de σ sera utilisé par la suite.

1. $(a) \Longleftrightarrow (b)$. En posant $u = x - y$ et $v = z - y$ dans (a), on obtient
$$\langle A(u-v), v\rangle \leq \sigma\langle Au, u\rangle,$$
c'est-à-dire (b). La réciproque est évidente.
2. $(b) \Longrightarrow (c)$. Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha\beta = \sigma$. La relation (b) s'écrit aussi
$$\langle Ax, \frac{y}{\beta}\rangle \leq \alpha\langle Ax, x\rangle + \beta\langle A\frac{y}{\beta}, \frac{y}{\beta}\rangle$$
qui n'est rien d'autre que (c).
3. $(c) \Longrightarrow (d)$. On a déjà noté la positivité. On écrit (c) pour $x = u + v$ et $y = u - v$
$$\langle A(u+v), u-v\rangle \leq \alpha\langle A(u+v), u+v\rangle + \beta\langle A(u-v), u-v\rangle.$$
Le terme de droite est égal à
$$(\alpha+\beta)\{\langle Au, u\rangle + \langle Av, v\rangle\} + (\alpha-\beta)\{\langle Au, v\rangle + \langle Av, u\rangle\}.$$
En particulier pour $\alpha = \beta (= \sqrt{\sigma})$, il vaut $2\sqrt{\sigma}\{\langle Au, u\rangle + \langle Av, v\rangle\}$. Quant au terme de gauche, il vaut
$$\langle Au, u\rangle - \langle Av, v\rangle - \langle Au, v\rangle + \langle Av, u\rangle.$$
On a donc
$$\langle Av, u\rangle - \langle Au, v\rangle \leq (2\sqrt{\sigma}-1)\langle Au, u\rangle + (2\sqrt{\sigma}+1)\langle Av, v\rangle,$$
soit
$$(2\sqrt{\sigma}-1)\langle Au, u\rangle + \{\langle Au, v\rangle - \langle Av, u\rangle\} + (2\sqrt{\sigma}+1)\langle Av, v\rangle \geq 0.$$

La substitution $u \to tu$ avec $t \in \mathbb{R}$ conduit à une inégalité sur un trinôme en t

$$(2\sqrt{\sigma}-1)\langle Au,u\rangle t^2 + \{\langle Au,v\rangle - \langle Av,u\rangle\}\, t + (2\sqrt{\sigma}+1)\langle Av,v\rangle \geq 0.$$

On prend un vecteur u tel que $\langle Au,u\rangle > 0$. Nous avons déjà noté que $2\sqrt{\sigma}-1 \geq 0$. Soit A est symétrique et l'inégalité est trivialement vérifiée Soit A n'est pas symétrique et il faut alors que $2\sqrt{\sigma}-1 > 0$ $\boxed{\text{vérifier cette partie, svp !}}$. Le coefficient de t^2 est strictement positif. On en déduit que l'inégalité n'est vraie que si "$\Delta \leq 0$", c'est-à-dire

$$|\langle Au,v\rangle - \langle Av,u\rangle|^2 \leq 4\left[(2\sqrt{\sigma}-1)\langle Au,u\rangle\right]\left[(2\sqrt{\sigma}+1)\langle Av,v\rangle\right].$$

On obtient (d) en posant $\delta^2 = 4\sigma - 1$.

4. $(d) \Longrightarrow (b)$. Partant de

$$\Big|\langle Ax,y\rangle - \langle Ay,x\rangle\Big|^2 \leq 4\delta^2\langle Ax,x\rangle\langle Ay,y\rangle = 4ab$$

avec $a = (2\sqrt{\sigma}-1)\langle Ax,x\rangle$ et $b = (2\sqrt{\sigma}+1)\langle Ay,y\rangle$ et notant que $4ab \leq (a+b)^2$, on obtient

$$\Big|\langle Ax,y\rangle - \langle Ay,x\rangle\Big|^2 \leq \Big((2\sqrt{\sigma}-1)\langle Ax,x\rangle + (2\sqrt{\sigma}+1)\langle Ay,y\rangle\Big)^2.$$

Soit

$$\langle Ax,y\rangle - \langle Ay,x\rangle \leq (2\sqrt{\sigma}-1)\langle Ax,x\rangle + (2\sqrt{\sigma}+1)\langle Ay,y\rangle$$

ou

$$\langle Ax,y\rangle - \langle Ay,x\rangle + \langle Ax,x\rangle - \langle Ay,y\rangle \leq 2\sqrt{\sigma}\langle Ax,x\rangle + 2\sqrt{\sigma}\langle Ay,y\rangle.$$

Le terme de droite est égal à

$$\sqrt{\sigma}\langle A(x+y),x+y\rangle + \sqrt{\sigma}\langle A(x-y),x-y\rangle$$

et le terme de gauche à

$$\langle A(x-y),x+y\rangle.$$

Donc

$$\langle A(x-y),x+y\rangle \leq \sqrt{\sigma}\langle A(x+y),x+y\rangle + \sqrt{\sigma}\langle A(x-y),x-y\rangle.$$

Posant $u = x-y$ et $v = x+y$, on obtient

$$\langle Au,v\rangle \leq \sqrt{\sigma}\langle Av,v\rangle + \sqrt{\sigma}\langle Au,u\rangle.$$

Enfin, la substitution $v \to v/\sqrt{\sigma}$ donne (b).

Exercice 2 On note que puisque

$$P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = 1,$$

les polynômes Pet Q sont premiers entre eux (identité de Bézout). En soustraiant les deux identités

$$\begin{aligned} P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) &= 1, \\ P(x-1)Q(x) - P(x)Q(x-1) &= 1, \end{aligned}$$

on obtient

$$P(x)\left(Q(x+1) + Q(x-1)\right) = Q(x)\left(P(x+1) + P(x-1)\right).$$

Comme P et Q n'ont pas de diviseurs communs, $P(x)$ doit diviser $P(x+1) + P(x-1)$: il existe donc un polynôme p tel que $P(x+1)+P(x-1) = p(x)P(x)$. En comparant les degrés des polynômes et leurs coefficients directeurs, on voit que p est constant, égal à 2 :

$$P(x+1) + P(x-1) = 2P(x).$$

Posons $r(x) = P(x+1) - P(x)$ et $s(x) = Q(x+1) - Q(x)$. On a

$$r(x+1) = P(x+2) - P(x+1) = 2P(x+1) - P(x) - P(x+1) = P(x+1) - P(x) = r(x).$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$r(n) = r(0) = P(1) - P(0)$$

et

$$P(n) = P(n-1) + r(0) = \cdots = P(0) + nr(0) = (P(1) - P(0))n + P(0).$$

Le polynôme $\check{P}$ défini par

$$\check{P}(x) = P(x) - ((P(1) - P(0))x + P(0))$$

s'annule en un nombre infini de points (tous les entiers), c'est donc le polynôme nul. Il existe donc deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = ax + b. \tag{1}$$

Un raisonnement analogue montre qu'il existe deux réels c et d tels que

$$Q(x) = cx + d. \tag{2}$$

Pour que la relation demandée soit vérifiée, il faut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$1 = [ax+b]\,[c(x+1)+d)] - [a(x+1)+b]\,[cx+d]\,.$$

soit

$$bc - ad = 1. \tag{3}$$

les polynômes recherchés sont tous les polynômes du premier degré de la forme (1)-(2) avec la contrainte (3).

Exercice 3 Il est souvent utile de calculer les premiers termes d'une suite :

- $F_1(x) = \int_0^x \ln t\, dt = [t\ln t - t]_0^x = x\ln x - x$
- $F_2(x) = \int_0^x (t\ln t - t)dt = -x^2/2 + \int_0^x t\ln t\, dt$. Calculons la dernière intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^x t\ln t\, dt &= -\int_0^x (t\ln t - t)\, dt + [t(t\ln t - t)]_0^x \\ &= x^2/2 + x(x\ln x - x) - \int_0^x t\ln t\, dt.\end{aligned}$$

D'où $\int_0^x t\ln t\, dt = \frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{1}{2})$

On peut déduire de ces deux calculs qu'il sera nécessaire de savoir calculer les intégrales

$$I_j = \int_0^x t^j \ln t\, dt$$

pour $j \geq 1$ et qu'on peut espérer une relation de la forme

$$F_n(x) = \frac{x^n}{a_n}\,[\ln x - b_n]$$

où $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont des suites de réels à préciser.

1. Calcul des intégrales I_j pour $j \geq 1$.

$$\begin{aligned}I_j &= \int_0^x t^j \ln t\, dt = -j\int_0^x t^{j-1}(t\ln t - t)\, dt + \left[t^j(t\ln t - t)\right]_0^x \\ &= -jI_j + j\int_0^x t^j dt + x^j(x\ln x - x) \\ (1+j)I_j &= x^{j+1}\left[\ln x - \frac{1}{j+1}\right]\end{aligned}$$

On a donc

$$I_j = \frac{x^{j+1}}{j+1}\left[\ln x - \frac{1}{j+1}\right].$$

2. Relation $F_n(x) = \frac{x^n}{a_n}[\ln x - b_n]$.
   - La relation est vraie pour $n = 1$ avec $a_1 = 1$ et $b_1 = 1$.
   - Supposons qu'elle le soit à l'ordre n. On a alors

$$\begin{aligned}
a_n F_{n+1}(x) &= a_n \int_0^x F_n(t)dt = \int_0^x t^n(\ln t - b_n)dt = -\frac{b_n}{n+1}x^{n+1} + J_n \\
&= -\frac{x^{n+1}}{n+1}(b_n + \frac{1}{n+1}) + \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x.
\end{aligned}$$

   Donc

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)a_n}x^{n+1}\left[\ln x - (b_n + \frac{1}{n+1})\right].$$

   On en déduit que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ doivent vérifier

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} &=& (n+1)a_n, \\ b_{n+1} &=& b_n + \frac{1}{n+1}. \end{array}\right.$$

   Soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_n &=& n!, \\ b_n &=& 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}. \end{array}\right.$$

Conclusion :

$$F_n(x) = \frac{x^n}{n!}\left[\ln x - (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})\right].$$

En particulier

$$F_n(1) = -\frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!F_n(1)}{\ln n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{\big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\big) + \ln n}{\ln n} = -1$$

puisque

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = \gamma,$$

la constante d'Euler.

Exercice 4 Posons

$$f(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^r \sin x dx.$$

On a d'une part la majoration

$$f(r) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^r dx = \frac{1}{r+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1},$$

d'autre part la minoration (puisque $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$)

$$f(r) \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{r+1} dx = \frac{1}{r+2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1},$$

et donc l'encadrement

$$\frac{r}{r+2} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r+1} r f(r) \leq \frac{r}{r+1}. \tag{4}$$

On note, en intégrant par parties, que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^r \cos x dx = \frac{1}{r+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{r+1} \sin x dx = \frac{1}{r+1} f(r+1).$$

Par conséquent

$$\frac{r^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^r \sin x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^r \cos x dx} = \frac{2}{\pi} \left[r^\alpha \frac{(r+1)^2}{r} \right] \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r+1} r f(r)}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r+2} (r+1) f(r+1)}.$$

Tenant compte de l'encadrement (4), on voit que pour que la limite recherchée soit finie il faut et il suffit que α soit égal à -1 et dans ce cas, la limite est $L = 2/\pi$.

Exercice 5 En divisant l'inégalité par $[\prod_{k=1}^n a_k]^{1/n}$, et posant $r_i = b_i/a_i$, on a

$$1 + \left[\prod_{k=1}^n r_k\right]^{1/n} \leq \left[\prod_{k=1}^n (1 + r_k)\right]^{1/n}.$$

Posant $r_k = e^{s_k}$, on obtient

$$1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n s_k} \leq \left[\prod_{k=1}^n (1 + e^{s_k})\right]^{1/n}.$$

Prenant le log de chacune des expressions, on a

$$\ln(1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n s_k}) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + e^{s_k}).$$

Ce qui s'écrit en posant $f(x) = \ln(1 + e^x)$

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(s_k),$$

qui est une inégalité de convexité pour la fonction f (appelée inégalité de Jensen). Il reste à vérifier que cette fonction est bien convexe. On a

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = 1 - \frac{1}{1 + e^x}$$

dont on déduit que la fonction f' est croissante, c'est-à-dire que $f'' \geq 0$, *i.e* f est convexe.
