INVARIANTS DE SEIBERG-WITTEN EN GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

DENIS AUROUX - 25-27 MARS 1999

Table des matières

1. Invariants de Seiberg-Witten des variétés symplectiques

1.1. Rappels de géométrie symplectique. (voir [McS1])

Définition 1.1. *Une 2-forme ω sur une variété X est dite* symplectique *si elle est fermée et non-dégénérée, c'est-à-dire si $d\omega = 0$ et si $\omega \wedge \ldots \wedge \omega$ est une forme volume. Un* symplectomorphisme *$f : (X_1, \omega_1) \to (X_2, \omega_2)$ est un difféomorphisme qui vérifie $f^*\omega_2 = \omega_1$.*

En particulier, toute variété symplectique est de dimension paire, et dans le cas où X est compacte la classe $[\omega]$ est un élément non nul de $H^2(X, \mathbb{R})$.

Exemples : structure symplectique standard de $\mathbb{R}^{2n}$, $\omega_0 = \sum dx_i \wedge dy_i$; surfaces de Riemann (ω = forme volume) ; variétés kählériennes (en particulier variétés projectives complexes).

Contrairement à la géométrie riemannienne, en géométrie symplectique il n'y a pas d'invariants locaux :

Théorème 1.2 (Darboux)**.** *Toute variété symplectique de dimension $2n$ est, en chacun de ses points, localement symplectomorphe à un voisinage de 0 dans $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.*

En particulier, en dimension 4, il existe en tout point des coordonnées locales telles que $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ (coordonnées de Darboux).

Théorème 1.3 (Moser). *Soit X une variété compacte, et soit $(\omega_t)_{t\in[0,1]}$ une famille de formes symplectiques sur X appartenant toutes à la même classe de cohomologie. Alors les variétés (X, ω_t) sont toutes symplectomorphes.*

Définition 1.4. *Une* structure presque-complexe *(i.e. $J \in \mathrm{End}(TX)$ vérifiant $J^2 = -1$) est dite* compatible avec ω *si $g(x,y) = \omega(x, Jy)$ est une métrique riemannienne sur X.*

Proposition 1.5. *Toute variété symplectique peut être munie d'une structure presque-complexe compatible. En outre, l'espace des structures presque-complexes compatibles avec ω est contractible.*

Ces structures presque-complexes ne sont en général pas des structures complexes car elles ne sont pas *intégrables*, i.e. on n'a pas $\bar\partial_J^2 = 0$. En particulier il est impossible de définir des coordonnées holomorphes locales. L'obstruction à l'intégrabilité est le *tenseur de Nijenhuis*, qui décrit la partie de type $(0,2)$ de la différentielle d'une $(1,0)$-forme (ou de façon équivalente la partie de type $(0,1)$ du crochet de Lie de deux champs de vecteurs de type $(1,0)$). Lorsque J est intégrable la variété est *kählérienne*.

Si les variétés kählériennes fournissent de nombreux exemples de variétés symplectiques, le cadre symplectique est beaucoup plus vaste. Alors que le premier nombre de Betti d'une variété kählérienne est toujours pair, dans le cas symplectique on a le résultat suivant :

Théorème 1.6 (Gompf [Go]). *Tout groupe finiment présenté peut être réalisé comme le groupe fondamental d'une variété symplectique compacte de dimension 4.*

1.2. **Structures** spin^c **sur une variété symplectique de dimension 4.** Dans toute la suite, (X, ω) est une variété symplectique compacte de dimension 4, que l'on munit d'une structure presque-complexe compatible J et de la métrique riemannienne correspondante g. On vérifie aisément que la 2-forme ω est autoduale ($*\omega = \omega$) et harmonique (en particulier, $b_2^+(X) \geq 1$).

L'existence d'une structure presque-complexe entraîne celle d'une structure spin^c canonique sur X. La raison en est l'existence d'un morphisme naturel $U(2) \to \mathrm{Spin}^c(4)$, obtenu de la façon suivante : on dispose d'une inclusion $j : \mathrm{U}(2) \to \mathrm{SO}(4)$ et de l'application déterminant, ce qui permet de construire le morphisme $j \times \det : \mathrm{U}(2) \to \mathrm{SO}(4) \times S^1$. On vérifie que ce morphisme se relève au revêtement double $\mathrm{Spin}^c(4)$ de $\mathrm{SO}(4) \times S^1$. Ceci permet, à partir du U(2)-fibré principal associé à la structure presque-complexe et à la métrique, de définir naturellement un $\mathrm{Spin}^c(4)$-fibré principal, c'est-à-dire une structure spin^c canonique sur X.

Le fibré en droites déterminant de cette structure spin^c est, par construction, celui qui correspond à la représentation $\det : \mathrm{U}(2) \to S^1$; c'est donc le déterminant du fibré tangent holomorphe, soit le dual K^{-1} du fibré canonique $K = \Lambda^{2,0}T^*X$. Le fibré des spineurs positifs S^+ se scinde en deux sous-fibrés en droites complexes : $S^+ = \mathbb{C} \oplus K^{-1} = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$, tandis que S^- s'identifie au fibré $\Lambda^{0,1}$ des $(0,1)$-formes sur X. Les deux sous-fibrés de S^+ correspondent aux espaces propres de la multiplication de Clifford par ω : la forme symplectique agit sur $\mathbb{C}$ avec la valeur propre $-2i$, et sur K^{-1} avec la valeur propre $+2i$.

Les autres structures spin^c sur X se déduisent de cette structure canonique en "tordant" le fibré des spineurs par un fibré en droites complexes quelconque. Etant donné un fibré en droites E sur X, la structure spin^c correspondante a pour fibrés de spineurs $S^+ = E \oplus (K^{-1} \otimes E)$ et $S^- = \Lambda^{0,1} \otimes E$. La multiplication de Clifford par ω préserve à nouveau la décomposition de S^+, avec les mêmes valeurs propres que précédemment. Enfin, le fibré déterminant correspondant à cette structure spin^c est $L = K^{-1} \otimes E^2$.

Rappelons que la donnée d'une connexion hermitienne ∇_A^L sur le fibré déterminant L de la structure spin^c et de la connexion de Levi-Civita sur TX permet de définir une connexion ∇_A sur le fibré des spineurs S^+. Dans le cas d'une variété kählérienne, les connexions préservent les types des formes, ce qui permet d'écrire la connexion sur $S^+ = E \oplus (K^{-1} \otimes E)$ sous forme diagonale

$$\nabla_A = \begin{pmatrix} \nabla_a & 0 \\ 0 & \nabla'_a \end{pmatrix},$$

où ∇_a et ∇'_a sont des connexions sur E et $K^{-1} \otimes E$ respectivement.

Ce n'est plus vrai dans le cas symplectique, où le défaut d'intégrabilité de la structure presque-complexe introduit des termes non diagonaux dans la connexion : celle-ci se met alors sous la forme

$$\nabla_A = \begin{pmatrix} \nabla_a & -b^* \\ b & \nabla'_a \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

où b est une 1-forme à valeurs dans K^{-1}. Il est important de noter que le choix de la connexion ∇_A^L ne se manifeste que sur les termes diagonaux : en particulier, la 1-forme b ne dépend que de J, mais pas de la connexion ni même de la structure spin^c choisie (b peut en fait s'exprimer à l'aide du tenseur de Nijenhuis). Par ailleurs, dans le cas de la structure spin^c canonique, ∇_a est une connexion sur le fibré en droites trivial, ce qui conduit naturellement à introduire la connexion sur K^{-1} telle que ∇_a soit une connexion triviale, que l'on appellera ∇_{A_0}. La connexion correspondante sur $\mathbb{C} \oplus K^{-1}$ s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} d & -b^* \\ b & \nabla_{A_0} \end{pmatrix}.$$

Dans le cas général, la connexion ∇'_a sur $K^{-1} \otimes E$ est donnée par $\nabla'_a = \nabla_{A_0} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_a$, tandis que $\nabla_A^L = \nabla_{A_0} \otimes 1 + 2.(1 \otimes \nabla_a)$.

On en déduit que les courbures des connexions ∇_a et ∇'_a s'expriment en fonction de la courbure F_A de ∇_A^L à l'aide des relations $F_a = \frac{1}{2}(F_A - F_{A_0})$ et $F'_a = \frac{1}{2}(F_A + F_{A_0})$.

Lemme 1.7 ([T2])**.** *Dans le cas de la structure* spin^c *canonique, la section constante* $u_0 = (1, 0)$ *du fibré* $S^+ = \mathbb{C} \oplus K^{-1}$ *vérifie l'équation* $D_{A_0} u_0 = 0$, *où* D_{A_0} *désigne l'opérateur de Dirac associé à* ∇_{A_0}.

Preuve. On applique D_{A_0} à l'équation $\omega \cdot u_0 + 2i\, u_0 = 0$: dans un repère orthonormé local il vient $(d\omega + d^*\omega) \cdot u_0 + \sum (e^j \cdot \omega \cdot \nabla_{e_j} u_0 + 2i\, e^j \cdot \nabla_{e_j} u_0) = 0$. Comme ω est harmonique et $\nabla_{e_j} u_0 = b_j$, on a $\sum (e^j \cdot \omega \cdot b_j + 2i\, e^j \cdot b_j) = 0$. Comme la forme symplectique agit sur K^{-1} avec la valeur propre $2i$, on en déduit que $\sum e^j \cdot b_j = 0$, soit $D_{A_0} u_0 = 0$. □

Ceci permet de montrer que l'opérateur de Dirac D_{A_0} peut s'exprimer à l'aide des opérateurs $\bar\partial$ et $\bar\partial^*$ (les projections de d et d^* sur $\Lambda^{0,*}$) sous la forme $D_{A_0} = \sqrt{2}(\bar\partial + \bar\partial^*)$. Dans le cas général, l'opérateur de Dirac D_A associé au choix d'une connexion ∇^L_A sur le fibré déterminant L s'écrit

$$D_A = \sqrt{2}(\bar\partial_a + \bar\partial_a^*), \tag{1.2}$$

où $\bar\partial_a$ et $\bar\partial_a^*$ sont les projections sur $\Lambda^{0,*} \otimes E$ des opérateurs d^{∇_a} et d^{*,∇_a} agissant sur les formes différentielles à valeurs dans E.

Néanmoins ces formules doivent être manipulées avec précaution, car l'absence de coordonnées locales holomorphes rend les calculs sur les opérateurs $\bar\partial$ et $\bar\partial^*$ très délicats. Dans de nombreux cas il est en fait préférable de revenir à la définition de l'opérateur de Dirac pour mener à bien les calculs.

1.3. **Invariants de Seiberg-Witten des variétés symplectiques.** (voir [T1]). Les équations de Seiberg-Witten sur une variété compacte X de dimension 4 munie d'une structure spin^c s sont les équations

$$\begin{cases} D_A\psi = 0 \\ F_A^+ = (\psi^* \otimes \psi)_0 + \mu \end{cases} \tag{1.3}$$

où les inconnues sont une connexion hermitienne ∇^L_A sur le fibré déterminant L et un spineur $\psi \in \Gamma(S^+)$. Dans ces équations, D_A désigne l'opérateur de Dirac associé à ∇^L_A, et F^+_A est la partie autoduale de la courbure de la connexion ∇^L_A (c'est une section de $\Lambda^{2,+} \otimes i\mathbb{R}$). La notation $(\psi^* \otimes \psi)_0$ désigne la partie sans trace de l'endomorphisme hermitien $\psi^* \otimes \psi \in \Gamma(\mathrm{End}(S^+))$; on rappelle que la multiplication de Clifford induit un isomorphisme entre $\Lambda^{2,+} \otimes i\mathbb{R}$ et $\mathrm{End}_0^{\mathrm{herm}}(S^+)$, ce qui permet d'identifier implicitement $(\psi^* \otimes \psi)_0$ à une 2-forme autoduale dans cette équation. Le paramètre μ est une section arbitraire de $\Lambda^{2,+} \otimes i\mathbb{R}$, qui doit être choisie de façon générique afin de pouvoir définir un invariant.

Le groupe de jauge $\mathcal{G} = C^\infty(X, U(1))$ agit sur l'espace des solutions par

$$g.(A, \psi) = (A - 2g^{-1}dg, g\,\psi).$$

Cette action est libre dès qu'il n'existe pas de solutions vérifiant $\psi \equiv 0$, ce qui est le cas pour μ générique. L'espace des modules $\mathcal{M}(s)$ est, par définition, le quotient de l'espace des solutions de (1.3) par $\mathcal{G}$. Si $b_2^+(X) \neq 0$ (ce qui est toujours le cas pour une variété symplectique), un choix générique de μ

permet de d'assurer que l'espace des modules est une variété lisse compacte de dimension

$$d(s) = -\frac{1}{4}(2\chi(X) + 3\sigma(X)) + \frac{1}{4}c_1(L)^2.$$

De plus, le choix d'une orientation de la droite déterminant de la cohomologie de X détermine une orientation de $\mathcal{M}(s)$.

Nous donnons maintenant une définition des invariants de Seiberg-Witten étendus qui interviennent dans l'énoncé des résultats de Taubes [T1] : ces invariants permettent d'associer à toute structure spin^c sur X un élément de $\mathbb{Z} \oplus H^1(X) \oplus \Lambda^2 H^1(X) \oplus \cdots \oplus \Lambda^{b_1} H^1(X)$ (la projection sur le premier facteur $\mathbb{Z}$ redonne l'invariant usuel).

Dans le cas où la dimension $d(s)$ est négative (ce qui implique $\mathcal{M}(s) = \emptyset$), l'invariant $SW(s)$ est par définition nul. Dans le cas où $d(s) = 0$, l'espace des modules se compose d'un nombre fini de points affectés de signes ± 1 : l'invariant de Seiberg-Witten est alors l'élément de $\mathbb{Z}$ obtenu en comptant les points de $\mathcal{M}(s)$ avec leur signe.

Lorsque $d(s) > 0$, la définition est plus compliquée et fait intervenir l'espace

$$\mathcal{E} = \{(x, (A, \psi)) \in X \times \mathrm{Conn}(L) \times \Gamma(S^+),\ SW_\mu(A, \psi) = 0\} / \{g \in \mathcal{G},\ g(x) = 1\}.$$

$\mathcal{E}$ est, pour μ générique, un S^1-fibré principal sur $X \times \mathcal{M}$: le slant-produit avec sa classe de Chern $c_1(\mathcal{E})$ définit un morphisme $\phi : H_*(X, \mathbb{Z}) \to H^{2-*}(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$. On définit alors l'invariant $SW(s)$ par

$$\langle SW(s), \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_p \rangle = \int_{\mathcal{M}(s)} \phi(\gamma_1) \wedge \cdots \wedge \phi(\gamma_p) \wedge \phi(\mathrm{pt})^{(d-p)/2}$$

pour tous $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \in H_1(X, \mathbb{Z})$ (cette quantité est toujours nulle si p n'est pas de la même parité que $1 - b_1 + b_2^+$).

Dans le cas où la variété X vérifie $b_2^+(X) \geq 2$, l'invariant $SW(s)$ ainsi défini ne dépend ni du choix de la 2-forme μ, ni du choix de la métrique sur X. En revanche, lorsque $b_2^+(X) = 1$ l'espace des métriques et des perturbations admissibles comporte deux *chambres*, et la valeur des invariants de Seiberg-Witten dépend de la chambre choisie. Soit ω_g une 2-forme autoduale harmonique pour la métrique choisie (ω_g est unique à multiplication par une constante près) : alors les deux chambres correspondent respectivement aux valeurs strictement positives et strictement négatives de la quantité

$$i \int_X \omega_g \wedge \mu - 2\pi[\omega_g] \cdot c_1(L).$$

A l'intérieur de chaque chambre l'invariant de Seiberg-Witten est bien défini indépendamment de la métrique et de μ.

Enfin, notons qu'à toute structure spin^c s on peut associer une structure spin^c duale s^*, dont le fibré déterminant est L^{-1} et le fibré de spineurs positifs est $(S^+)^*$: on peut vérifier que, si (∇_A^L, ψ) est une solution des équations de Seiberg-Witten pour la structure spin^c s et la perturbation μ, alors $((\nabla_A^L)^*, \psi^*)$ est également une solution des équations pour la structure spin^c duale s^* et la perturbation $-\mu$. On en déduit en particulier que les invariants de Seiberg-Witten $SW(s)$ et $SW(s^*)$ sont égaux au signe près lorsque $b_2^+ \geq 2$ (et après changement de chambre dans le cas $b_2^+ = 1$).

Dans le cas d'une variété symplectique, nous avons vu que le fibré des spineurs positifs se met sous la forme $S^+ = E \oplus (K^{-1} \otimes E)$, et que la donnée d'une connexion ∇_A^L sur le fibré déterminant de la structure spin^c est équivalente à celle d'une connexion ∇_a sur le fibré E. Ceci permet de réécrire les équations de Seiberg-Witten de la façon suivante, en notant α et β les deux composantes du spineur ψ :

$$\begin{cases} \bar\partial_a \alpha + \bar\partial_a^* \beta = 0 \\ c(F_A^+) = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 - |\beta|^2 & 2\alpha\beta^* \\ 2\alpha^*\beta & |\beta|^2 - |\alpha|^2 \end{pmatrix} + c(\mu) \end{cases} \tag{1.4}$$

où c est la multiplication de Clifford. La formule donnant la dimension de $\mathcal{M}(s)$ se met sous la forme

$$d(s) = -c_1(K).c_1(E) + c_1(E).c_1(E). \tag{1.5}$$

Cette quantité est toujours paire, et s'annule pour la structure spin^c canonique. En outre, il est possible de définir (de façon relativement compliquée) une orientation canonique de la droite déterminant de la cohomologie de X, et donc une orientation canonique de l'espace des modules $\mathcal{M}(s)$. Enfin, dans le cas où $b_2^+ = 1$ on choisira de se placer dans la *chambre symplectique* ([T1]), qui est celle pour laquelle $i\int_X \omega \wedge \mu - 2\pi[\omega] \cdot c_1(L) > 0$ (il s'agit en particulier de la chambre obtenue en prenant pour perturbation la 2-forme $\mu = -is\omega$ avec $s \gg 0$). Ces conventions permettent de définir sans ambiguïté les invariants de Seiberg-Witten d'une variété symplectique.

Remarque : dans le cadre symplectique, la décomposition du spineur ψ en ses composantes α et β permet d'interpréter de façon élégante la définition des invariants de Seiberg-Witten dans le cas où la dimension de $\mathcal{M}(s)$ est strictement positive. En effet, en tout point $p = (x, [A, \psi])$ de $X \times \mathcal{M}$ on dispose des deux composantes $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ du spineur ψ, qui sont des éléments des droites complexes E_x et $(K^{-1} \otimes E)_x$, définis à l'action de $U(1)$ près. Fixons des trivialisations de ces deux droites complexes. La fibre de $\mathcal{E}$ au point p correspond précisément à l'ensemble des choix de jauge possibles au point x : ainsi, si $\alpha(x) \neq 0$ la condition $\arg \alpha(x) = 0$ définit un élément de $\mathcal{E}_p$ (de même pour $\beta(x)$ s'il est non nul). $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ définissent donc, là où ils ne s'annulent pas, des sections de $\mathcal{E}$ sur $\{x\} \times \mathcal{M}$. On en déduit que la classe $\phi(\mathrm{pt}) \in H^2(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$, qui est précisément $c_1(\mathcal{E}_{|\{x\}\times\mathcal{M}})$, est en fait le dual de Poincaré de la classe fondamentale du cycle dans $\mathcal{M}$ formé des solutions de (1.4) qui vérifient $\alpha(x) = 0$ (ou de façon équivalente $\beta(x) = 0$). La projection de $SW(s)$ sur le facteur $\mathbb{Z}$ s'interprète donc comme le comptage des solutions de (1.4) dont la composante α (ou de façon équivalente la composante β) s'annule en $d/2$ points fixés de X. De même, $\langle SW(s), \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_p \rangle$ compte les solutions de (1.4) dont la composante α s'annule en un point de chacun des lacets γ_i ainsi qu'en $(d-p)/2$ points de X.

1.4. **Le cas des variétés kählériennes.** Le cas des variétés kählériennes, qui a servi de modèle aux résultats de Taubes dans le cas symplectique, est particulièrement simple, comme l'a observé Witten dès 1994 [W]. En effet, les équations de Seiberg-Witten non perturbées se mettent sous la forme

$$\begin{cases} \bar\partial_a \alpha + \bar\partial_a^* \beta = 0 \\ F_A^{2,0} = \alpha\beta^* \\ F_A^\omega = \dfrac{i\omega}{4}(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \\ F_A^{0,2} = \alpha^*\beta \end{cases} \tag{1.6}$$

(où F_A^ω désigne la partie de type $(1,1)$ de F_A^+). Rappelons que les solutions des équations non perturbées correspondent précisément à l'annulation de la *fonctionnelle d'énergie*

$$\begin{aligned} E(A,\psi) &= \int_X |F_A^+ - (\psi^* \otimes \psi)_0|^2 + |D_A\psi|^2 \\ &= \int_X |F_A^+|^2 + |\nabla_A \psi|^2 + \frac{R}{4}|\psi|^2 + \frac{1}{8}|\psi|^4, \end{aligned} \tag{1.7}$$

où R est la courbure scalaire de la métrique choisie sur X. Comme dans le cas Kähler la connexion ∇_A préserve les types des formes, cette fonctionnelle d'énergie vérifie clairement la relation $E(A,(\alpha,\beta)) = E(A,(\alpha,-\beta))$. Ceci implique que si (A,α,β) est solution de (1.6), alors $(A,\alpha,-\beta)$ l'est également.

On en déduit immédiatement que toute solution vérifie $F_A^{2,0} = \alpha\beta^* = 0$ et $F_A^{0,2} = \alpha^*\beta = 0$: en particulier, les connexions considérées sont holomorphes, et les *classes de base* (i.e. les $c_1(L)$ pour lesquels il existe des solutions) sont de type $(1,1)$. En outre, l'annulation de $\alpha^*\beta$ implique que soit $\alpha = 0$ soit $\beta = 0$. Pour déterminer laquelle des deux composantes est nulle, on remarque que

$$8\pi\, c_1(L)\cdot[\omega] = \int_X 4i\, F_A \wedge \omega = \int_X (|\beta|^2 - |\alpha|^2)\omega\wedge\omega,$$

ce qui implique que $\alpha = 0$ lorsque $c_1(L)\cdot[\omega] \geq 0$ tandis que $\beta = 0$ lorsque $c_1(L)\cdot[\omega] \leq 0$.

Quitte à passer à la structure spin^c duale (ce qui revient à remplacer E par $K \otimes E^{-1}$, en échangeant les composantes α et β), on peut se restreindre au cas où $\beta = 0$. L'équation de Dirac donne alors $\bar\partial_a \alpha = 0$, c'est-à-dire que α est une section holomorphe de E.

Afin de déterminer les invariants de Seiberg-Witten d'une variété kählérienne il est nécessaire de travailler avec les équations perturbées, ce qui complique l'interprétation de l'espace des modules. Néanmoins, la description de l'espace des solutions en termes de sections holomorphes du fibré E est l'une des idées essentielles qui ont guidé Taubes dans son étude des invariants de Seiberg-Witten des variétés symplectiques.

Bibliographie. Partie 1 :

[FM] R. Friedman, J.W. Morgan, *Algebraic Surfaces and Seiberg-Witten Invariants*, J. Algebraic Geom. **6** (1997), 445–479.

[Go] R.E. Gompf, *A New Construction of Symplectic Manifolds*, Ann. of Math. **142** (1995), 527–595.

[LM] H.B. Lawson, M.L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton Math. Series **38**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1989.

[McS1] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.

[M] J.W. Morgan, *The Seiberg-Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds*, Mathematical Notes **44**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1996.

[T1] C.H. Taubes, *The Geometry of the Seiberg-Witten Invariants*, Surveys in Diff. Geom., à paraître.

[T2] C.H. Taubes, *The Seiberg-Witten Invariants and Symplectic Forms*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 809–822.

[W] E. Witten, *Monopoles and 4-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 769–796.

2. Invariants de Seiberg-Witten et invariants de Gromov-Witten

2.1. **Premiers résultats dans le cas symplectique.** En identifiant l'ensemble des structures spin^c sur X avec $H^2(X,\mathbb{Z})$, on notera désormais $SW(E)$ l'invariant de Seiberg-Witten correspondant à la structure spin^c obtenue à partir de la structure canonique par tensorisation par le fibré en droites E.

Théorème 2.1 (Taubes [T2],[T3]). *Soit (X,ω) une variété symplectique compacte de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$: alors les invariants de Seiberg-Witten associés à la structure* spin^c *canonique et à la structure duale valent respectivement $SW(\mathbb{C}) = 1$ et $SW(K) = \pm 1$. De plus, si $SW(E) \neq 0$ alors $0 \leq c_1(E)\cdot[\omega] \leq c_1(K)\cdot[\omega]$, ces inégalités étant strictes sauf si $E = \mathbb{C}$ ou $E = K$.*

Dans le cas où $b_2^+ = 1$ (et dans la chambre symplectique), on a encore $SW(\mathbb{C}) = 1$, et si $SW(E) \neq 0$ alors $0 \leq c_1(E)\cdot[\omega]$ avec égalité ssi $E = \mathbb{C}$.

Ce résultat s'obtient en considérant les équations de Seiberg-Witten perturbées par la 2-forme $\mu = F^+_{A_0} - \frac{i}{4}r\omega$, où $r > 0$ est un nombre réel que l'on fait tendre vers l'infini. Afin de conserver des quantités bornées, on note désormais $\psi = r^{1/2}(\alpha,\beta)$. Avec ces conventions, les équations de Seiberg-Witten (1.4) se mettent sous la forme

$$\begin{cases} \bar\partial_a \alpha + \bar\partial_a^* \beta = 0 \\ c(F_A^+ - F_{A_0}^+) = \dfrac{r}{2}\begin{pmatrix} |\alpha|^2 - |\beta|^2 - 1 & 2\alpha\beta^* \\ 2\alpha^*\beta & |\beta|^2 - |\alpha|^2 + 1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.1}$$

La preuve du Théorème 2.1 repose sur la formule de Weitzenböck

$$D_A^2\psi = \nabla_A^*\nabla_A\psi + \frac{R}{4}\psi + \frac{1}{2}c(F_A^+)\psi, \tag{2.2}$$

où R est la courbure scalaire de la variété X. On commence par prouver les formules suivantes :

Lemme 2.2. *Pour tout spineur (α, β) on a*

$$\int \langle \nabla_a \alpha, b^*\beta\rangle + \langle b\alpha, \nabla'_a\beta\rangle + \frac{1}{2}\langle c(F^+_{A_0})\alpha, \beta\rangle = 0 \tag{2.3}$$

$$\int |b|^2|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\langle c(F^+_{A_0})\alpha, \alpha\rangle + \frac{R}{4}|\alpha|^2 = 0 \tag{2.4}$$

$$\int |b|^2|\beta|^2 - \frac{1}{2}\langle c(F^+_{A_0})\beta, \beta\rangle + \frac{R}{4}|\beta|^2 = 0 \tag{2.5}$$

Preuve. D'après le Lemme 1.7, dans le cas de la structure spin^c canonique on a $D_{A_0}u_0 = 0$, où $u_0 = (1, 0)$. En notant ψ un spineur quelconque pour la structure canonique, la formule de Weitzenböck donne

$$\int \langle D^2_{A_0}u_0, \psi\rangle = \int \langle b, \nabla_{A_0}\psi\rangle + \frac{1}{2}\langle c(F^+_{A_0})u_0, \psi\rangle + \frac{R}{4}\langle u_0, \psi\rangle = 0.$$

En appliquant cette formule pour $\psi = (0, \alpha^*\beta)$ avec α et β des sections de E et $K^{-1} \otimes E$, on en déduit que

$$\int \langle b, (\nabla_a\alpha)^*\beta + \alpha^*\nabla'_a\beta\rangle + \frac{1}{2}\langle c(F^+_{A_0})u_0, \alpha^*\beta\rangle = 0,$$

d'où l'on tire immédiatement (2.3). Si l'on applique cette même formule pour $\psi = (|\alpha|^2, 0)$ on obtient

$$\int \langle b, b|\alpha|^2\rangle + \frac{1}{2}\langle c(F^+_{A_0})u_0, |\alpha|^2 u_0\rangle + \frac{R}{4}|\alpha|^2 = 0,$$

ce qui donne immédiatement (2.4). Enfin, avec $\psi = (|\beta|^2, 0)$ on obtient de même (2.5) en remarquant que, comme $c(F^+_{A_0})$ est un endomorphisme sans trace de S^+, on a $\langle c(F^+_{A_0})\beta, \beta\rangle = -\langle c(F^+_{A_0})u_0, |\beta|^2 u_0\rangle$. □

Lemme 2.3. *Pour toute solution de (2.1) on a*

$$\int |\nabla'_a\beta|^2 - 2\langle \nabla_a\alpha, b^*\beta\rangle + \langle c(F^+_{A_0})\beta, \beta\rangle + \frac{r}{4}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 1)|\beta|^2 = 0 \tag{2.6}$$

$$\int |\nabla_a\alpha|^2 + \frac{r}{4}(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - 1)|\alpha|^2 - |D_A\beta|^2 = 0 \tag{2.7}$$

Preuve. La formule de Weitzenböck donne

$$\begin{aligned}
0 &= \int \langle D^2_A(r^{-1/2}\psi), \beta\rangle \\
&= \int \langle \nabla_A(r^{-1/2}\psi), \nabla_A\beta\rangle + \frac{R}{4}|\beta|^2 + \frac{1}{2}\langle c(F^+_A)(r^{-1/2}\psi), \beta\rangle \\
&= \int |\nabla'_a\beta|^2 + \langle b\alpha, \nabla'_a\beta\rangle - \langle \nabla_a\alpha, b^*\beta\rangle + |b|^2|\beta|^2 + \frac{R}{4}|\beta|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\langle c(F^+_{A_0})\alpha, \beta\rangle + \frac{1}{2}\langle c(F^+_{A_0})\beta, \beta\rangle + \frac{r}{2}|\alpha|^2|\beta|^2 + \frac{r}{4}(|\beta|^2 - |\alpha|^2 + 1)|\beta|^2.
\end{aligned}$$

En substituant (2.3) et (2.5) dans cette expression on obtient (2.6).

De même, la formule de Weitzenböck permet d'écrire

$$\begin{aligned} 0 &= \int \langle D_A^2 \alpha, \alpha\rangle + \langle D_A^2 \beta, \alpha\rangle \\ &= \int |\nabla_a \alpha|^2 + |b|^2 |\alpha|^2 + \frac{R}{4}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\langle c(F_{A_0}^+)\alpha, \alpha\rangle \\ & \quad + \frac{r}{4}(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - 1)|\alpha|^2 + \langle D_A \beta, D_A \alpha\rangle. \end{aligned}$$

On en déduit (2.7) en substituant (2.4) dans cette expression et en remarquant que $D_A\alpha = -D_A\beta$. □

Preuve du Théorème 2.1. Dans (2.6), le terme $\frac{r}{4}|\beta|^4$ est minoré par 0, tandis que $\langle c(F_{A_0}^+)\beta, \beta\rangle$ est minoré par $-k_1|\beta|^2$ pour une certaine constante k_1. On a donc

$$\int \frac{r}{4}|\alpha|^2|\beta|^2 + (\frac{r}{4} - k_1)|\beta|^2 + |\nabla'_a \beta|^2 \leq 2\int \langle \nabla_a \alpha, b^* \beta\rangle.$$

Comme b est borné uniformément par une certaine constante k_2, cette quantité est pour tout $\epsilon > 0$ bornée par $k_2 \int (r\epsilon)^{-1}|\nabla_a\alpha|^2 + r\epsilon|\beta|^2$. En prenant $\epsilon = \frac{1}{16}$ et en supposant que $r \geq 16k_1$, on obtient l'existence d'une constante k_3 telle que

$$\int \frac{r}{4}|\alpha|^2|\beta|^2 + \frac{r}{8}|\beta|^2 + |\nabla'_a\beta|^2 \leq \frac{k_3}{r}\int |\nabla_a \alpha|^2. \tag{2.8}$$

Autrement dit, $\|r^{1/2}\alpha\beta\|_{L^2}$, $\|r^{1/2}\beta\|_{L^2}$ et $\|\nabla'_a\beta\|_{L^2}$ sont bornés par un multiple uniforme de $r^{-1/2}\|\nabla_a\alpha\|_{L^2}$. Il est à noter que $\|D_A\beta\|_{L^2} = \|\bar\partial_a^*\beta\|_{L^2} \leq \|\nabla'_a\beta\|_{L^2}$ satisfait également une borne du même type.

L'équation (2.7) se réécrit, par ajout de termes de part et d'autre, sous la forme

$$\int |\nabla_a\alpha|^2 + \frac{r}{4}(|\alpha|^2 - 1)^2 = \int \frac{r}{4}|\beta|^2(|\alpha|^2 - 1) - \frac{r}{4}(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - 1) + |D_A\beta|^2.$$

Comme $(F_A - F_{A_0}) \wedge \omega = \frac{ir}{2}(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - 1)\mathrm{vol}$, et en utilisant les bornes uniformes obtenues ci-dessus pour $\|D_A\beta\|_{L^2}$ et $\|r^{1/2}\alpha\beta\|_{L^2}$, on a donc

$$\int |\nabla_a\alpha|^2 + \frac{r}{4}(|\alpha|^2 - 1)^2 \leq \frac{k_4}{r}\int |\nabla_a\alpha|^2 + \frac{i}{2}\int (F_A - F_{A_0}) \wedge \omega$$

pour une certaine constante k_4. Si l'on suppose r assez grand ($r > 2k_4$), on en déduit que

$$\int \frac{1}{2}|\nabla_a\alpha|^2 + \frac{r}{4}(|\alpha|^2 - 1)^2 \leq \frac{i}{2}\int (F_A - F_{A_0}) \wedge \omega = 2\pi\, c_1(E) \cdot [\omega].$$

Comme le membre de gauche est une quantité positive, les équations de Seiberg-Witten ne peuvent admettre de solutions pour r grand que si $c_1(E) \cdot [\omega] \geq 0$: dans le cas contraire l'invariant de Seiberg-Witten est donc nécessairement nul (dans le cas $b_2^+ = 1$ on vérifie aisément que la perturbation choisie correspond à la chambre symplectique).

Par ailleurs, lorsque $c_1(E) \cdot [\omega] = 0$ on doit nécessairement avoir $\nabla_a\alpha \equiv 0$ et $|\alpha| \equiv 1$. Ceci entraîne que, après une transformation de jauge convenable, ∇_a est la connexion triviale sur le fibré trivial et α est la section constante égale à 1. De plus, (2.8) implique que $\beta \equiv 0$. On en déduit donc que, sous l'hypothèse $c_1(E) \cdot [\omega] = 0$, il ne peut y avoir de solutions que si la structure spin^c choisie est la structure canonique, et que dans ce cas l'unique solution à équivalence de jauge près est $(A, \psi) = (A_0, r^{1/2} u_0)$.

En outre, un rapide calcul permet de vérifier que la linéarisation des équations de Seiberg-Witten en $(A_0, r^{1/2} u_0)$ est surjective (ceci s'obtient en remarquant que le complexe elliptique associé est d'indice nul et que le noyau de l'opérateur linéarisé est réduit à 0). On en déduit que la perturbation choisie satisfait aux propriétés de généricité requises, et on a donc $SW(\mathbb{C}) = \pm 1$. Un calcul méticuleux sur les orientations permet de vérifier que la bonne valeur est $+1$.

Dans le cas $b_2^+ \geq 2$, la propriété d'égalité au signe près des invariants de Seiberg-Witten associés à des structures spin^c duales l'une de l'autre permet à partir des résultats obtenus ci-dessus de montrer que $SW(K) = \pm 1$ et que $c_1(E) \cdot [\omega] \leq c_1(K) \cdot [\omega]$ dès que $SW(E) \neq 0$, ce qui achève la preuve du Théorème 2.1. □

Le Théorème 2.1 fournit des obstructions très fortes à l'existence d'une structure symplectique sur une variété compacte de dimension 4. Par exemple, une variété dont les invariants de Seiberg-Witten sont nuls ne peut être symplectique : ceci exclut en particulier toutes les variétés à $b_2^+ \geq 2$ qui admettent une métrique à courbure scalaire positive, ainsi que toutes celles qui peuvent se décomposer en la somme connexe de deux variétés à $b_2^+ \geq 1$.

2.2. **Courbes pseudo-holomorphes et invariants de Gromov-Witten.** Cette partie est consacrée à la définition des invariants de Gromov-Witten selon les conventions introduites par Taubes ([T6], [T1]). Soit (X, ω) une variété symplectique compacte de dimension 4, munie d'une structure presque-complexe compatible J et de la métrique riemannienne correspondante g.

Définition 2.4. *Une sous-variété* $\Sigma \subset X$ *est dite* pseudo-holomorphe *si elle vérifie* $J(T\Sigma) = T\Sigma$.

En particulier, la restriction de ω à Σ est non dégénérée, ce qui implique que Σ est une sous-variété symplectique de X et en particulier que $[\omega] \cdot [\Sigma] > 0$. Le long d'une courbe pseudo-holomorphe le fibré tangent TX se scinde en $T\Sigma \oplus N\Sigma$, et J définit une structure complexe sur chacun de ces deux sous-fibrés. On en déduit que le genre d'une courbe pseudo-holomorphe compacte *connexe* est donné par la formule suivante (*formule d'adjonction*) :

$$2g - 2 = [\Sigma] \cdot [\Sigma] + c_1(K) \cdot [\Sigma] \tag{2.9}$$

Cette formule s'applique en fait aussi aux sous-variétés symplectiques.

La métrique riemannienne sur TX définit une connexion sur le fibré normal $N\Sigma$, qui est donc un fibré en droites holomorphe. Ceci permet de définir l'opérateur $\bar\partial : \Gamma(N\Sigma) \to \Gamma(T^*\Sigma^{(0,1)} \otimes N\Sigma)$. Dans le cas holomorphe le noyau de $\bar\partial$ décrit l'espace des déformations infinitésimales de Σ en tant que sous-variété holomorphe de X ; dans le cas pseudo-holomorphe ce n'est pas le cas, et l'opérateur D dont le noyau décrit les déformations pseudo-holomorphes infinitésimales diffère de $\bar\partial$ par un terme d'ordre 0 (ce terme est en général seulement $\mathbb{R}$-linéaire, et s'exprime à l'aide du 1-jet de la structure presque complexe au voisinage de Σ). Néanmoins, l'opérateur D a le même symbole que $\bar\partial$, et est donc elliptique, de même indice que $\bar\partial$. Le théorème de Riemann-Roch permet d'obtenir

$$\operatorname{ind}_{\mathbb{R}} D = -c_1(K)\cdot[\Sigma] + [\Sigma]\cdot[\Sigma]. \tag{2.10}$$

Cette quantité est toujours paire puisque c'est le double de l'indice usuel (sur $\mathbb{C}$). Il est important de noter que cette formule ne donne la dimension de l'espace des déformations d'une courbe pseudo-holomorphe que lorsque le conoyau de D est trivial. Ceci n'est pas vrai en général, mais un choix générique de la structure presque-complexe J suffit à assurer que $\operatorname{Coker} D = \{0\}$ pour toutes les courbes pseudo-holomorphes de X (voir par exemple [McS2]). Dans la suite on fera naturellement l'hypothèse que la structure presque-complexe choisie possède cette propriété de généricité, ce qui permet de s'assurer que l'espace des modules des sous-variétés pseudo-holomorphes représentant une classe d'homologie donnée est lisse et que sa dimension est donnée par (2.10).

Soit $e \in H^2(X,\mathbb{Z})$ une classe de cohomologie fixée. Nous allons définir l'invariant $Gr(e) \in \mathbb{Z} \oplus \Lambda^2 H^1(X,\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus \Lambda^d H^1(X,\mathbb{Z})$, où $d = -c_1(K)\cdot e + e\cdot e$ est la dimension donnée par (2.10), selon les conventions données par Taubes dans [T1]. Lorsque $d < 0$ on pose $Gr(e) = 0$; on supposera dans la suite que $d \geq 0$. On pose également $Gr(0) = 1$, ce qui permet de se limiter au cas où la classe e est non triviale. Soit p un entier pair compris entre 0 et d, et soient $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ des éléments de $H_1(X,\mathbb{Z})$, représentés par des lacets plongés et mutuellement disjoints de X. On note $\Gamma = \{\gamma_j\}_{1\leq j\leq p}$. Enfin, soit Ω un ensemble de $(d-p)/2$ points de X n'appartenant pas aux lacets de Γ. En première approximation, on peut dire que $\langle Gr(e), \gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_p\rangle$ compte les sous-variétés pseudo-holomorphes compactes (non nécessairement connexes) de X réalisant la classe d'homologie e, intersectant chacun des lacets de Γ, et passant par tous les points de Ω. Pour être plus précis on doit introduire les définitions suivantes :

Définition 2.5. *On note $\mathcal{H} = \mathcal{H}(e, J, \Gamma, \Omega)$ l'ensemble des collections $h = \{(C_k, m_k)\}$ où chaque C_k est une sous-variété pseudo-holomorphe compacte connexe de X et chaque m_k est un entier strictement positif, vérifiant les conditions suivantes :*

1. *$d_k = -c_1(K)\cdot[C_k] + [C_k]\cdot[C_k] \geq 0$ pour tout k.*
2. *$m_k = 1$ sauf si C_k est de genre 1 et vérifie $[C_k]\cdot[C_k] = 0$.*
3. *$\sum m_k[C_k] = e$.*
4. *Il existe une partition $\Gamma = \cup_k \Gamma_k$, chaque Γ_k contenant un nombre pair $p_k \leq d_k$ de lacets de Γ, de telle sorte que C_k intersecte chaque lacet de Γ_k en exactement un point, de façon transverse, et n'intersecte aucun des lacets de $\Gamma - \Gamma_k$.*
5. *Chaque courbe C_k contient exactement $(d_k - p_k)/2$ points de Ω.*
6. *Les courbes C_k sont mutuellement disjointes.*

Etant donné un élément $h \in \mathcal{H}$, pour tout (C_k, m_k) tel que $d_k > 0$ on définit un espace vectoriel V_k de dimension réelle $2d_k$ comme la somme directe des espaces suivants : pour chaque point $z \in C_k \cap \Omega$, l'espace $(NC_k)_z$ (de dimension 2), et pour chaque $\gamma \in \Gamma_k$, l'intersection des espaces normaux $(NC_k)_z \cap (N\gamma)_z$, où z est le point d'intersection de C_k avec γ (cet espace est de dimension 1). Comme chaque lacet γ est orienté, chaque facteur de V_k a une orientation naturelle ; le choix d'un ordre sur Γ_k détermine donc une orientation de l'espace V_k.

A toute section de NC_k on peut associer un élément de V_k (par restriction aux points de Ω et par projection sur $N\gamma$ aux points d'intersection avec Γ_k) ; la restriction à $\operatorname{Ker} D$ de cette application $\Gamma(NC_k) \to V_k$ sera notée π_k.

Pour un choix générique de (J, Γ, Ω), l'ensemble $\mathcal{H}$ est fini, et pour tout élément $h \in \mathcal{H}$ chacune des composantes (C_k, m_k) vérifie les propriétés suivantes :

a) $\operatorname{Coker} D = \{0\}$;

b) lorsque $d_k > 0$, l'application $\pi_k : \operatorname{Ker} D \to V_k$ est un isomorphisme ;

c) lorsque $m_k > 1$, le relèvement de D à tout revêtement fini du tore C_k a un conoyau trivial.

A chaque (C_k, m_k) nous allons maintenant associer un entier $r(C_k, m_k)$ qui servira à associer une multiplicité à chaque élément de $\mathcal{H}$. Cette étape est nécessaire car l'opérateur D n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire. On doit considérer trois cas :

1) Lorsque $m_k = 1$ et $d_k = 0$, l'entier $r(C_k, 1)$ vaut ± 1 et compte le flot spectral mod 2 d'une famille $(D_t)_{t\in[0,1]}$ de déformations d'ordre 0 de l'opérateur D, telle que $D_0 = D$ et que D_1 soit $\mathbb{C}$-linéaire et $\operatorname{Coker} D_1 = \{0\}$.

2) Lorsque $m_k = 1$ et $d_k > 0$, l'entier $r(C_k, 1)$ vaut ± 1, et s'obtient en considérant à nouveau une famille $(D_t)_{t\in[0,1]}$ de déformations d'ordre 0 de l'opérateur D, telle que $D_0 = D$ et que D_1 soit $\mathbb{C}$-linéaire et $\operatorname{Coker} D_t = \{0\}\ \forall t$. Comme $\operatorname{Ker} D_1$ est canoniquement orienté, cette famille permet d'orienter naturellement $\operatorname{Ker} D$; un ordre sur Γ_k étant fixé, l'espace V_k est également orienté, ce qui permet de définir l'entier $r(C_k, 1)$ comme valant $+1$ si l'isomorphisme $\pi_k : \operatorname{Ker} D \to V_k$ préserve l'orientation et -1 sinon.

3) Dans le cas où $m_k > 1$ la définition est nettement plus compliquée. C_k est nécessairement un tore : il existe donc trois fibrés en droites réelles non triviaux sur C_k, qui par produit tensoriel avec NC_k et $T^*C_k^{(0,1)} \otimes NC_k$ définissent trois variantes "twistées" de l'opérateur D. Comme précédemment on considère des familles de déformations d'ordre 0 de D et de ses variantes twistées qui les relient à des opérateurs $\mathbb{C}$-linéaires. La valeur de $r(C_k, m_k)$ est alors déterminée par le flot spectral mod 2 pour D, soit $s \in \{\pm 1\}$, et par le nombre $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ d'opérateurs twistés pour lesquels le flot spectral est non trivial. Plus précisément, $r(C_k, m_k)$ est le coefficient de t^{m_k} dans la fonction génératrice $f_{s,n}$, où

$$f_{+,0}(t) = \frac{1}{1-t}, \quad f_{+,1}(t) = 1+t, \quad f_{+,2}(t) = \frac{1+t}{1+t^2}, \quad f_{+,3}(t) = \frac{(1+t)(1-t^2)}{1+t^2}$$

et $f_{-,n}(t) = f_{+,n}(t)^{-1}$.

Etant donné un élément $h = \{(C_k, m_k)\}$ de $\mathcal{H}$, on définit le poids de h de la façon suivante : dans le cas où $p = 0$ (i.e. lorsqu'il n'y a pas de lacets γ_j), on pose $w(h) = \prod_k r(C_k, m_k)$. Dans le cas $p > 0$, les entiers $r(C_k, m_k)$ dépendent du choix d'un ordre sur Γ_k ; les ordres choisis induisent un ordre sur $\Gamma = \bigcup \Gamma_k$, qui diffère de l'ordre canonique par une permutation σ de $\{1, \ldots, p\}$. Comme chaque Γ_k comporte un nombre pair d'éléments, la signature de σ ne dépend pas du choix de l'ordre dans lequel on considère les (C_k, m_k). On définit alors $w(h) = \varepsilon(\sigma) \prod_k r(C_k, m_k)$, et on vérifie que cette quantité ne dépend pas des ordres choisis sur Γ_k. Enfin, on définit $Gr(e)$ par l'égalité

$$\langle Gr(e), \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_p \rangle = \sum_{h \in \mathcal{H}} w(h).$$

On montre que la quantité $Gr(e)$ est un invariant de la variété symplectique (X, ω) (i.e. $Gr(e)$ ne dépend pas du choix de (J, Γ, Ω) génériques) [T6].

2.3. **Relation entre SW et Gr.** (voir [T1], [T5], [T6], [T7], [T8]).

Théorème 2.6 (Taubes)**.** *Soit (X, ω) une variété symplectique compacte telle que $b_2^+(X) \geq 2$. En utilisant la structure symplectique pour définir l'invariant de Seiberg-Witten $SW : H^2(X, \mathbb{Z}) \to \Lambda^* H^1(X, \mathbb{Z})$ comme au §1.3, ainsi que l'invariant de Gromov-Witten $Gr : H^2(X, \mathbb{Z}) \to \Lambda^* H^1(X, \mathbb{Z})$ comme au §2.2, on a $SW = Gr$.*

Il est à noter que les formules de dimension (1.5) pour SW et (2.10) pour Gr coïncident systématiquement.

Comme les invariants de Gromov-Witten sont en général beaucoup plus difficiles à calculer que ceux de Seiberg-Witten, l'application la plus fréquente de ce théorème consiste à remarquer que, dès lors que l'invariant de Seiberg-Witten associé à un fibré en droites E est non nul, il existe nécessairement une courbe pseudo-holomorphe qui représente la classe duale de Poincaré de $c_1(E)$. Ceci s'applique en particulier au fibré canonique (à l'aide du Théorème 2.1).

Dans le cas où $b_2^+(X) = 1$, l'équivalence entre SW et Gr n'est pas complète, mais on a le résultat suivant :

Théorème 2.7 (Taubes)**.** *Soit (X, ω) une variété symplectique compacte telle que $b_2^+(X) = 1$. En se plaçant dans la chambre symplectique pour déterminer les invariants de Seiberg-Witten, on a l'égalité $SW = Gr$ pour toutes les classes $e \in H^2(X, \mathbb{Z})$ telles que $e \cdot [S] \geq -1$ pour toute sphère symplectiquement plongée $S \subset X$ vérifiant $[S] \cdot [S] = -1$.*

L'idée derrière ces résultats est, comme pour le Théorème 2.1, de considérer les équations de Seiberg-Witten perturbées par la 2-forme $\mu = F_{A_0}^+ - \frac{i}{4} r\omega$ où $r \gg 0$ (équation (2.1)). Comme on l'a vu au §2.1, pour r suffisamment grand on dispose de l'estimée (2.8), ce qui implique que $\|r^{1/2}\beta\|_{L^2}$ et $\|\bar{\partial}_a^*\beta\|_{L^2}$ sont bornés par un multiple uniforme de $r^{-1/2}\|\nabla_a \alpha\|_{L^2}$. D'autre part l'équation de Dirac s'écrit $\bar{\partial}_a \alpha + \bar{\partial}_a^* \beta = 0$, donc $\|\bar{\partial}_a \alpha\|_{L^2}$ est borné par un multiple uniforme de $r^{-1/2}\|\nabla_a \alpha\|_{L^2}$. Une telle estimée L^2 ne suffit pas à conclure, mais par de longs calculs Taubes parvient à obtenir des estimées plus puissantes, ce qui permet de montrer le résultat suivant :

Théorème 2.8 (Taubes [T5]). *Soit $(A_n, (\alpha_n, \beta_n))$ une suite de solutions de (2.1) correspondant à une suite de paramètres r_n tendant vers $+\infty$. Alors il existe une sous-suite telle que $\alpha_{\phi(n)}^{-1}(0)$ converge au sens de Hausdorff vers une sous-variété pseudo-holomorphe compacte $\Sigma \subset X$, éventuellement non connexe, dont la classe d'homologie est duale de Poincaré de $c_1(E)$.*

En particulier, étant données des parties fermées F_k de X, si $\alpha_n^{-1}(0) \cap F_k \neq \emptyset$ $\forall n \forall k$, alors $\Sigma \cap F_k \neq \emptyset$ $\forall k$.

Ce résultat permet de passer d'une solution des équations de Seiberg-Witten à une courbe pseudo-holomorphe [T5]. Le passage dans le sens inverse se fait en remarquant que, étant donnée une courbe pseudo-holomorphe Σ, on peut obtenir une solution approchée $(A, (\alpha, 0))$ des équations de Seiberg-Witten pour $r \gg 0$ par recollement de solutions des équations du vortex dans chaque fibre du fibré normal $N\Sigma$ (les équations du vortex sont la réduction en dimension 2 des équations de Seiberg-Witten (2.1) dans le cas holomorphe) [T7].

2.4. **Le cas non symplectique.** Les théorèmes 2.6 et 2.7 ont de nombreuses répercussions sur l'étude de la topologie symplectique en dimension 4, en particulier lorsqu'ils sont utilisés conjointement avec l'inégalité d'adjonction généralisée qui est l'objet du §3. Aussi est-il naturel de vouloir étendre ces résultats à un cadre plus général.

A défaut d'être symplectique, toute variété compacte de dimension 4 vérifiant $b_2^+ \geq 1$ peut être munie d'une 2-forme autoduale harmonique, que l'on notera encore ω. Pour un choix générique de la métrique riemannienne, le lieu d'annulation $Z = \omega^{-1}(0)$ est une sous-variété de dimension 1, c'est-à-dire une union de cercles, et ω définit une structure symplectique sur $X - Z$. Sur $X - Z$ on dispose de la structure presque complexe

$$J = \frac{\sqrt{2}}{|\omega|} g^{-1} \omega,$$

ce qui permet de définir la notion de sous-variété pseudo-holomorphe de $X - Z$. Les cercles de Z représentent en quelque sorte une obstruction à l'existence d'une forme symplectique sur X.

Définition 2.9. *$C \subset X - Z$ est une sous-variété pseudo-holomorphe singulière si c'est l'image d'une courbe complexe C' par une application pseudo-holomorphe propre $\phi : C' \to X - Z$ injective hors d'un ensemble dénombrable et telle que l'énergie $\int_{C'} \phi^* \omega$ est finie.*

En outre on définit la notion de *bord homologique* de la façon suivante : on dit que Z borde homologiquement C si le nombre d'intersection de C avec toute 2-sphère enlaçant l'un des cercles de Z est égal à ± 1. On a alors :

Théorème 2.10 (Taubes [T1]). *Soit X une variété riemannienne compacte orientée de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$ et dont les invariants de Seiberg-Witten sont non triviaux. Alors Z est le bord homologique d'une sous-variété pseudo-holomorphe singulière dans $X - Z$.*

Ce sujet demeure néanmoins en grande partie ouvert, notamment concernant la possibilité d'obtenir une sous-variété lisse dont Z est le bord au sens usuel. On se référera à [T1], [T9], [T10] pour plus de détails.

Remarque : un cas particulier intéressant celui où X est de la forme $S^1 \times M$ où M est une variété de dimension 3. Tout élément de $H^1(M, \mathbb{Z})$ peut être vu comme la différentielle d'une fonction harmonique $f : M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. En munissant X de la métrique produit, la 2-forme $\omega = d\theta \wedge df + *df$ est harmonique et autoduale, et son lieu d'annulation est $Z = S^1 \times \mathrm{crit}(f)$ (en particulier ω est symplectique lorsque f n'a pas de points critiques). Si on se limite au cadre S^1-invariant, les équations de Seiberg-Witten sur X (en dimension 4) deviennent les équations de Seiberg-Witten en dimension 3 sur M. En outre, les sous-variétés pseudo-holomorphes S^1-invariantes de $X - Z$ correspondent précisément aux lignes de gradient de f sur M.

Les résultats attendus en dimension 4 se traduisent donc sous la forme d'une équivalence entre invariants de Seiberg-Witten de M et théorie de Morse d'une fonction harmonique à valeurs dans S^1 sur M. Ce résultat découle d'une part de l'équivalence des invariants de Seiberg-Witten en dimension 3 avec un invariant de torsion topologique introduit par Turaev, démontrée d'abord sous une forme faible par Meng et Taubes [MT] puis de façon générale par Turaev [Tu], et d'autre part de l'équivalence de la torsion de Turaev avec la théorie de Morse à valeurs dans S^1, démontrée par Hutchings et Lee [HL].

Bibliographie. Partie 2 :

[Gr] M. Gromov, *Pseudo Holomorphic Curves in Symplectic Manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.

[HL] M. Hutchings, Y.J. Lee, *Circle valued Morse theory, R-torsion and Seiberg-Witten invariants of 3-manifolds*, Topology, à paraître.

[Ko] D. Kotschick, *The Seiberg-Witten invariants of symplectic 4-manifolds (after C.H. Taubes)*, Séminaire Bourbaki (1995-96), No. **812**.

[McS2] D. McDuff and D. Salamon, *J-holomorphic Curves and Quantum Cohomology*, Univ. Lecture Series **6**, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.

[MT] G. Meng, C.H. Taubes, *SW = Milnor Torsion*, Math. Res. Lett. **3** (1996), 661–674.

[T1] C.H. Taubes, *The Geometry of the Seiberg-Witten Invariants*, Surveys in Diff. Geom., à paraître.

[T2] C.H. Taubes, *The Seiberg-Witten Invariants and Symplectic Forms*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 809–822.

[T3] C.H. Taubes, *More Constraints on Symplectic Manifolds from Seiberg-Witten Equations*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 9–14.

[T4] C.H. Taubes, *The Seiberg-Witten and Gromov Invariants*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 221–238.

[T5] C.H. Taubes, *SW ⇒ Gr : From the Seiberg-Witten Equations to Pseudo-Holomorphic Curves*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 845–918 ; corrigé dans Proc. 1st IP Lecture Series, Vol. II, R. Wentworth Ed., International Press, à paraître.

[T6] C.H. Taubes, *Counting Pseudo-Holomorphic Submanifolds in Dimension 4*, J. Diff. Geom. **44** (1996), 818–893 ; repris dans Proc. 1st IP Lecture Series, Vol. II, R. Wentworth Ed., International Press, à paraître.

[T7] C.H. Taubes, *Gr ⇒ SW : From Pseudo-Holomorphic Curves to Seiberg-Witten Solutions*, J. Diff. Geom., à paraître ; repris dans Proc. 1st IP Lecture Series, Vol. II, R. Wentworth Ed., International Press, à paraître.

[T8] C.H. Taubes, *Gr = SW. Counting Curves and Connections*, J. Diff. Geom., à paraître ; repris dans Proc. 1st IP Lecture Series, Vol. II, R. Wentworth Ed., International Press, à paraître.

[T9] C.H. Taubes, *Seiberg-Witten Invariants and Pseudo-Holomorphic Subvarieties for Self-dual Harmonic 2-forms*, preprint.

[T10] C.H. Taubes, *The Geometry of the Seiberg-Witten Invariants*, Documenta Mathematica, Extra Volume ICM 1998 II, 493–504.

[Tu] V. Turaev, *A Combinatorial Formulation for the Seiberg-Witten Invariants of 3-manifolds*, Math. Res. Lett. **5** (1998), 583–598.

3. La conjecture de Thom généralisée

3.1. Inégalité d'adjonction généralisée et conjecture de Thom. Le problème auquel nous allons nous intéresser dans cette partie est celui d'obtenir un minorant du genre d'une surface plongée dans une variété de dimension 4, en fonction de sa classe d'homologie. Une conjecture attribuée à Thom affirme que, dans $\mathbb{CP}^2$, les courbes holomorphes plongées minimisent le genre dans leur classe d'homologie. Ce résultat a été prouvé en 1994 par Kronheimer et Mrowka [KM1] en utilisant les équations de Seiberg-Witten :

Théorème 3.1 (Kronheimer-Mrowka [KM1])**.** *Soit Σ une sous-variété lisse de dimension 2 plongée dans $\mathbb{CP}^2$, représentant la même classe d'homologie qu'une courbe algébrique de degré d. Alors le genre g de Σ vérifie l'inégalité $g \geq (d-1)(d-2)/2$.*

Ce résultat peut aussi se mettre sous la forme de l'*inégalité d'adjonction généralisée* suivante : $2g-2 \geq [\Sigma]\cdot[\Sigma] + c_1(K)\cdot[\Sigma]$.

Sous cette forme, il est possible d'envisager une version beaucoup plus générale de cet énoncé :

Théorème 3.2 (Morgan-Szabó-Taubes, Kronheimer, Oszváth-Szabó)**.** *Soit X une variété compacte de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$, et soit L le fibré déterminant d'une structure* spin^c *sur X dont l'invariant de Seiberg-Witten est non nul. Soit Σ une sous-variété lisse compacte connexe de dimension 2 plongée dans X. On suppose soit que $[\Sigma]\cdot[\Sigma] \geq 0$, soit que X est de type simple. Si le genre g de Σ vérifie $g \geq 1$, alors on a*

$$2g-2 \geq [\Sigma]\cdot[\Sigma] + |c_1(L)\cdot[\Sigma]|, \tag{3.1}$$

et dans le cas où $g=0$ on a

$$0 \geq [\Sigma]\cdot[\Sigma] + |c_1(L)\cdot[\Sigma]|. \tag{3.2}$$

Le cas $[\Sigma]\cdot[\Sigma] \geq 0$ a d'abord été démontré par Morgan, Szabó et Taubes [MST], puis une preuve extrêmement courte et élégante a été fournie par Kronheimer [Kr]. Dans le cas où $[\Sigma]\cdot[\Sigma] < 0$ le résultat est plus difficile à obtenir, et la preuve due à Oszváth et Szabó [OS] ne fonctionne que si X est de type simple, c'est-à-dire si toute structure spin^c sur X pour laquelle la dimension

$d(s)$ de l'espace des modules est strictement positive a un invariant de Seiberg-Witten nul. Néanmoins ce n'est pas une restriction très forte car toutes les variétés à $b_2^+ \geq 2$ connues sont de type simple, et une conséquence des résultats de Taubes est que toute variété symplectique à $b_2^+ \geq 2$ est de type simple (voir §3.2 ci-dessous).

Dans le cas $b_2^+ = 1$ (notamment lorsque $X = \mathbb{CP}^2$), des formules similaires existent, mais leur énoncé est très délicat à cause de la structure en chambres des invariants de Seiberg-Witten. Néanmoins, Oszváth et Szabó ont obtenu le résultat suivant, sans hypothèse sur b_2^+ (*conjecture de Thom généralisée*) :

Théorème 3.3 (Oszváth-Szabó [OS]). *Une surface plongée symplectiquement dans une variété symplectique compacte de dimension* 4 *minimise le genre dans sa classe d'homologie.*

Dans le cas $b_2^+ \geq 2$ et si l'on fait abstraction du problème que pose la formule particulière dans le cas $g = 0$, ce résultat découle immédiatement de l'inégalité d'adjonction généralisée (3.1) en utilisant le fait que l'invariant de Seiberg-Witten pour la structure spin^c canonique est égal à 1 (Théorème 2.1). En effet, le fibré déterminant de la structure spin^c canonique est K^{-1}, donc toute surface plongée Σ de genre $g(\Sigma) \geq 1$ vérifie

$$2g(\Sigma) - 2 \geq [\Sigma] \cdot [\Sigma] + c_1(K) \cdot [\Sigma],$$

tandis que la formule d'adjonction (2.9) donne, pour toute sous-variété symplectique Σ' dans la même classe d'homologie,

$$2g(\Sigma') - 2 = [\Sigma'] \cdot [\Sigma'] + c_1(K) \cdot [\Sigma'],$$

ce qui implique immédiatement que $g(\Sigma) \geq g(\Sigma')$.

Nous donnons maintenant la preuve due à Kronheimer de l'inégalité d'adjonction généralisée dans le cas $[\Sigma] \cdot [\Sigma] \geq 0$. On remarquera tout d'abord que la valeur absolue n'est pas nécessaire dans le second membre de (3.1) et (3.2), car à cause de la dualité mentionnée au §1.3, si L est le déterminant d'une structure spin^c dont l'invariant de Seiberg-Witten est non nul alors il en est de même pour L^{-1}. Avec les notations du Théorème 3.2 et en posant $\chi_-(\Sigma) = \max(2g - 2, 0)$, il est donc suffisant de montrer que

$$\chi_-(\Sigma) \geq [\Sigma] \cdot [\Sigma] + c_1(L) \cdot [\Sigma].$$

Ensuite, on remarque qu'il est possible de se ramener au cas $[\Sigma] \cdot [\Sigma] = 0$ par des éclatements, i.e. par somme connexe avec $\overline{\mathbb{CP}}^2$. Plus précisément, on utilise la formule d'éclatement suivante :

Proposition 3.4. *Soit X une variété compacte de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$, et soit $\hat{X} = X \# \overline{\mathbb{CP}}^2$ son éclaté. On notera $E \in H_2(\hat{X}, \mathbb{Z})$ la classe fondamentale du diviseur exceptionnel. Soit s une structure* spin^c *sur X, et soient $\hat{s}_\pm$ les deux structures* spin^c *sur $\hat{X}$ dont la projection sur X coïncide avec s et dont le fibré déterminant $\hat{L}_\pm$ vérifie $c_1(\hat{L}_\pm) \cdot E = \mp 1$. Alors $SW_{\hat{X}}(\hat{s}_\pm) = SW_X(s)$.*

De plus ce résultat demeure vrai dans le cas $b_2^+ = 1$ si l'on considère des chambres compatibles sur X et sur $\hat{X}$.

(on notera que les dimensions des espaces de modules vérifient $d_{\hat{X}}(\hat{s}_\pm) = d_X(s)$). On identifiera dans ce qui suit $H^2(\hat{X}, \mathbb{Z})$ avec $H^2(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}E$.

L'intérêt de ce procédé est clair lorsqu'on remarque que, étant donnée une surface plongée $\Sigma \subset X$ de genre g, en effectuant l'éclatement en un point de Σ on obtient dans $\hat{X}$ une surface plongée $\hat{\Sigma}$, toujours de genre g, mais dont la classe fondamentale est $[\hat{\Sigma}] = [\Sigma] - E$ et donc vérifie $[\hat{\Sigma}] \cdot [\hat{\Sigma}] = [\Sigma] \cdot [\Sigma] - 1$. D'autre part, $c_1(\hat{L}_\pm) = c_1(L) \pm E$, donc $c_1(\hat{L}_+) \cdot [\hat{\Sigma}] = c_1(L) \cdot [\Sigma] + 1$. L'inégalité d'adjonction pour Σ et L est donc équivalente à celle pour $\hat{\Sigma}$ et $\hat{L}_+$, ce qui permet par récurrence de se ramener au cas où $[\Sigma] \cdot [\Sigma] = 0$.

Il reste donc à prouver que, pour toute surface plongée $\Sigma \subset X$ vérifiant $[\Sigma] \cdot [\Sigma] = 0$ et pour toute structure spin^c dont l'invariant de Seiberg-Witten est non trivial, on a

$$\chi_-(\Sigma) \geq c_1(L) \cdot [\Sigma].$$

Pour obtenir ce résultat, Kronheimer introduit la notation suivante : soit $\alpha \in H^2(X, \mathbb{R})$. Etant donnée une métrique riemannienne quelconque g sur X, on notera $\|\cdot\|_g$ la norme L^2 et s_g la courbure scalaire, et on identifiera α à son représentant harmonique. On définit

$$|\alpha|^+ = 4\pi\sqrt{2} \sup_g \frac{\|\alpha^+\|_g}{\|s_g\|_g}.$$

Lemme 3.5 ([Kr])**.** *Soit L le fibré déterminant d'une structure* spin^c *dont l'invariant de Seiberg-Witten est non nul. Alors $|c_1(L)|^+ \leq 1$.*

Preuve. Soit g une métrique quelconque sur X, et soit (A, ψ) une solution des équations de Seiberg-Witten non perturbées. L'équation de Dirac $D_A\psi = 0$ implique que $\langle D_A^* D_A \psi, \psi \rangle_{L^2} = 0$. Par la formule de Weitzenböck (2.2) on a donc

$$\int |\nabla_A \psi|^2 + \frac{s_g}{4}|\psi|^2 + \frac{1}{2}\langle c(F_A^+)\psi, \psi\rangle = 0.$$

Comme $c(F_A^+) = (\psi^* \otimes \psi)_0 = (\psi^* \otimes \psi) - \frac{1}{2}|\psi|^2$, il vient

$$\int \frac{s_g}{4}|\psi|^2 + \frac{1}{4}|\psi|^4 \leq 0,$$

d'où $0 \geq 2\langle s_g, |\psi|^2\rangle_g + 2\||\psi|^2\|_g^2 \geq -\|s_g\|_g^2 + \||\psi|^2\|_g^2$ en utilisant Cauchy-Schwartz. D'autre part on montre que $|F_A^+|^2 = \frac{1}{8}|\psi|^4$, d'où on tire

$$2\sqrt{2}\,\|F_A^+\|_g = \||\psi|^2\|_g \leq \|s_g\|_g,$$

soit $4\pi\sqrt{2}\,\|c_1(L)^+\|_g \leq \|s_g\|_g$. Comme ceci est vrai pour toute métrique g, on conclut que $|c_1(L)|^+ \leq 1$. ☐

L'inégalité d'adjonction généralisée est alors une conséquence directe du lemme suivant :

Lemme 3.6 ([Kr])**.** *Soit $\alpha \in H^2(X, \mathbb{R})$ une classe vérifiant $|\alpha|^+ \leq 1$, et soit Σ une surface plongée vérifiant $[\Sigma] \cdot [\Sigma] = 0$. Alors $\chi_-(\Sigma) \geq \alpha \cdot [\Sigma]$.*

Preuve. Quitte à ajouter une anse à Σ on peut supposer que ce n'est pas une sphère ($\chi_-(T^2) = \chi_-(S^2) = 0$). Comme le fibré normal à Σ est trivial, le bord d'un voisinage tubulaire de Σ s'identifie à $S^1 \times \Sigma$, et on peut munir X d'une métrique g_0 pour laquelle il existe un plongement isométrique du cylindre $[0,1] \times S^1 \times \Sigma$ muni de la métrique produit avec S^1 de longueur 1 et Σ d'aire 1 et de courbure scalaire constante. Soit g la métrique obtenue à partir de g en dilatant le cylindre d'un facteur $r \gg 0$ afin de remplacer $[0,1]$ par $[0,r]$. Lorsque $r \to +\infty$ on a

$$\|s_g\|_g = 4\pi r^{1/2}(2g-2) + O(1),$$

tandis que toute 2-forme représentant la classe α a nécessairement une norme L^2 minorée par $r^{1/2}\,(\alpha\cdot[\Sigma])$, d'où $\|\alpha\|_g \geq r^{1/2}\,\alpha\cdot[\Sigma]$. Comme $\|\alpha^+\|_g^2 + \|\alpha^-\|_g^2 = \|\alpha\|_g^2$ et $\|\alpha^+\|_g^2 - \|\alpha^-\|_g^2 = \alpha\cdot\alpha$, il vient $2\,\|\alpha^+\|_g^2 \geq r\,(\alpha\cdot[\Sigma])^2 + \alpha\cdot\alpha$, soit

$$\sqrt{2}\,\|\alpha^+\|_g \geq r^{1/2}\,(\alpha\cdot[\Sigma]) + O(1).$$

D'autre part l'hypothèse $|\alpha|^+ \leq 1$ implique que

$$\sqrt{2}\,\|\alpha^+\|_g \leq \frac{1}{4\pi}\|s_g\|_g = r^{1/2}(2g-2) + O(1).$$

En combinant ces deux inégalités pour $r \to +\infty$ on obtient $2g-2 \geq \alpha\cdot[\Sigma]$. □

3.2. **Conséquences de l'inégalité d'adjonction généralisée.** En combinant l'inégalité d'adjonction généralisée avec les résultats de Taubes décrits au §2, on obtient des propriétés remarquables des invariants de Seiberg-Witten des variétés symplectiques qui viennent compléter les conditions énoncées dans le Théorème 2.1.

Corollaire 3.7. *Soit X une variété symplectique compacte de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$:*

1) *pour toute structure* spin^c *dont l'invariant de Seiberg-Witten est non nul, la dimension de l'espace des modules est $d(s) = 0$. En particulier, X est de type simple, et les invariants de Seiberg-Witten de X sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$.*

2) *pour tout fibré en droites non trivial E tel que $SW(E) \neq 0$, le dual de Poincaré de $c_1(E)$ est la classe fondamentale d'une courbe symplectique plongée dont chaque composante connexe C_k vérifie $g(C_k) = 1 + [C_k]\cdot[C_k]$.*

Preuve. On peut se limiter au cas où le fibré E n'est pas trivial, car $d(s) = 0$ pour la structure canonique. Le Théorème 2.6 fournit donc une courbe pseudo-holomorphe (non connexe) dont la classe fondamentale est duale de $c_1(E)$. Soit C_k une composante connexe vérifiant $[C_k]\cdot[C_k] \geq 0$: la formule d'adjonction donne $2g_k - 2 = [C_k]\cdot[C_k] + c_1(K)\cdot[C_k]$. Si $g_k = 0$, l'inégalité d'adjonction généralisée (3.2) appliquée à la structure spin^c canonique donne $[C_k]\cdot[C_k] = c_1(K)\cdot[C_k] = 0$, ce qui est impossible. On a donc $g_k \geq 1$, et l'inégalité d'adjonction généralisée (3.1) donne $c_1(K)\cdot[C_k] \geq c_1(L)\cdot[C_k]$, où $L = K^{-1}\otimes E^2$. On a donc

$$c_1(K)\cdot[C_k] \geq c_1(E)\cdot[C_k]. \tag{3.3}$$

Considérons maintenant le cas d'une composante connexe pour laquelle on a $[C_k]\cdot[C_k]<0$. C_k ne peut pas être un tore multiplement couvert, donc $m_k=1$ et $c_1(E)\cdot[C_k]=[C_k]\cdot[C_k]\leq -1$. D'autre part la formule d'adjonction donne $c_1(K)\cdot[C_k]=2g_k-2-[C_k]\cdot[C_k]\geq 0-2+1=-1$. L'inégalité (3.1) demeure donc valable dans ce cas.

Par somme sur les composantes il vient $c_1(K)\cdot c_1(E)\geq c_1(E)\cdot c_1(E)$, ce qui par la formule (1.5) entraîne $d(s)\leq 0$. On a donc nécessairement $d(s)=0$, ce qui prouve l'assertion 1.

D'autre part, comme $d(s)=0$ on doit avoir égalité dans (3.1) pour toutes les composantes C_k, ce qui implique que $c_1(K)\cdot[C_k]=[C_k]\cdot[C_k]$. Par la formule d'adjonction (2.9) il vient $g_k=1+[C_k]\cdot[C_k]$. En outre dans le cas où $m_k>1$ le tore C_k a un fibré normal trivial et on peut donc le remplacer par m_k tores disjoints plongés symplectiquement et appartenant à la même classe d'homologie. Ceci prouve l'assertion 2. □

Le même genre de raisonnement permet d'obtenir des contraintes sur les variétés symplectiques *minimales*, c'est-à-dire ne contenant pas de sphère symplectiquement plongée de nombre d'intersection -1. Une variété symplectique est minimale si et seulement si elle n'est pas le résultat d'un éclatement symplectique.

Corollaire 3.8. *Soit X une variété symplectique compacte* minimale *de dimension 4 avec $b_2^+\geq 2$:*

1) $c_1(K)\cdot c_1(K)\geq 0$.

2) $b_2^+\geq \frac{4}{5}(b_1-1)+\frac{1}{5}b_2^-$.

Preuve. On se place dans le cas de la structure spin^c duale de la structure canonique ($E=K$), et on considère à nouveau la courbe pseudo-holomorphe fournie par le Théorème 2.6. D'après le corollaire précédent chaque composante C_k de cette courbe vérifie $g_k=1+[C_k]\cdot[C_k]$. L'hypothèse de minimalité interdit le cas $g_k=0$, ce qui implique que $g_k\geq 1$ et donc $[C_k]\cdot[C_k]\geq 0$. Comme les composantes sont mutuellement disjointes, par somme sur k on obtient $c_1(K)\cdot c_1(K)=\sum_k[C_k]\cdot[C_k]\geq 0$.

De plus, cette quantité s'exprime en fonction de la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi=2-2b_1+b_2$ et de la signature $\sigma=b_2^+-b_2^-$ par la formule $c_1(K)\cdot c_1(K)=2\chi+3\sigma$: on a donc $2\chi+3\sigma\geq 0$, ce qui donne l'inégalité de l'assertion 2. □

Les contraintes données par le Théorème 2.1 et les Corollaires 3.7 et 3.8 sont extrêmement fortes. Elles sont au coeur de la plupart des arguments utilisés dans les travaux récents pour prouver qu'une variété n'est pas symplectique ou pour obtenir des résultats sur la structure d'une variété symplectique.

Bibliographie. Partie 3 :

[FS] R. Fintushel, R.J. Stern, *Immersed Spheres in 4-manifolds and the Immersed Thom Conjecture*, Turkish J. Math. **19** (1995) 145–157.

[Kr] P.B. Kronheimer, *Minimal Genus in $S^1\times M^3$*, Invent. Math. **135** (1999), 45–61.

[KM1] P.B. Kronheimer, T.S. Mrowka, *The Genus of Embedded Surfaces in the Projective Plane*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 797–808.

[KM2] P.B. Kronheimer, T.S. Mrowka, *Monopoles and Contact Structures*, Invent. Math. **130** (1997), 209–255.

[MST] J.W. Morgan, Z. Szabó and C.H. Taubes, *A Product Formula for the Seiberg-Witten Invariants and the Generalized Thom Conjecture*, J. Diff. Geom. **44** (1996), 706–788.

[OS] P. Oszváth, Z. Szabó, *The Symplectic Thom Conjecture*, preprint (1998).

Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France
E-mail address: auroux@math.polytechnique.fr