TECHNIQUES APPROXIMATIVEMENT HOLOMORPHES ET INVARIANTS DE VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES

DENIS AUROUX

Résumé des exposés et bibliographie

1. Introduction

Une *forme symplectique* sur une variété C^∞ est une 2-forme ω fermée ($d\omega = 0$) et non dégénérée ($\omega^n = \mathrm{vol} > 0$). Contrairement au cas riemannien où la courbure est un invariant local, toutes les variétés symplectiques sont localement symplectomorphes à $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la forme standard $\omega_0 = \sum dx_i \wedge dy_i$ (théorème de Darboux). Le problème de la classification des variétés symplectiques est donc avant tout de nature topologique.

Les surfaces de Riemann $(\Sigma, \mathrm{vol}_\Sigma)$ sont des variétés symplectiques; de façon plus générale, toute variété kählérienne est symplectique, ce qui inclut toutes les variétés projectives complexes. Toutefois la catégorie symplectique est beaucoup plus vaste que celle des variétés complexes : ainsi Gompf a montré en 1994 que tout groupe de présentation finie peut être réalisé comme le groupe fondamental d'une variété symplectique compacte de dimension 4 [Go1].

A défaut d'être complexe, toute variété symplectique admet une structure *presque complexe* compatible, i.e. un endomorphisme $J \in \mathrm{End}(TX)$ vérifiant $J^2 = -\mathrm{Id}$ et tel que $g(u,v) := \omega(u, Jv)$ est une métrique riemannienne. En tout point, (X, ω, J) est semblable à $(\mathbb{C}^n, \omega_0, i)$, mais J n'est pas *intégrable* : ainsi $\nabla J \neq 0$, $\bar\partial^2 \neq 0$, et le crochet de Lie de deux champs de vecteurs de type $(1,0)$ n'est pas nécessairement de type $(1,0)$. Il n'y a donc pas de fonctions holomorphes, même localement, et en particulier pas de coordonnées locales holomorphes.

Les problèmes auxquels s'attaque la topologie symplectique sont des questions telles que : quelles variétés lisses admettent des structures symplectiques ? peut-on classifier les structures symplectiques sur une variété lisse donnée ? (le théorème de Moser indique que, si la classe de cohomologie $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$ est fixée, alors les déformations de la structure symplectique sont triviales). Les motivations sont aussi bien d'ordre physique (mécanique classique ; théorie des cordes ; ...) que géométrique (les variétés symplectiques sont l'étape suivante naturelle après la compréhension des variétés complexes).

Certaines propriétés des variétés complexes s'étendent au cas symplectique, mais c'est loin d'être la règle générale. C'est en dimension 4 que la situation est la mieux connue, notamment grâce aux travaux de Taubes sur la structure des invariants de Seiberg-Witten des variétés symplectiques et leur relation avec les invariants de Gromov-Witten [Ta]. En revanche, lorsque $\dim X \geq 6$, il y a très peu de résultats : ainsi, aucune obstruction non triviale n'est connue à la symplecticité d'une variété compacte de dimension 6 (hormis l'existence de $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$ telle que $[\omega]^{\wedge 3} \neq 0$).

2. Techniques approximativement holomorphes et sous-variétés symplectiques

L'idée introduite par Donaldson au milieu des années 90 est la suivante : en présence d'une structure presque complexe, il n'y a pas d'objets holomorphes (sections, systèmes linéaires), mais on peut travailler de façon similaire avec des objets approximativement holomorphes.

Soit (X,ω) une variété symplectique compacte de dimension $2n$. On supposera tout du long que $\frac{1}{2\pi}[\omega] \in H^2(X,\mathbb{Z})$; cette condition d'intégralité ne restreint pas le type topologique de X, car toute forme symplectique peut être perturbée jusqu'à rendre sa classe de cohomologie rationnelle, puis entière après multiplication par un facteur constant. Soit J une structure presque complexe compatible avec ω, et soit $g(.,.) = \omega(.,J.)$ la métrique riemannienne correspondante.

On considère un fibré en droites complexes L sur X tel que $c_1(L) = \frac{1}{2\pi}[\omega]$, muni d'une métrique hermitienne et d'une connexion hermitienne ∇^L dont la forme de courbure est $F(\nabla^L) = -i\omega$. La structure presque complexe induit une décomposition de la connexion : $\nabla^L = \partial^L + \bar\partial^L$, avec $\partial^L s(v) = \frac{1}{2}(\nabla^L s(v) - i\nabla^L s(Jv))$ et $\bar\partial^L s(v) = \frac{1}{2}(\nabla^L s(v) + i\nabla^L s(Jv))$.

Si la structure presque complexe J est intégrable, i.e. si X est une variété complexe kählérienne, alors le fibré L est un fibré en droites holomorphe ample, c'est-à-dire que pour k suffisamment grand le fibré $L^{\otimes k}$ admet de nombreuses sections holomorphes. Ainsi, la variété X se plonge dans un espace projectif (Kodaira); des sections hyperplanes génériques fournissent des hypersurfaces lisses de X (Bertini), et plus généralement le système linéaire formé par les sections de $L^{\otimes k}$ permet de construire diverses structures (pinceaux de Lefschetz, ...).

Lorsque la variété X est seulement symplectique, le défaut d'intégrabilité de J empêche l'existence de sections holomorphes. Toutefois, il est possible de trouver un modèle local *approximativement holomorphe* : un voisinage d'un point $x \in X$ muni de la forme symplectique ω et de la structure presque complexe J s'identifie à un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ muni de la forme symplectique standard ω_0 et d'une structure presque complexe de la forme $i + O(|z|)$. Dans ce modèle local, le fibré $L^{\otimes k}$ muni de la connexion $\nabla = (\nabla^L)^{\otimes k}$ de courbure $-ik\omega$ peut s'identifier au fibré trivial $\underline{\mathbb{C}}$ muni de la connexion $d + \frac{k}{4}\sum(z_j\,d\bar z_j - \bar z_j\,dz_j)$. La section de $L^{\otimes k}$ définie localement par $s_{k,x}(z) = \exp(-\frac{1}{4}k|z|^2)$ est alors approximativement holomorphe [Do1].

Plus précisément, une suite de sections s_k de $L^{\otimes k}$ est dite approximativement holomorphe si, pour la métrique redimensionnée $g_k = kg$, et en normalisant les sections s_k de sorte que $\|s_k\|_{C^r,g_k} \sim C$, on a une inégalité de la forme $\|\bar\partial s_k\|_{C^{r-1},g_k} < C'k^{-1/2}$, où C et C' sont des constantes indépendantes de k. Le changement de métrique, qui dilate les distances d'un facteur $\sqrt{k}$, est nécessaire pour l'obtention d'estimées uniformes du fait de la courbure de plus en plus grande du fibré $L^{\otimes k}$. L'idée intuitive est que, pour k grand, les sections du fibré $L^{\otimes k}$ de courbure $-ik\omega$ voient la géométrie de X à petite échelle (de l'ordre de $1/\sqrt{k}$), ce qui rend la structure presque complexe J presque intégrable et permet d'approcher de mieux en mieux la condition d'holomorphie $\bar\partial s = 0$.

Il est à noter que, la condition ci-dessus étant ouverte, il n'est pas possible de définir un "espace de sections approximativement holomorphes" de $L^{\otimes k}$ de façon simple (cf. les travaux de Borthwick et Uribe [BU] ou de Shiffman et Zelditch pour d'autres approches du problème).

Une fois obtenues de nombreuses sections approximativement holomorphes, l'objectif est d'en trouver certaines dont le comportement géométrique soit aussi générique que possible. Donaldson a établi le résultat suivant [Do1] :

Théorème 1 (Donaldson). *Pour $k \gg 0$, $L^{\otimes k}$ admet des sections approximativement holomorphes s_k dont les lieux d'annulation W_k sont des hypersurfaces symplectiques lisses.*

Ce résultat part de l'observation que, si la section s_k s'annule transversalement et si l'on a $|\bar\partial s_k(x)| \ll |\partial s_k(x)|$ en tout point de $W_k = s_k^{-1}(0)$, alors la sous-variété W_k est symplectique (i.e., $\omega_{|W_k}$ est non dégénérée, ce qui implique que $(W_k, \omega_{|W_k})$ est symplectique), et même approximativement J-holomorphe (i.e. $J(TW_k)$ est proche de TW_k). Le point crucial est donc d'obtenir une borne inférieure en tout point de W_k pour ∂s_k, pour compenser le défaut d'holomorphie.

On dit que les sections s_k de $L^{\otimes k}$ sont *uniformément transverses à* 0 s'il existe une constante $\eta > 0$ (indépendante de k) telle que, en tout point de X tel que $|s_k(x)| < \eta$, on a $|\partial s_k(x)|_{g_k} > \eta$.

Cette estimation uniforme sur la tranversalité des sections s_k suffit à assurer le Théorème 1. L'idée de la construction de telles sections comporte deux grandes étapes : la première est un résultat de transversalité effectif local pour des fonctions à valeurs complexes, et fait appel à un résultat de Yomdin sur la complexité des ensembles semi-algébriques réels; la seconde étape est un procédé de globalisation original, qui permet par perturbations successives des sections s_k d'obtenir des propriétés de transversalité uniforme sur des ouverts de plus en plus grands jusqu'à recouvrir X [Do1].

Les sous-variétés symplectiques construites par Donaldson possèdent plusieurs propriétés remarquables qui les rapprochent davantage des sous-variétés complexes que des sous-variétés symplectiques générales. Tout d'abord, elles vérifient le théorème de l'hyperplan de Lefschetz : jusqu'en dimension moitié, les groupes d'homologie et d'homotopie de W_k sont identiques à ceux de X [Do1]. De façon plus importante, elles vérifient une propriété d'unicité asymptotique : pour k suffisamment grand fixé, les sous-variétés W_k sont, à isotopie symplectique près, indépendantes de tous les choix effectués (y compris celui de la structure presque complexe J) [Au1].

Pour terminer, il est à noter que la construction de Donaldson a été transposée au cadre de la géométrie de contact (en dimension impaire) par Ibort, Martinez-Torres et Presas [IMP].

3. Pinceaux et fibrations de Lefschetz symplectiques

Si l'on considère non plus une, mais deux sections de $L^{\otimes k}$, Donaldson a montré qu'il est possible de construire des *pinceaux de Lefschetz symplectiques* [Do2, Do3] : un couple de sections approximativement holomorphes (s_k^0, s_k^1) de $L^{\otimes k}$ convenablement choisies définit une famille d'hypersurfaces $\Sigma_{k,\alpha} = \{x \in X,\ s_k^0(x) + \alpha s_k^1(x) = 0\}$, $\alpha \in \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Les sous-variétés $\Sigma_{k,\alpha}$ sont symplectiques, et elles sont toutes lisses excepté un nombre fini d'entre elles qui présentent une singularité isolée ; elles s'intersectent le long des *points base* du pinceau, qui forment une sous-variété symplectique lisse $Z_k = \{s_k^0 = s_k^1 = 0\}$ de codimension 4.

On peut également définir l'application projective $f_k = (s_k^0 : s_k^1) : X - Z_k \to \mathbb{CP}^1$, dont les points critiques correspondent aux singularités des fibres $\Sigma_{k,\alpha}$. La fonction f_k est une fonction de Morse complexe, c'est-à-dire qu'au voisinage d'un point critique on a un modèle local $f_k(z) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$ en coordonnées approximativement holomorphes.

L'argument de Donaldson repose à nouveau sur des perturbations successives des sections s_k^0 et s_k^1 afin d'obtenir des propriétés de transversalité uniforme, non seulement pour les sections (s_k^0, s_k^1) mais aussi pour la dérivée ∂f_k [Do3]. Donaldson montre également que, pour $k \gg 0$ fixé, les pinceaux de Lefschetz obtenus sont tous identiques à isotopie près, indépendamment des choix de construction.

Après éclatement de X le long de Z_k, on obtient une *fibration de Lefschetz* $\hat{f}_k : \hat{X} \to \mathbb{CP}^1$, dont on peut étudier la *monodromie* autour des fibres singulières (correspondant aux valeurs critiques de f_k). Cette monodromie prend ses valeurs dans le *mapping class group* symplectique, $\mathrm{Map}^\omega(\Sigma_k, Z_k) = \pi_0(\{\phi \in \mathrm{Symp}(\Sigma_k, \omega),\ \phi_{|V(Z_k)} = \mathrm{Id}\})$, où Σ_k est une fibre générique de $\hat{f}_k$ (correspondant au choix d'un point de référence $\alpha \in \mathbb{CP}^1$), et $V(Z_k)$ est un voisinage de Z_k dans la fibre Σ_k. On obtient ainsi un morphisme de monodromie $\psi_k : \pi_1(\mathbb{C} - \mathrm{crit}\, f_k) \to \mathrm{Map}^\omega(\Sigma_k, Z_k)$. La monodromie autour d'une fibre singulière est un *twist de Dehn* (généralisé) le long du *cycle évanescent*, qui est une sphère lagrangienne plongée $S^{n-1} \subset \Sigma_k$.

Le cas le plus étudié est celui où $\dim X = 4$: dans ce cas, les fibres sont des surfaces de Riemann, et Z_k est constitué de points isolés. Le groupe $\mathrm{Map}^\omega(\Sigma_k, Z_k)$ s'identifie donc au mapping class group $\mathrm{Map}_{g,N}$ d'une surface de Riemann de genre $g = g(\Sigma_k)$ à $N = \mathrm{card}\, Z_k$ trous, et la monodromie autour d'une fibre singulière (une surface de Riemann possédant un point double à croisement normal) est un twist de Dehn le long d'un lacet plongé.

Le résultat d'unicité asymptotique de Donaldson implique que, pour k suffisamment grand, la monodromie des pinceaux de Lefschetz construits à partir de sections approximativement holomorphes de $L^{\otimes k}$ est un invariant symplectique de (X, ω). Inversement, Gompf a montré que la donnée du morphisme de monodromie détermine entièrement la variété X munie de sa structure symplectique ; de plus, en dimension 4 l'espace total d'une "fibration de Lefschetz topologique" au-dessus de $\mathbb{CP}^1$ admet toujours une structure symplectique [GS].

Les propriétés géométriques et topologiques des pinceaux et fibrations de Lefschetz ont fait l'objet de nombreuses études ces dernières années ; cf. par exemple [ABKP], [Sm], [EK]. Par ailleurs, Donaldson et Smith ont montré qu'une variante des invariants de Gromov-Witten peut être exprimée en termes de fibrations associées à un pinceau de Lefschetz, ce qui leur a permis de redémontrer sans faire appel à la théorie de Seiberg-Witten des résultats de Taubes sur l'existence de courbes symplectiques dans certaines classes d'homologie [DS]. De même, Seidel a introduit une version combinatoire de l'homologie de Floer lagrangienne pour les pinceaux de Lefschetz, ce qui permet d'obtenir une description simplifiée, effectivement calculable, de certaines catégories de Fukaya [Se].

4. Revêtements de $\mathbb{CP}^2$, systèmes linéaires et applications projectives

On considère maintenant des systèmes linéaires engendrés par trois sections approximativement holomorphes (s_k^0, s_k^1, s_k^2) de $L^{\otimes k}$: pour $k \gg 0$, il est à nouveau possible d'obtenir un comportement générique pour l'application projective $f_k = (s_k^0 : s_k^1 : s_k^2)$ (à valeurs dans $\mathbb{CP}^2$) associée au système linéaire.

Théorème 2 ([Au2, Au3]). *Pour k suffisamment grand, trois sections approximativement holomorphes convenablement choisies de $L^{\otimes k}$ déterminent une application $f_k : X - \{\text{points base}\} \to \mathbb{CP}^2$ à modèles locaux génériques, de façon canonique à isotopie près.*

Si la variété X est de dimension 4, le système linéaire n'a pas de points base, et l'application f_k est un *revêtement ramifié* : pour tout point $x \in X$, il existe des coordonnées approximativement holomorphes locales au voisinage de x et de $f_k(x)$ dans lesquelles f_k s'identifie à l'un des trois modèles locaux génériques pour une application holomorphe de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$: $(u, v) \mapsto (u, v)$ (difféomorphisme local), $(u, v) \mapsto (u^2, v)$ (ramification d'ordre 2), ou $(u, v) \mapsto (u^3 - uv, v)$ (cusp).

Lorsque $\dim X > 4$, le lieu des points base $Z_k = \{s_k^0 = s_k^1 = s_k^2 = 0\}$ est une sous-variété symplectique lisse de X, de codimension réelle 6; au voisinage d'un point de Z_k, un modèle local pour f_k est $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1 : z_2 : z_3)$. Hors de Z_k, les trois modèles locaux génériques deviennent respectivement : $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, z_2)$; $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2, z_n)$; $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1^3 - z_1 z_n + z_2^2 + \dots + z_{n-1}^2, z_n)$.

Dans tous les cas, le lieu des points critiques de f_k est une courbe symplectique lisse (connexe) $R_k \subset X$. En revanche, la courbe symplectique $D_k = f_k(R_k) \subset \mathbb{CP}^2$ ("courbe de ramification", ou "courbe discriminante") n'est immergée qu'en-dehors des points où le troisième modèle local s'applique. En ces points, la courbe D_k présente un *cusp complexe* $(27x^2 = 4y^3)$. Outre les cusps, la courbe D_k présente également génériquement des *points doubles*, qui n'apparaissent pas dans les modèles locaux car ils correspondent à des ramifications en deux points distincts de la même fibre de f_k ; bien que D_k soit approximativement holomorphe, les deux orientations sont a priori envisageables pour ses points doubles, contrairement au cas complexe. Pour k grand, la topologie de la courbe D_k n'est donc un invariant symplectique que modulo création ou annulation de paires de points doubles admissibles.

L'idée de la preuve du Théorème 2 consiste à recenser les divers cas particuliers, génériques ou non, susceptibles de se produire ; chacun correspond à l'annulation d'une certaine quantité exprimable en fonction des sections s_k^0, s_k^1, s_k^2 et de leurs dérivées. On détermine en fait ainsi une *stratification* d'un fibré de jets par des sous-variétés approximativement holomorphes. L'ingrédient majeur est alors un résultat de transversalité uniforme pour les jets de sections approximativement holomorphes vis-à-vis de telles stratifications [Au4], qui se démontre de façon analogue aux résultats de Donaldson.

Les données topologiques qui caractérisent un revêtement ramifié de $\mathbb{CP}^2$ sont d'une part la courbe de ramification $D_k \subset \mathbb{CP}^2$ (à isotopie et annulation de paires de points doubles près), et d'autre part un morphisme de monodromie $\theta_k : \pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k) \to S_N$ décrivant l'agencement des $N = \deg f_k$ feuillets du revêtement au-dessus de $\mathbb{CP}^2 - D_k$.

L'étude d'une courbe singulière $D \subset \mathbb{CP}^2$ peut se faire en utilisant les techniques de groupes de tresses introduites en géométrie complexe par Moishezon et Teicher [Mo1, Te] : l'idée est de choisir une projection linéaire $\pi : \mathbb{CP}^2 - \{\mathrm{pt}\} \to \mathbb{CP}^1$, par exemple $\pi(x : y : z) = (x : y)$, de telle sorte que la courbe D soit en position générale par rapport aux fibres de π. La restriction $\pi_{|D}$ est alors un revêtement ramifié singulier de degré $d = \deg D$, dont les points particuliers sont d'une part les singularités de D (points doubles et cusps) et d'autre part des points de tangence verticale où la courbe D devient tangente aux fibres de π.

Hormis celles qui contiennent des points particuliers de D, les fibres de π sont des droites qui intersectent la courbe D en d points distincts. Si l'on choisit un point de référence dans $\mathbb{CP}^1$ (et la fibre correspondante $\ell \simeq \mathbb{C} \subset \mathbb{CP}^2$ de π), et si l'on se restreint à un ouvert affine afin de pouvoir trivialiser la fibration π, la topologie du revêtement ramifié $\pi_{|D}$ peut être décrite par un morphisme $\rho : \pi_1(\mathbb{C} - \{\mathrm{pts}\}) \to B_d$, où B_d est le groupe des tresses à d brins : la tresse $\rho(\gamma)$ correspond au mouvement des d points de $\ell \cap D$ à l'intérieur des fibres de π lors d'un déplacement le long du lacet γ. De façon équivalente, le morphisme ρ peut être décrit par une *factorisation* dans le groupe de tresses B_d, faisant intervenir la monodromie autour de chacun des points particuliers de D. Le morphisme ρ et la factorisation correspondante dépendent de choix de trivialisation, qui les affectent par conjugaison simultanée (changement de trivialisation de la fibre ℓ de π) ou par opérations de Hurwitz (changement de générateurs de $\pi_1(\mathbb{C} - \{\mathrm{pts}\})$). Il y a équivalence complète entre la donnée d'un morphisme $\rho : \pi_1(\mathbb{C} - \{\mathrm{pts}\}) \to B_d$ à ces opérations algébriques près et la donnée d'une courbe singulière plane D de degré d compatible avec la projection π à isotopie (C^∞) près [AK].

Contrairement au cas complexe, dans le cas symplectique il n'est pas évident a priori que la courbe de ramification D_k puisse posséder les propriétés attendues vis-à-vis de la projection linéaire π; cela requiert en fait une amélioration du Théorème 2 [AK, Au3]. Par ailleurs, il faut tenir compte des créations ou annulations de paires de points doubles admissibles dans D_k, qui affectent le morphisme $\rho_k : \pi_1(\mathbb{C} - \{\mathrm{pts}\}) \to B_d$ par insertion ou suppression de paires de facteurs. Le résultat d'unicité du Théorème 2 implique alors le résultat suivant :

Théorème 3 ([AK]). *Pour k fixé suffisamment grand, les données combinatoires (ρ_k, θ_k) sont, à conjugaison, opérations de Hurwitz et insertions ou suppressions près, des invariants de la variété symplectique (X, ω). De plus, ces invariants sont* complets, *en ce sens que la donnée de ρ_k et de θ_k permet de reconstruire la variété symplectique (X, ω) à symplectomorphisme près.*

Il est intéressant de mentionner que les pinceaux de Lefschetz symplectiques construits par Donaldson peuvent être réobtenus très facilement à partir des revêtements ramifiés f_k, simplement en considérant les applications composées $\pi \circ f_k$ à valeurs dans $\mathbb{CP}^1$. Autrement dit, les fibres $\Sigma_{k,\alpha}$ du pinceau sont les préimages par f_k des fibres de π, les fibres singulières du pinceau correspondant aux points de tangence verticale de D_k. En fait, les morphismes de monodromie ψ_k des pinceaux de Lefschetz peuvent être construits de façon explicite à partir de θ_k et ρ_k : par restriction à la droite $\bar{\ell} = \ell \cup \{\infty\}$, le morphisme θ_k à valeurs dans S_N décrit la topologie d'une fibre du pinceau en tant que revêtement ramifié de $\mathbb{CP}^1$ à N feuillets et d points de ramification, ce qui permet de définir un *morphisme de relèvement* $(\theta_k)_*$ d'un sous-groupe de B_d à valeurs dans $\mathrm{Map}(\Sigma_k, Z_k) = \mathrm{Map}_{g,N}$. On a alors $\psi_k = (\theta_k)_* \circ \rho_k$ [AK].

Lorsque $\dim X > 4$, la topologie de l'application projective f_k et de la courbe $D_k \subset \mathbb{CP}^2$ peuvent encore être décrites de la même façon ; la seule différence est que le morphisme θ_k décrivant la monodromie de la fibration au-dessus de $\mathbb{CP}^2 - D_k$ prend désormais ses valeurs dans le mapping class group symplectique $\mathrm{Map}^\omega(\Sigma_k, Z_k)$ de la fibre générique de f_k. Le Théorème 3 demeure vrai [Au3] ; toutefois, ces invariants sont difficilement exploitables en pratique, notamment lorsque $\dim X \geq 8$, car le groupe $\mathrm{Map}^\omega(\Sigma_k, Z_k)$ est très mal connu.

Cependant, il existe une procédure de réduction dimensionnelle qui permet d'éviter cet écueil. En effet, la restriction de f_k à la droite $\bar{\ell} \subset \mathbb{CP}^2$ définit un pinceau de Lefschetz sur une hypersurface symplectique $W_k \subset X$, de fibre générique Σ_k et de monodromie θ_k. Cette structure peut être enrichie par ajout d'une section supplémentaire de $L^{\otimes k}$ de façon à obtenir une application de W_k dans $\mathbb{CP}^2$, qui peut de nouveau être caractérisée par des invariants de monodromie, et ainsi de suite jusqu'en petite dimension. Au final, étant donnée une variété symplectique (X^{2n}, ω) et un entier $k \gg 0$, on obtient $n-1$ courbes singulières $D_k^{(n)}, D_k^{(n-1)}, \ldots, D_k^{(2)} \subset \mathbb{CP}^2$, décrites par autant de morphismes à valeurs dans des groupes de tresses, et un morphisme $\theta_k^{(2)}$ de $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k^{(2)})$ dans un groupe symétrique. Ces invariants déterminent la variété (X, ω) à symplectomorphisme près [Au3].

5. Groupes fondamentaux de complémentaires de courbes

Au vu des résultats ci-dessus, la topologie symplectique semble se réduire en grande partie à l'étude de certaines courbes planes singulières, ou de façon équivalente de certains mots dans des groupes de tresses. En fait, si les invariants définis par le Théorème 3 sont calculables explicitement pour divers exemples ($\mathbb{CP}^2$, $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ [Mo3], quelques intersections complètes [Ro], la surface d'Hirzebruch $\mathbb{F}_1$, et les revêtements doubles de $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ [ADKY] ; cf. aussi [AK2]), il n'est pas possible de les utiliser directement pour différencier deux variétés symplectiques, car il n'existe pas d'algorithme pour comparer deux mots dans un groupe de tresses à opérations de Hurwitz près. Aussi doit-on se tourner vers des invariants moins complets mais plus maniables.

Pour l'étude des surfaces complexes, Moishezon et Teicher ont introduit le groupe $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - D)$ comme invariant effectivement utilisable pour étudier une courbe de ramification $D \subset \mathbb{CP}^2$ [Mo3, Te] ; la monodromie ρ fournit une présentation explicite de $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - D)$. Toutefois, comme l'introduction ou l'élimination de paires de points doubles affecte ce groupe fondamental, il ne peut être directement utilisé comme invariant symplectique.

L'inclusion $i : \ell - (\ell \cap D_k) \to \mathbb{CP}^2 - D_k$ induit un morphisme surjectif sur les groupes fondamentaux; les images des générateurs standard du groupe libre et leurs conjugués forment un sous-ensemble $\Gamma_k \subset \pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)$ dont les éléments sont appelés *générateurs géométriques*. Les images par le morphisme θ_k des générateurs géométriques sont des transpositions dans S_N. La création d'une paire de points doubles dans la courbe D_k revient à quotienter $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)$ par une relation de la forme $[\gamma_1, \gamma_2] \sim 1$, où $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_k$ sont tels que $\theta_k(\gamma_1)$ et $\theta_k(\gamma_2)$ sont des transpositions disjointes. On note K_k le sous-groupe normal de $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)$ engendré par de tels commutateurs $[\gamma_1, \gamma_2]$.

Le groupe $\bar{G}_k = \pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)/K_k$, appelé *groupe fondamental stabilisé*, est un invariant symplectique, qui peut être calculé explicitement pour les divers exemples mentionnés ci-dessus [ADKY].

Il est à noter que, pour tous les exemples connus, pour k suffisamment grand l'opération de stabilisation devient triviale ($K_k = \{1\}$). Par ailleurs, la structure du groupe $\bar{G}_k$ pour ces exemples est remarquablement simple (reliée à certains quotients de groupes de tresses). En fait, divers indices incitent à penser que, du moins lorsque la variété X est simplement connexe, la structure de $\bar{G}_k$ peut s'expliciter totalement en termes d'invariants ne faisant intervenir que la cohomologie de X [ADKY]. Si cette conjecture est confirmée, il faudra explorer d'autres pistes pour parvenir à exploiter en pratique tout le potentiel des invariants de monodromie.

Bibliographie

1. Ouvrages et articles de référence:

[GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, New York, 1978.

[McS] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford University Press, Oxford, 1995.

[GS] R.E. Gompf, A.I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Math. **20**, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.

[Bi] J. Birman, *Braids, Links and Mapping class groups*, Annals of Math. Studies **82**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974.

[Go1] R.E. Gompf, *A new construction of symplectic manifolds*, Ann. of Math. **142** (1995), 527–595.

[Ta] C.H. Taubes, *The Seiberg-Witten and Gromov invariants*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 221–238.

2. Techniques approximativement holomorphes et construction de sous-variétés:

[Do1] S.K. Donaldson, *Symplectic submanifolds and almost-complex geometry*, J. Differential Geom. **44** (1996), 666–705.

[Au1] D. Auroux, *Asymptotically holomorphic families of symplectic submanifolds*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 971–995.

[Si] J.C. Sikorav, *Construction de sous-variétés symplectiques*, Séminaire Bourbaki n° **844** (1998).

[AGM] D. Auroux, D. Gayet, J.-P. Mohsen, *Symplectic hypersurfaces in the complement of an isotropic submanifold*, Math. Annalen **321** (2001), 739–754.

[B] P. Biran, *Lagrangian barriers and symplectic embeddings*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), 407–464.

[IMP] A. Ibort, D. Martinez-Torres, F. Presas, *On the construction of contact submanifolds with prescribed topology*, J. Differential Geom. **56** (2000), 235–283.

[BU] D. Borthwick, A. Uribe, *Nearly kählerian embeddings of symplectic manifolds*, Asian J. Math. **4** (2000), 599–620.

3. Pinceaux et fibrations de Lefschetz symplectiques:

[Do2] S.K. Donaldson, *Lefschetz fibrations in symplectic geometry*, Documenta Math., Extra Volume ICM 1998, II, 309–314.

[Do3] S.K. Donaldson, *Lefschetz pencils on symplectic manifolds*, J. Differential Geom. **53** (1999), 205–236.

[ABKP] J. Amorós, F. Bogomolov, L. Katzarkov, T. Pantev, *Symplectic Lefschetz fibrations with arbitrary fundamental groups*, J. Differential Geom. **54** (2000), 489–545.

[EK] H. Endo, D. Kotschick, *Bounded cohomology and non-uniform perfection of mapping class groups*, Inventiones Math. **144** (2001), 169–175.

[Sm] I. Smith, *Lefschetz pencils and divisors in moduli space*, Geom. Topol. **5** (2001), 579–608.

[DS] S. Donaldson, I. Smith, *Lefschetz pencils and the canonical class for symplectic 4-manifolds*, preprint (`math.SG/0012067`).

[Se] P. Seidel, *Vanishing cycles and mutation*, Proc. 3rd European Congress of Mathematics (Barcelona, 2000), Birkhäuser (`math.SG/0007115`).

4. Revêtements de $\mathbb{CP}^2$ et applications projectives:

[Au2] D. Auroux, *Symplectic 4-manifolds as branched coverings of $\mathbb{CP}^2$*, Inventiones Math. **139** (2000), 551–602.

[AK] D. Auroux, L. Katzarkov, *Branched coverings of $\mathbb{CP}^2$ and invariants of symplectic 4-manifolds*, Inventiones Math. **142** (2000), 631–673.

[Au3] D. Auroux, *Symplectic maps to projective spaces and symplectic invariants*, Proc. 7th Gökova Geometry-Topology Conference (2000), International Press, 2001, 1–42 (`math.GT/0007130`).

[Au4] D. Auroux, *Estimated transversality in symplectic geometry and projective maps*, Proc. KIAS International Conference on Symplectic Geometry, Seoul (2000), World Scientific, 2001, sous presse (`math.SG/0010052`).

[AK2] D. Auroux, L. Katzarkov, *The degree doubling formula for braid monodromies and Lefschetz pencils*, preprint.

[Go2] R. Gompf, *The topology of symplectic manifolds*, Proc. 7th Gökova Geometry-Topology Conference (2000), International Press, 2001, 43–59.

5. Groupes fondamentaux de complémentaires de courbes de ramification:

[Te] M. Teicher, *Braid groups, algebraic surfaces and fundamental groups of complements of branch curves*, Algebraic Geometry (Santa Cruz, 1995), Proc. Sympos. Pure Math., **62** (part 1), Amer. Math. Soc., 1997, 127–150.

[Mo1] B. Moishezon, *Stable branch curves and braid monodromies*, Algebraic Geometry (Chicago, 1980), Lecture Notes in Math. **862**, Springer, 1981, pp. 107–192.

[Mo2] B. Moishezon, *Algebraic surfaces and the arithmetic of braids II*, Combinatorial methods in topology and algebraic geometry (Rochester, 1982), Contemp. Math. **44**, Amer. Math. Soc., 1985, pp. 311–344.

[Mo3] B. Moishezon, *On cuspidal branch curves*, J. Algebraic Geom. **2** (1993) 309–384.

[Ro] A. Robb, *On branch curves of algebraic surfaces*, Singularities and Complex Geometry (Beijing, 1994), AMS/IP Stud. Adv. Math. **5**, Amer. Math. Soc., 1997, pp. 193–221.

[ADKY] D. Auroux, S.K. Donaldson, L. Katzarkov, M. Yotov, *Fundamental groups of complements of plane curves and symplectic invariants*, en préparation.