*Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, **327** (6), Série I, 1998, 541-546

# EQUATION DE YANG-BAXTER DYNAMIQUE CLASSIQUE ET ALGEBROIDES DE LIE

MOMO BANGOURA AND YVETTE KOSMANN-SCHWARZBACH

**Résumé.** On donne l'interprétation des $r$-matrices dynamiques, solutions de l'équation de Yang-Baxter dynamique classique, en termes de bigébroïdes de Lie. Par intégration de telles bigébroïdes de Lie, on obtient les groupoïdes de Poisson dynamiques d'Etingof et Varchenko. On étend ainsi au cas dynamique la correspondance entre $r$-matrices classiques, bigèbres de Lie exactes et groupes de Lie-Poisson exacts.

*The classical dynamical Yang-Baxter equation and Lie algebroids*

**Abstract.** *We interpret the dynamical $r$-matrices, solutions of the classsical dynamical Yang-Baxter eaquation, in terms of Lie bialgebroids. Integrating such Lie bialgebroids, we obtain the dynamical Poisson groupoids of Etingof and Varchenko. We thus extend the correspondence between classical $r$-matrices, coboundary Lie bialgebras and coboundary Poisson-Lie groups to the dynamical case.*

*Abridged English Version*

In 1997, Etingof and Varchenko [3] gave a geometric interpretation of the classical dynamical Yang-Baxter equation in terms of Poisson groupoids. In this Note, we give the interpretation of this equation in terms of the corresponding infinitesimal objects, which are the Lie bialgebroids. To any Lie groupoid, $\mathcal{G}$, one associates its Lie algebroid, $A$. If moreover the Lie groupoid $\mathcal{G}$ carries a Poisson structure compatible with its groupoid structure, making it a Poisson groupoid in the sense of Weinstein [13], its Lie algebroid is then a Lie bialgebroid, which means that the dual vector bundle $A^*$ of $A$ has a Lie algebroid structure which is compatible with that of $A$ [11] [5]. In Section 2, we state (Theorem 2.2.1) that a section $P$ of $\bigwedge^2 A$, where $A$ is a Lie algebroid, defines a Lie algebroid structure on the dual $A^*$ of $A$ if and only if its Schouten bracket has vanishing Lie derivative with respect to any section of $A$. The Lie algebroid bracket on $A^*$ defined by means of $P$ is necessarily compatible with the Lie algebroid bracket of $A$, *i. e.*, the pair $(A, A^*)$ is a Lie bialgebroid. In Section 3, we define a Lie algebroid $A$ associated with a finite-dimensional Lie algebra $\mathfrak{g}$ and an open set in the dual of a Lie subalgebra $\mathfrak{h}$ of $\mathfrak{g}$, and we show that there exists a canonically defined Lie algebroid structure on its dual vector bundle, such that $(A, A^*)$ is a Lie bialgebroid. We then introduce, in Section 4, the classical dynamical Yang-Baxter equation (4.1.1), and we show (Theorem 4.3.1) that each solution, $r$, of this equation, with constant, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-invariant symmetric part, defines an $r$-dependent Lie algebroid structure on $A^*$ such that $(A, A^*)$ is again a Lie bialgebroid. Actually, the Lie algebroid bracket on $A^*$ depends only on the anti-symmetric part of $r$. More precisely, in Theorem 4.2.1, we derive the necessary and sufficient conditions for a map, $a$ from an open set in $\mathfrak{h}^*$ to $\bigwedge^2 \mathfrak{g}$, to define such a Lie algebroid bracket on $A^*$. These conditions are identical to conditions $(i)$ and $(ii)$ of Theorem 1.1 of [3].

More generally, the Lie algebroid of a dynamical Poisson groupoid is a Lie bialgebroid, $(A, A^*)$, called a *dynamical Lie bialgebroid*, where the bracket on the sections of $A^*$ is such that for constant sections $\alpha, \beta, \xi$ as in Section 3.2, $[\alpha, \beta]_{A^*} = [\alpha, \beta]$ and $[\alpha, \xi]_{A^*} = \mathrm{ad}^*_\alpha \xi$. A *coboundary dynamical Lie bialgebroid* is a dynamical Lie bialgebroid in which $[\xi, \eta]_{A^*} = [\xi, \eta]_a = \mathcal{L}^A_{a^\sharp \xi}\eta - \mathcal{L}^A_{a^\sharp \eta}\xi - d_A(a(\xi, \eta))$ , where $a$ satisifies $(i)$ and $(ii)$ of Theorem 4.2.1. A coboundary dynamical Lie bialgebroid is called *quasi-triangular* if $a$ is the anti-symmetric part of a solution of the classical dynamical Yang-Baxter equation. (The fact that any such solution satisfies $(i)$ and $(ii)$ follows from (4.1.2).)

From the results of the last section (Section 5) we see that, by integrating the coboundary dynamical Lie bialgebroids, we recover the coboundary dynamical Poisson groupoids of Etingof and Varchenko, while, by integrating the Lie bialgebroids associated to solutions of the classical dynamical Yang-Baxter equation, we recover the quasi-triangular dynamical Poisson groupoids.

## 1. Introduction

L'équation de Yang-Baxter dynamique classique est une généralisation de l'équation de Yang-Baxter classique qui joue un rôle de plus en plus important dans la théorie des systèmes intégrables. Cette équation est apparue dans la recherche de $r$-matrices pour les systèmes hamiltoniens du type de Calogero-Moser [1] et comme limite semi-classique de l'équation de Yang-Baxter dynamique quantique [4]. On la rencontre aussi comme condition de compatibilité pour les équations de Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard. Nous nous intéressons ici à l'équation sans paramètre spectral. La classification des solutions de l'équation de Yang-Baxter dynamique classique a été effectuée par Etingof et Varchenko [3], puis dans un cas plus général, par Schiffmann [12].

En 1997, Etingof et Varchenko [3], ont donné une interprétation de l'équation de Yang-Baxter dynamique classique en termes de certains groupoïdes de Poisson [13], qu'ils ont appelés groupoïdes de Poisson dynamiques. Il nous a semblé indispensable de fournir l'interprétation manquante en termes des objets infinitésimaux correspondants qui sont les bigébroïdes de Lie [11] [5]. Nous généralisons ainsi la construction (*voir* [2]) des bigèbres de Lie exactes à partir des solutions de l'équation de Yang-Baxter classique.

Tout récemment des interprétations de l'équation de Yang-Baxter classique dans le cas dynamique ont été également proposées par Jiang-Hua Lu et, indépendamment, par E. Karolinsky, dans la théorie des espaces homogènes de Poisson, par Zhang-Ju Liu et Ping Xu comme déformations de structures de Dirac dans certaines algébroïdes de Courant et par A. Alekseev, qui de plus détermine de nouvelles solutions de cette équation. Ces travaux sont en cours de publication.

## 2. Algébroïdes de Lie et bigébroïdes de Lie

Toutes les variétés et applications considérées sont de classe $C^\infty$.

### 2.1. Algébroïdes de Lie.

Les algébroïdes de Lie généralisent les algèbres de Lie. Les fibrés en algèbres de Lie sont des algébroïdes de Lie. Plus généralement,

**Définition 2.1.1.** [10] Une *algébroïde de Lie* $(A, [\ ,\ ]_A, q_A)$, de base $B$, est un fibré vectoriel $A$, de base $B$, muni d'un crochet d'algèbre de Lie $[\ ,\ ]_A$ sur les sections de $A$ et d'un morphisme de fibrés vectoriels $q_A : A \to TB$, où $TB$ est le fibré tangent de $B$, tels que

- $[X, fY]_A = f[X, Y]_A + (q_A(X).f)\ Y$, pour toutes sections $X, Y$ de $A$, et pour toute fonction $f \in C^\infty(B)$,
- $q_A$ définit un morphisme de $\Gamma(A)$ dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $B$,

où $\Gamma(A)$ est l'espace vectoriel des sections du fibré $A$ muni du crochet de Lie $[\ ,\ ]_A$. Le morphisme de fibrés vectoriels $q_A$ s'appelle l'*ancre* de $A$.

L'exemple le plus simple d'algébroïde de Lie ayant une ancre non nulle est celui du fibré tangent à une variété, l'ancre étant l'identité. On peut faire sur les algébroïdes de Lie un calcul différentiel qui généralise le calcul différentiel sur les variétés [10] [7] [8] [11] : il existe une différentielle de de Rham, notée $d_A$, sur les sections de $\bigwedge A^*$, où $A^*$ désigne le fibré vectoriel dual de $A$, et un crochet de Schouten, noté $[\ ,\ ]_A$, sur les sections de $\bigwedge A$. Il y a aussi une opération de dérivation de Lie $\mathcal{L}^A$ sur les sections de $\bigwedge A^*$, définie par $\mathcal{L}^A_X = [i_X, d_A]$, où $i_X$ désigne le produit intérieur par $X \in \Gamma(A)$, et $[\ ,\ ]$ est le commutateur gradué.

2.2. **Bigébroïdes de Lie.** Une *bigébroïde de Lie* est constituée par deux algébroïdes de Lie en dualité, de même base $B$, $(A, [\ ,\ ]_A, q_A)$ et $(A^*, [\ ,\ ]_{A^*}, q_{A^*})$ satisfaisant une condition de compatibilité : la différentielle $d_A$ doit être une dérivation du crochet de Lie $[\ ,\ ]_{A^*}$. On dit alors que le crochet d'algébroïde sur $A^*$ est *compatible* avec celui de $A$. On sait [11] [5] que cette condition est équivalente à la condition duale : $d_{A^*}$ est une dérivation du crochet de Lie $[\ ,\ ]_A$. Si la base $B$ se réduit à un point, on retrouve la notion de bigèbre de Lie. Un exemple important de bigébroïde de Lie est fourni par le couple $(TB, T^*B)$ quand $B$ est une variété de Poisson. Le crochet d'algébroïde de Lie sur $T^*B$ est alors un cas particulier de la construction générale suivante.

**Théorème 2.2.1.** [7] [9] *Soit $P$ une section de $\bigwedge^2 A$. La formule*

$$[\xi, \eta]_P = \mathcal{L}^A_{P^\sharp \xi}\eta - \mathcal{L}^A_{P^\sharp \eta}\xi - d_A(P(\xi, \eta)) \ , \tag{2.2.2}$$

*où $P^\sharp(\xi)(\eta) = P(\xi, \eta)$, définit un crochet d'algébroïde de Lie sur $A^*$, d'ancre $q_A \circ P^\sharp$, si et seulement si $\mathcal{L}^A_X([P, P]_A) = 0$, pour tous $X \in \Gamma(A)$. Alors, $d_{A^*} = [P, \cdot\ ]_A$ et $(A, A^*)$ est une bigébroïde de Lie.*

## 3. Structure canonique de bigébroïde de Lie dynamique

Considérons une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de dimension finie, ainsi qu'une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, que nous ne supposons pas nécessairement abélienne. Soit $B$ un ouvert du dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$, que nous supposons invariant par l'action co-adjointe de $\mathfrak{h}$ (par exemple, $\mathfrak{h}^*$ lui-même).

3.1. **L'algébroïde de Lie $TB \times \mathfrak{g}$.** Le fibré vectoriel trivial de base $B$, de fibre $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{g}$, produit fibré du fibré tangent $TB$ de $B$ par le fibré trivial $B \times \mathfrak{g}$, possède une structure naturelle d'algébroïde de Lie, dont l'ancre $q_A$ est la projection de $TB \times \mathfrak{g}$ sur $TB$. Si l'on note $V, W$ des champs de vecteurs sur $B$, sections de $TB$, et $x, y$ des éléments de $\mathfrak{g}$, ou aussi des sections du fibré trivial $B \times \mathfrak{g}$, le crochet sur $\Gamma(TB \times \mathfrak{g}$ est défini par

$$[V, W]_A = [V, W] \ , \qquad [V, x]_A = \mathcal{L}_V x \ , \qquad [x, y]_A = [x, y] \ ,$$

où $[V, W]$ est le crochet de Lie des champs de vecteurs, $\mathcal{L}_V x$ est la dérivée de Lie de la fonction $x$ sur $B$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ dans la direction du champ de vecteurs $V$, et $[x, y]$ désigne le crochet point par point dans le fibré trivial $B \times \mathfrak{g}$.

3.2. **Le dual de $TB \times \mathfrak{g}$.** Nous considérons maintenant le fibré vectoriel dual de $A = TB \times \mathfrak{g}$, $A^* = T^*B \times \mathfrak{g}^*$, et nous allons montrer qu'il possède lui aussi une structure canonique d'algébroïde de Lie, et que celle-ci fait de $(A, A^*)$ une bigébroïde de Lie. Le fibré $A^*$ est trivial, de fibre $\mathfrak{h} \times \mathfrak{g}^*$. Nous noterons $\alpha, \beta$ des éléments de $\mathfrak{h}$, ou aussi des sections de $T^*B$, et $\xi, \eta$ des éléments de $\mathfrak{g}^*$, ou aussi des sections du fibré trivial $B \times \mathfrak{g}^*$. Désignons par $\iota : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ l'injection canonique, et par $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ la projection canonique. L'application linéaire $(\alpha, \xi) \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}^* \mapsto (-p\xi, \iota\alpha) \in \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{g}$ est anti-symétrique et définit donc une section, notée $\Lambda_0$, de $\bigwedge^2 A$. Si $(e_i), 1 \le i \le n$, est une base de $\mathfrak{h}$ et $(\varepsilon^i)$ la base duale, alors $\Lambda_0 = \sum_i (\varepsilon^i \otimes e_i - e_i \otimes \varepsilon^i)$. En fait, $\Lambda_0$ ne remplit pas la condition du Théorème 2.2.1 si $\mathfrak{h}$ n'est pas abélienne, mais $[\Lambda_0 = \pi, \Lambda_0 + \pi] = 0$ où $\pi$ désigne la structure de Poisson linéaire de $B \subset \mathfrak{h}^*$, considérée comme une section de $\bigwedge^2 A$, est une $r$-matrice sur $A$. Rappelons que la section $\pi$ de $\bigwedge^2 TB$ est définie par $\pi^\sharp_u(\alpha) = -\operatorname{ad}^*_\alpha u$, pour $u \in B \subset \mathfrak{h}^*$ et $\alpha \in T^*_u B \simeq \mathfrak{h}$.

**Théorème 3.2.1.** *Le crochet* $[\ ,\ ]_* = [\ ,\ ]_{\Lambda_0} + [\ ,\ ]_\pi$ *sur* $\Gamma(A^*)$ *défini par* $\Lambda_0 + \pi$ *est donné par :*

$$[\alpha,\beta]_* = \mathcal{L}^A_{\pi^\sharp\alpha}\beta - \mathcal{L}^A_{\pi^\sharp\beta}\alpha - d_A(\pi(\alpha,\beta)),\ \ [\alpha,\xi]_* = \mathcal{L}_{\pi^\sharp\alpha}\xi + \mathrm{ad}^*_\alpha\,\xi + \mathcal{L}_{p\xi}\alpha,\ \ [\xi,\eta]_* = -\mathcal{L}_{p\xi}\eta + \mathcal{L}_{p\eta}\xi\ .$$

*Le crochet* $[\ ,\ ]_*$ *est un crochet d'algébroïde de Lie sur* $A^*$*, d'ancre* $(\alpha,\xi) \in A^* \mapsto -p\xi + \pi^\sharp\alpha \in TB$*, compatible avec le crochet d'algébroïde de Lie de* $A$*. En particulier, pour des sections constantes,* $[\alpha,\beta]_* = [\alpha,\beta]\ ,\ [\alpha,\xi]_* = \mathrm{ad}^*_\alpha\,\xi\ ,\ [\xi,\eta]_* = 0\ .$

## 4. Les $r$-matrices dynamiques

Nous allons introduire l'équation de Yang-Baxter dynamique classique et montrer que ses solutions définissent des structures de bigébroïde de Lie sur $(A, A^*)$, examinant d'abord le cas des $r$-matrices dynamiques anti-symétriques, puis le cas général.

4.1. **L'équation de Yang-Baxter dynamique classique.** Soit $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ et $B \subset \mathfrak{h}^*$ comme ci-dessus. Etant donnée une application différentiable $r : B \to \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, sa différentielle, $dr$, est une application de $B$ dans $\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$. Pour tout élément $q \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, on désigne par $\mathrm{Alt}(q)$ l'élément $q^{(123)} + q^{(231)} + q^{(312)}$ de $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, en notation tensorielle. On pose d'autre part, $\langle r, r\rangle = [r^{(12)}, r^{(13)}] + [r^{(12)}, r^{(23)}] + [r^{(13)}, r^{(23)}]$. Ce crochet de Drinfel'd $\langle r, r\rangle$ appartient à $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$. Si la partie symétrique $s$ de $r$ est $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$-invariante, alors $\langle s, s\rangle$ est un élément $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$-invariant de $\bigwedge^3\mathfrak{g}$, et $\langle r, r\rangle$ appartient à $\bigwedge^3\mathfrak{g}$. En fait [6] dans ce cas, $\langle r, r\rangle = \langle a, a\rangle + \langle s, s\rangle$, où $a$ est la partie antisymétrique de $r$. De plus $\langle a, a\rangle = -\frac{1}{2}[a, a]$, où $[a, a]$ désigne le crochet de Schouten algébrique de $a$. L'équation de Yang-Baxter dynamique classique est l'équation

$$\mathrm{Alt}(dr) + \langle r, r\rangle = 0\ . \tag{4.1.1}$$

Si $r : B \to \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ est telle que sa partie symétrique $s$ soit constante sur $B$ et $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$-invariante, alors tous les termes sont alors dans $\bigwedge^3\mathfrak{g}$ et la condition se réduit à

$$\mathrm{Alt}(da) + \langle a, a\rangle = -\langle s, s\rangle\ . \tag{4.1.2}$$

**Définition 4.1.3.** Une *$r$-matrice dynamique* est une application $r = a + s$, de classe $C^\infty$, d'un ouvert $B$ de $\mathfrak{h}^*$ dans $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ telle que

($a$) $s$ est constant sur B et $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$-invariant,
($b$) $a$ est $\mathfrak{h}$-équivariant, c'est-à-dire, $da \circ \mathrm{ad}^*_\alpha = \mathrm{ad}_\alpha \circ a$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{h}$,
($c$) $r$ est solution de (4.1.1).

(Une telle $r$-matrice dynamique est parfois appelée *quasi-triangulaire*).

4.2. **Bigébroïdes de Lie et $r$-matrices dynamiques.** Introduisons maintenant une application de classe $C^\infty$, $a : B \to \bigwedge^2\mathfrak{g}$, et voyons à quelles conditions $\Lambda_0 + \pi + a$, considéré comme une section de $\bigwedge^2 A$, définit encore un crochet d'algébroïde de Lie sur $A^*$, de même ancre que ci-dessus, et qui sera alors nécessairement compatible avec le crochet d'algébroïde de Lie de $A$.

**Théorème 4.2.1.** *Le crochet* $[\ ,\ ]^a_* = [\ ,\ ]_* + [\ ,\ ]_a$ *sur* $\Gamma(A^*)$ *défini par* $\Lambda_0 + \pi + a$ *est donné par :*

$$[\alpha,\beta]^a_* = [\alpha,\beta]_*\ ,\ \ [\alpha,\xi]^a_* = [\alpha,\xi]_*\ ,\ \ [\xi,\eta]^a_* = [\xi,\eta]_* + \mathrm{ad}^*_{a^\sharp\xi}\,\eta - \mathrm{ad}^*_{a^\sharp\eta}\,\xi + (da)(\xi,\eta)\ .$$

*Le crochet* $[\ ,\ ]^a_*$ *est un crochet d'algébroïde de Lie sur* $A^*$*, d'ancre* $(\alpha,\xi) \in A^* \mapsto -p\xi + \pi^\sharp\alpha \in TB$*, compatible avec le crochet d'algébroïde de Lie de* $A$*, si et seulement si* $a$ *satisfait les conditions,*

($i$) *$a$ est $\mathfrak{h}$-équivariant,*
($ii$) $\mathrm{Alt(da)} + \langle \mathrm{a}, \mathrm{a}\rangle$ *est constant sur* $B$ *et* $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$*-invariant.*

*Démonstration.* On étudie le crochet de Schouten $[\Lambda_0 + \pi + a, \Lambda_0 + \pi + a]_A$, en tenant compte de la bigraduation de $\bigwedge^3 A = \bigwedge^3 TB \oplus (\bigwedge^2 TB \otimes \mathfrak{g}) \oplus (TB \otimes \bigwedge^2 \mathfrak{g}) \oplus \bigwedge^3 \mathfrak{g}$. On sait déjà que $[\Lambda_0 + \pi, \Lambda_0 + \pi] = 0$. En appliquant le Théorème 2.2.1, on voit que $[\Lambda_0, a]_A^{(1,2)} + [\pi, a]_A$ doit s'annuler et que $[\Lambda_0, a]_A^{(0,3)} + [a, a]_A$ doit être constant sur $B$ et $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-invariant. La première condition s'écrit $(d_u a)(\mathrm{ad}^*_\alpha u) = \mathrm{ad}_\alpha(a(u))$, pour $u \in B$, c'est-à-dire $(i)$. La deuxième condition est la condition $(ii)$.

Si $s$ est $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-invariant, alors $\langle s, s\rangle$ l'est aussi. Donc les résultats précédents montrent que l'on a généralisé au cas dynamique la construction des bigèbres de Lie exactes à partir des solutions de l'équation de Yang-Baxter classique :

**Théorème 4.2.2.** *Une condition suffisante pour que $\Lambda_0 + \pi + a$ définisse sur $(A, A^*)$ une structure de bigébroïde de Lie est que $a$ soit la partie antisymétrique d'une $r$-matrice dynamique.*

## 5. Conclusion : Les groupoïdes de Poisson d'Etingof et Varchenko

L'algébroïde de Lie $A$ s'intègre en le groupoïde de Lie $\mathcal{G} = B \times B \times G$, avec l'application source $\alpha(u, v, g) = u$ et l'application but $\beta(u, v, g) = v$, la loi de composition $(u, v, g)(v, w, h) = (u, w, gh)$ et l'application d'inversion $i(u, v, g) = (v, u, g^{-1})$, avec des notations évidentes. On voit que si l'on intègre la bigébroïde de Lie $(A, A^*)$ définie par $\Lambda_0 + \pi + a$, on obtient sur $\mathcal{G} = B \times B \times G$ une structure de groupoïde de Poisson [13] qui coïncide avec celle qui est décrite dans [3]. Par exemple, pour des fonctions $\varphi$ dépendant des variables dans le premier facteur $B$ et $\psi$ dépendant des variables dans $G$, on obtient $\{\varphi, \psi\} = \sum_i < \varepsilon^i, d\varphi > (e_i^\rho . \psi)$. Si $\varphi$ est une fonction linéaire sur $\mathfrak{h}^*$, identifiée avec un élément de $\mathfrak{h}$, alors on retrouve la formule de [3], $\{\varphi, \psi\} = \varphi^\rho . \psi$ . Et de même pour les autres cas. La compatibilité de la structure de Poisson ainsi définie avec la structure de groupoïde de $\mathcal{G}$ est assurée du fait que $(A, A^*)$ est une bigébroïde de Lie.

Remerciements. Y. Kosmann-Schwarzbach remercie les collègues cités, et tout particulièrement Jiang-Hua Lu et Ping Xu, pour de fructueuses discussions sans lesquelles la présente Note n'aurait pu être achevée.

M. Bangoura remercie la section Mathématiques de l'I.C.T.P., Trieste, où une partie de ce travail a été effectuée.

## References

[1] **Avan J., Babelon O. et Talon M., 1995.** Construction of the classical $R$-matrices for the Toda and Calogero models, *St. Petersburg Math. J.*, 6, No 2, p. 255-274.

[2] **Drinfel'd V. G., 1987.** Quantum groups, *Proc. Int. Congr. Math. Berkeley*, Vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence R.I., p. 798-820.

[3] **Etingof P. et Varchenko A., 1998.** Geometry and classification of solutions of the classical dynamical Yang-Baxter equation, *Comm. Math. Phys.*, 192, p. 77-120.

[4] **Felder G., 1995.** Conformal field theory and integrable systems associated to elliptic curves, *Proc. Int. Congr. Math. Zürich*, Birkhäuser, Basel, p. 1247-1255.

[5] **Kosmann-Schwarzbach Y., 1995.** Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids, *Acta Appl. Math.*, 41, p. 153-165.

[6] **Kosmann-Schwarzbach Y., 1997.** Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations, *Lect. Notes Physics*, 495, Springer-Verlag, Heidelberg, p. 104-170.

[7] **Kosmann-Schwarzbach Y. et Magri F., 1990.** Poisson-Nijenhuis structures, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Phys. Théor., 53, p. 35-81.

[8] **Kosmann-Schwarzbach Y. et Magri F., 1990.** Dualization and deformation of Lie brackets on Poisson manifolds, in *Differential geometry and its applications*, **J. Janyška et D. Krupka**, éds., World Scientific, Singapore, p. 79-84.

[9] **Liu Z.-J. et Xu P., 1996.** Exact Lie bialgebroids and Poisson groupoids, *Geom. Funct. Anal.*, 6, No 1, p. 138-145.

[10] **Mackenzie K., 1987.** *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[11] **Mackenzie K. et Xu P., 1994.** Lie bialgebroids and Poisson groupoids, *Duke Math. J.*, 73, p. 415-452.
[12] **Schiffmann O., 1998.** On classification of dynamical $r$-matrices, *Math. Res. Lett.*, 5, p. 13-30.
[13] **Weinstein A., 1988.** Coisotropic calculus and Poisson groupoids, *J. Math. Soc. Japan*, 40, p. 705-727.

Département de Mathématiques, Université de Conakry, B.P 1147, Conakry, Guinée

U.M.R. 7640 du C.N.R.S., Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau, France
*E-mail address*: yks@math.polytechnique.fr