# PROBLÈME

## 22 JANVIER 2010

**Résumé.** Le but de ce problème est de montrer le théorème de Fuchs 1.4.9 par la méthode des opérateurs à indice.

### Problème

On note $\mathbb{C}[\![z]\!]$ l'espace des séries formelles et $\mathbb{C}\{z\}$ le sous-espace des séries convergentes.

**P.a. Passage de $P$ à $Q$.** Soit $P$ est un opérateur différentiel comme dans le théorème de Fuchs 1.4.9. On cherche à remplacer, dans la démonstration du théorème de Fuchs, l'opérateur $P$ par un opérateur plus maniable $Q$.

**(i)** Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que l'opérateur $Q = z^m P$ puisse s'écrire sous la forme $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k(z) z^k (\frac{d}{dz})^k$, où les $b_k$ sont dans $\mathbb{C}\{z\}$, et il existe $i$ tel que $b_i(0) \neq 0$.

**(ii)** Montrer que $P$ satisfait au critère de Fuchs si et seulement si $b_n(0) \neq 0$, et vérifier que cette condition signifie que $Q$ satisfait au critère de Fuchs.

**(iii)** Montrer que $Q$ peut aussi s'écrire sous la forme $Q = \sum_{k=0}^{n} c_k(z)(z\frac{d}{dz})^k$, avec $c_k(z) \in \mathbb{C}\{z\}$, et il existe $\ell$ tel que $c_\ell(0) \neq 0$.

[Indication : on montrera par récurrence sur $k \geqslant 1$, à partir de la relation de commutation de l'exercice 1.2.4 avec la variable $z$, la relation $z^k(\frac{d}{dz})^k = (z\frac{d}{dz})(z\frac{d}{dz} - 1)\cdots(z\frac{d}{dz} - k + 1)$. Si tous les $c_k$ s'annulaient en 0, on aurait $Q = zQ'$, pour un opérateur $Q'$ du même type que $Q$ ; on vérifiera que l'hypothèse que $b_i(0) \neq 0$ implique que ce n'est pas le cas.]

**(iv)** Montrer que $P$ (ou $Q$ d'après la question précédente) satisfait au critère de Fuchs si et seulement si $c_n(0) \neq 0$ (on montrera que $c_n(0) = b_n(0)$).

**(v)** Montrer d'autre part que $P$ est à singularité régulière si et seulement si $Q$ l'est (on comparera les solutions de $Pu = 0$ et $Qu = 0$).

**(vi)** Écrire la le système différentiel compagnon de $Q$ sous la forme $z\frac{d}{dz} - C(z)$ sur le vecteur $U(z) = \big(u(z), z\frac{d}{dz}u(z), \ldots, (z\frac{d}{dz})^{n-1}u(z)\big)$, et montrer que $Q$ satisfait la condition de Fuchs si et seulement si $C(z)$ est holomorphe (c'est-à-dire que le système $\frac{d}{dz} - C(z)/z$ est à pôle simple).

**(vii)** Conclure que si $P$ satisfait au critère de Fuchs, alors $P$ est à singularité régulière.

**P.b. Opérateurs à indice.** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (de dimension finie ou infinie) et $U : E \to F$ une application linéaire. On dit que $U$ *est à indice* si $\operatorname{Ker} U$ et $F/\operatorname{Im} U$ sont de dimension finie. On appelle alors indice de $U$ l'entier $\operatorname{Ind}(U; E, F) = \dim \operatorname{Ker} U - \dim(F/\operatorname{Im} U)$. On note $\operatorname{Ind}(U; E)$ si $E = F$. Bien entendu, si $E$ et $F$ sont de dimension finie, toute application linéaire est à indice.

**(i)** Soient $\mathcal{P} : E \to E$ et $\mathcal{Q} : F \to F$ des isomorphismes. Montrer que $U : E \to F$ est à indice si et seulement si $\mathcal{Q} \circ U \circ \mathcal{P}$ l'est, et les indices sont les mêmes.

*Solution.* Puisque $\mathcal{Q}$ est un isomorphisme, on a $\operatorname{Ker}(\mathcal{Q} \circ U \circ \mathcal{P}) = \operatorname{Ker}(U \circ \mathcal{P})$, et d'autre part, puisque $\mathcal{P}$ est un isomorphisme, il induit un isomorphisme de $\operatorname{Ker}(U \circ \mathcal{P})$ sur $\operatorname{Ker} U$. Ainsi, les deux espaces $\operatorname{Ker}(\mathcal{Q} \circ U \circ \mathcal{P})$ sont isomorphes, et l'un est de dimension finie si et seulement si l'autre l'est, et dans ce cas les dimensions sont les mêmes.

De même, $\operatorname{Im}(\mathcal{Q} \circ U \circ \mathcal{P}) = \operatorname{Im}(\mathcal{Q} \circ U)$, et $\mathcal{Q}$ induit un isomorphisme de $\operatorname{Im} U$ sur $\operatorname{Im}(\mathcal{Q} \circ U)$. Même conclusion. Enfin, l'égalité des indices est alors claire. $\square$

**(ii)** Montrer que si $E$ et $F$ sont de dimension finie, l'indice de toute application linéaire $U : E \to F$ est égal à $\dim E - \dim F$.

*Solution.* C'est le théorème du rang. $\square$

**(iii)** On ne fait plus d'hypothèse sur $E$ et $F$. Montrer que si $U : E \to F$ et $V : F \to G$ sont à indice, alors la composée $V \circ U$ est à indice et que

$$\operatorname{Ind}(V \circ U; E, G) = \operatorname{Ind}(U; E, F) + \operatorname{Ind}(V; F, G).$$

[Indication : il sera judicieux d'utiliser l'égalité (parfois appelée « deuxième théorème d'isomorphisme » pour les sous-espaces $\operatorname{Im} U$ et $\operatorname{Ker} V$ de $F$) :

$$\frac{\operatorname{Ker} V}{\operatorname{Ker} V \cap \operatorname{Im} U} = \frac{\operatorname{Im} U + \operatorname{Ker} V}{\operatorname{Im} U},$$

de remarquer que $\operatorname{Ker} V \circ U = U^{-1}(\operatorname{Ker} V \cap \operatorname{Im} U)$.]

*Solution.* On a $\operatorname{Ker}(V \circ U) = U^{-1}(\operatorname{Ker} V \cap \operatorname{Im} U)$, et $(\operatorname{Ker} V \cap \operatorname{Im} U)$ est de dimension finie, puisque $\operatorname{Ker} V$ l'est. Puisque le noyau de $U$ est de dimension finie, $\operatorname{Ker}(V \circ U)$ l'est aussi et on a $\dim \operatorname{Ker}(V \circ U) = \dim \operatorname{Ker} U - \dim(\operatorname{Ker} V \cap \operatorname{Im} U)$.

De manière analogue, on a $\operatorname{Im}(V \circ U) = V(\operatorname{Im} U)$, et on a un morphisme surjectif $G/V(\operatorname{Im} U) \to G/V(F)$. Appelons $K$ son noyau. Alors $V$ induit une application surjective $V/\operatorname{Im} U \to K$, donc $K$ est de dimension finie. Puisque $G/\operatorname{Im} V$ est de dimension finie, il en est de même de $G/\operatorname{Im}(V \circ U)$, dont la dimension est égale à $\dim K + \dim G/\operatorname{Im} F$. Ainsi, $V \circ U$ est à indice. Calculons celui-ci. Il est égal à $\dim \operatorname{Ker} U + \dim(\operatorname{Ker} V \cap \operatorname{Im} U) - \dim K - \dim G/\operatorname{Im} V$. Il s'agit maintenant de calculer $\dim K$.

L'application surjective $V : F \to \operatorname{Im} V$ induit, comme on l'a vu, une application surjective $F/\operatorname{Im} U \to \operatorname{Im} V/\operatorname{Im}(V \circ U) = K$ dont le noyau est $(\operatorname{Ker} V + \operatorname{Im} U)/\operatorname{Im} U$. Ainsi, $\dim K = \dim F/\operatorname{Im} U -$

$\dim(\operatorname{Ker} V + \operatorname{Im} U)/\operatorname{Im} U$. On a ainsi obtenu

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}(V \circ U; E, G) &= \operatorname{Ind}(U; E, F) - \dim(\operatorname{Ker} V \cap \operatorname{Im} U) \\ &\quad + \dim(\operatorname{Ker} V + \operatorname{Im} U)/\operatorname{Im} U - \dim G/\operatorname{Im} V.\end{aligned}$$

Il reste à voir que $\dim(\operatorname{Ker} V + \operatorname{Im} U)/\operatorname{Im} U - \dim(\operatorname{Ker} V \cap \operatorname{Im} U) = \dim \operatorname{Ker} V$, ce qui résulte immédiatement du deuxième théorème d'isomorphisme rappelé plus haut. □

**(iv)** Soient $U : E \to E'$, $V : F \to F'$ et $W : G \to G'$ trois applications linéaires. On suppose données des applications linéaires injectives $\varphi : E \to F$ et $\varphi' : E' \to F'$, et des applications linéaires surjectives $\psi : F \to G$ et $\psi' : F' \to G'$ qui satisfont aux propriétés suivantes :

(1) le noyau de $\psi$ est égal à l'image de $\varphi$ (dans $F$) et le noyau de $\psi'$ est égal à l'image de $\varphi'$ (dans $F'$),

(2) les différentes applications avec même origine et même but, obtenues par composition dans le diagramme suivant, sont égales (on dit que le diagramme est commutatif) :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "U"'] & F \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "V"] & G \arrow[d, "W"] \\ E' \arrow[r, "\varphi'"] & F' \arrow[r, "\psi'"] & G' \end{tikzcd}$$

(par exemple, $V \circ \varphi = \varphi' \circ U$).

Montrer que, si deux parmi les trois applications $U, V, W$ sont à indice, la troisième l'est aussi et que

$$\operatorname{Ind}(V; F, F') = \operatorname{Ind}(U; E, E') + \operatorname{Ind}(W; G, G').$$

(On traitera les trois choix possibles.)

[Indication : on montrera d'abord que $\varphi'$ et $\psi'$ définissent des applications linéaires $E'/\operatorname{Im} U \to F'/\operatorname{Im} V$ et $F'/\operatorname{Im} V \to G'/\operatorname{Im} W$, qu'on notera encore $\varphi'$ et $\psi'$, et on utilisera le *lemme du serpent*, voir par exemple Wikipedia, qui dit que, dans ces conditions, il existe une application linéaire $\eta : \operatorname{Ker} W \to E'/\operatorname{Im} U$ telle que la suite d'applications

$$\begin{aligned} &0 \xrightarrow{0} \operatorname{Ker} U \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Ker} V \xrightarrow{\psi} \operatorname{Ker} W \\ &\qquad \xrightarrow{\eta} E'/\operatorname{Im} U \xrightarrow{\varphi'} F'/\operatorname{Im} V \xrightarrow{\psi'} G'/\operatorname{Im} W \xrightarrow{0} 0 \end{aligned}$$

satisfasse la propriété : le noyau d'une quelconque des applications est égale à l'image de la précédente (en particulier, $\varphi$ est injective et $\psi'$ est surjective). On montrera enfin que, lorsqu'une suite d'applications

$$0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to E_4 \to E_5 \to E_6 \to 0$$

satisfait à cette propriété, la somme alternée des dimensions $\dim E_1 - \dim E_2 + \dim E_3 - \dim E_4 + \dim E_5 - \dim E_6$ est nulle.]

*Solution.* Puisque le premier diagramme commute, $\varphi$ envoie $\operatorname{Ker} U$ dans $\operatorname{Ker} V$, et cette application induite est encore injective. De même, $\varphi'$ envoie $\operatorname{Im} U$ dans $\operatorname{Im} V$, et l'application induite est injective. L'application $\varphi'$ induit donc une application linéaire bien définie $E'/\operatorname{Im} U \to F'/\operatorname{Im} V$, mais cette dernière peut ne pas être injective, car il n'est pas toujours vrai que l'inclusion $\operatorname{Im} U \subset \varphi'^{-1}(\operatorname{Im} V)$ (inclusion qui provient de l'égalité $V \circ \varphi = \varphi' \circ U$) soit une égalité.

De manière analogue, $\psi$ envoie $\operatorname{Ker} V$ dans $\operatorname{Ker} W$, mais il n'est pas vrai en général que cette application soit surjective. De même, $\psi'$ induit une application $F'/\operatorname{Im} V \to G'/\operatorname{Im} W$, et celle-ci est bien surjective.

Si $U$ et $V$ sont à indices, la suite du serpent nous donne $\dim \operatorname{Ker} W \leqslant \dim \operatorname{Ker} V + \dim E'/\operatorname{Im} U < \infty$ et $\dim G'/\operatorname{Im} W \leqslant \dim F'/\operatorname{Im} V < \infty$, donc $W$ est aussi à indice. On raisonne de même dans les autres cas.

La nullité de la somme alternée des dimensions dans une suite exacte s'obtient immédiatement par le théorème du rang. $\square$

**(v)** Calculer l'indice de $z : \mathbb{C}[\![z]\!] \to \mathbb{C}[\![z]\!]$ et celui de $d/dz : \mathbb{C}[\![z]\!] \to \mathbb{C}[\![z]\!]$.

**P.c. Réciproque, première partie.** On considère de manière générale un opérateur $Q$ de la forme

$$Q = \sum_{k=0}^{n} c_k(z)\Big(z\frac{d}{dz}\Big)^k, \quad \text{avec } c_k(z) \in \mathbb{C}\{z\},\ c_n(z) \not\equiv 0 \text{ et } \exists\, i,\ c_i(0) \neq 0.$$

Cet opérateur définit une application $\mathbb{C}$-linéaire $\mathbb{C}[\![z]\!] \to \mathbb{C}[\![z]\!]$ de l'espace des séries formelles dans lui-même. Le but de cette partie est de montrer :

$$\text{(P.c)}(*) \qquad \operatorname{Ind}(Q, \mathbb{C}[\![z]\!]) = 0.$$

**(i)** Montrer que pour tout entier $j \geqslant 0$, on a

$$Q(z^j) = \Big(\sum_k c_k(0) j^k\Big) z^j + \text{termes d'ordre} > j.$$

*Solution.* On a $Q(z^j) = \sum_{k=0}^{n} c_k(z) j^k z^j$, et on écrit $c_k(z) = c_k(0) +$ termes d'ordre $> 1$. $\square$

**(ii)** Montrer qu'il existe $j_0 \geqslant 0$ tel que $\sum_k c_k(0) j^k \neq 0$ pour tout $j \geqslant j_0$.

*Solution.* Le polynôme $\sum_k c_k(0) Z^k$ n'est pas identiquement nul, puisqu'un de ses coefficients est non nul. Il a donc un nombre fini de racines. Tout entier $j_0$ supérieur strictement à la plus grande racine réelle de ce polynôme convient. $\square$

**(iii)** En déduire que pour tout $g \in z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!]$, il existe une unique $f \in z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!]$ telle que $Qf = g$, c'est-à-dire que $Q : z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!] \to z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!]$ est bijectif.

*Solution.* On montre l'existence des coefficients $f_j$ d'une série $f = \sum_{j \geqslant j_0} f_j z^j$ telle que $Qf = g = \sum_{j \geqslant j_0} g_j z^j$. On écrit $g_j = (\sum_k c_k(0) j^k) f_j + G_j(f_{j_0}, \dots, f_{j-1})$, où $G_j$ est un polynôme en ses arguments, dont les coefficients ne dépendent que de $Q$. Si on suppose connus $f_{j_0}, \dots, f_{j-1}$, cette expression détermine $f_j$ de manière unique, puisque $(\sum_k c_k(0)j^k) \neq 0$. La récurrence commence avec $f_{j_0} = g_{j_0}/(\sum_k c_k(0)j_0^k)$. □

**(iv)** En déduire que $\operatorname{Ind}(Q; z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!]) = 0$, puis que $\operatorname{Ind}(Q; \mathbb{C}[\![z]\!]) = 0$. (On montrera que $\operatorname{Ind}(Q; \mathbb{C}[\![z]\!]) = \operatorname{Ind}(Q; z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!]) + \operatorname{Ind}(Q; \mathbb{C}[\![z]\!]/z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!])$ à l'aide de P.b(iv), puis on conclura à l'aide de P.b(ii).)

*Solution.* Le diagramme qui suit possède toutes les propriétés demandées en P.b(iv) :

$$\begin{tikzcd}
z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!] \arrow[r] \arrow[d, "Q"'] & \mathbb{C}[\![z]\!] \arrow[r] \arrow[d, "Q"] & \mathbb{C}[\![z]\!]/z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!] \arrow[d, "Q"] \\
z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!] \arrow[r] & \mathbb{C}[\![z]\!] \arrow[r] & \mathbb{C}[\![z]\!]/z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!]
\end{tikzcd}$$

L'indice de $Q$ (à gauche) est nul, d'après la question précédente. L'indice de $Q$ (à droite) existe car les deux espaces sont de dimension finie $j_0$, et il est nul puisque les dimensions sont les mêmes. On en déduit que l'indice de $Q$ (au milieu), somme des deux autres, est nul aussi. □

**(v)** Soit $R$ l'opérateur $\dfrac{1}{c_n(z)}Q$, qui définit une application linéaire $\mathbb{C}[\![z]\!] \to z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!]$. Montrer que $\operatorname{Ind}(R; \mathbb{C}[\![z]\!], z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!]) = 0$.

[Indication : on considérera le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[\![z]\!] \arrow[r, "R"] \arrow[d, equal] & z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!] \arrow[d, "\wr"', "z^{v(c_n)}"] \\
\mathbb{C}[\![z]\!] \arrow[r, "Q"] & \mathbb{C}[\![z]\!]
\end{tikzcd}$$

qui permet de comparer les noyaux et images de $Q$ et $R$.]

*Solution.* On peut aussi voir $R$ comme l'application composée de $Q$ et de la multiplication $z^{-v(c_n)} : \mathbb{C}[\![z]\!] \to z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!]$. Cette dernière étant bijective, on conclut par P.b(i). □

**P.d. Indice d'un système linéaire.** On note $\widehat{K}$ le corps des séries de Laurent formelles (bornées à gauche). Un élément de $\widehat{K}$ s'écrit donc $\sum_{k \geqslant k_0} a_n z^n$ pour un certain $k_0 \in \mathbb{Z}$. On s'intéresse à un opérateur différentiel linéaire de matrice $A(z)$ de taille $n \times n$ qu'on écrit sous la forme $C(z)/z$, où les éléments de $A(z)$ (ou de $C(z)$) sont dans $\widehat{K}$. On considère l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dz}$ comme un opérateur linéaire $\widehat{K}^n \to \widehat{K}^n$. On s'intéresse à l'opérateur linéaire

$$D = z\frac{d}{dz} - C(z) : \widehat{K}^n \longrightarrow \widehat{K}^n.$$

On appelle *réseau de* $\widehat{K}^n$ tout $\mathbb{C}[\![z]\!]$-module $E$ engendré par une $\widehat{K}$-base de $\widehat{K}^n$.

**(i)** Montrer que si $E \subset F$ sont deux réseaux de $\widehat{K}^n$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $z^\ell F \subset E$. (On travaillera avec des bases.)

*Solution.* On choisit des bases $\boldsymbol{e}$ de $E$ et $\boldsymbol{f}$ de $F$. Puisque $E \subset F$, il existe une matrice $P$ à éléments dans $\mathbb{C}[\![z]\!]$, et inversible sur $\widehat{K}$, c'est-à-dire telle que $\text{dét}\, P$ soit un élément non nul de $\mathbb{C}[\![z]\!]$, telle que $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{f} \cdot P$. On choisit un entier $\ell$ tel que $z^\ell P^{-1}$ soit à éléments dans $\mathbb{C}[\![z]\!]$ (il suffit de prendre pour $\ell$ la valuaiton $\text{dét}\, P$). Alors $z^\ell \boldsymbol{f} = \boldsymbol{e} \cdot (z^\ell P^{-1})$, et donc $z^\ell F \subset E$. □

**(ii)** En déduire que pour deux tels réseaux $E \subset F$, le quotient $F/E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

*Solution.* On a une application surjective $F/z^\ell F \to F/E$, pour $\ell$ comme ci-dessus. Il suffit de vérifier que le premier espace est de dimension finie. En prenant une base de $F$, on voit que cet espace est isomorphe à $(\mathbb{C}[\![z]\!]/z^\ell\mathbb{C}[\![z]\!])^n$, qui est de dimension $\ell^n$. □

Le but de cette partie est de montrer que, pour un opérateur $D$ comme ci-dessus, *s'il existe deux réseaux $E \subset F$ tels que $D(E) \subset F$ et que l'application linéaire $D : E \to F$ soit à indice, alors pour tout couple de réseaux $E' \subset F'$ tels que $D(E') \subset F'$, l'application linéaire $D : E' \to F'$ est à indice, et on a :*

$$\text{(P.d)}(*) \qquad \operatorname{Ind}(D; E, F) + \dim F/E = \operatorname{Ind}(D; E', F') + \dim F'/E'.$$

On notera $\operatorname{Irr}(D)$ (irrégularité de $D$) le nombre $\operatorname{Ind}(D; E, F) + \dim E/F$, s'il existe.

On suppose donc l'existence de $E \subset F$ comme ci-dessus et on se donne deux réseaux emboîtés $E' \subset F'$ tels que $D(E') \subset F'$.

**(iii)** Montrer qu'il existe deux réseaux $E'' \supset E \cup E'$ et $F'' \supset F \cup F'$ tels que $E'' \subset F''$ et $D(E'') \subset F''$.

*Solution.* Soient $\boldsymbol{e}$ une base de $E$ et $\boldsymbol{e}'$ une base de $E'$. Puisque $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{e}'$ sont aussi des $\widehat{K}$-bases de $\widehat{K}^n$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\widehat{K})$ telle que $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e} \cdot P$. Soit $\ell \geqslant 0$ tel que $z^\ell P$ soit à coefficients dans $\mathbb{C}[\![z]\!]$. Alors $z^\ell \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e} \cdot (z^\ell P)$, et donc $z^\ell E' \subset E$, ce qu'on peut aussi écrire $E' \subset z^{-\ell} E$. Il est par ailleurs évident que $E \subset z^{-\ell}E$, puisque $\ell \geqslant 0$. Posons donc $E'' = z^{-\ell}E$, dont une base est $(z^{-\ell}e_1, \dots, z^{-\ell}e_n)$.

On fait de même avec $F$ et $F'$, et on fait en sorte de prendre le même $\ell$ que pour $E$ et $E'$ (en choisissant le plus grand). Il reste à voir que $D$ envoie $z^{-\ell}E$ dans $z^{-\ell}F$. Pour $e \in E$, on écrit $D(z^{-\ell}e) = (zd/dz)(z^{-\ell}e) - C(z)(z^{-\ell}e)$, c'est-à-dire $-\ell(z^{-\ell}e) + z^{-\ell}De$. Puisque $De \in F$ par hypothèse, on a donc $D(z^{-\ell}e) \in z^{-\ell}F$. □

**(iv)** En considérant les applications linéaires

$$\begin{array}{ccccc}
E & \longrightarrow & E'' & \longrightarrow & E''/E \\
{\scriptstyle D}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D} & & \downarrow{\scriptstyle D} \\
F & \longrightarrow & F'' & \longrightarrow & F''/F
\end{array}$$

et le fait que $E''/E$ et $F''/F$ sont de dimension finie, montrer (P.d)($*$) lorsque $E', F'$ est remplacé par $E'', F''$.

[Indication : on utilisera P.b(ii) et P.b(iv).]

*Solution*. On utilise le fait que $E''/E$ et $F''/F$ sont de dimension finie pour voir que le $D$ de droite est à indice, et que cet indice est égal à $\dim E''/E - \dim F''/F$. Puisque par hypothèse le $D$ de gauche est à indice, celui du milieu aussi, et $\mathrm{Ind}(D; E'', F'') = \mathrm{Ind}(D; E, F) + \dim E''/E - \dim F''/F$, qui est l'égalité voulue. □

**(v)** En raisonnant de manière analogue avec $(E', F')$ et $(E'', F'')$, en déduire (P.d)($*$).

*Solution*. Âne qui trotte. □

### P.e. Un système à singularité régulière est d'irrégularité nulle.

**(i)** Soit $C_0$ une matrice carrée triangulaire supérieure, de taille $n$. Montrer que l'opérateur $z\frac{d}{dz} - C_0 : \mathbb{C}[\![z]\!]^n \to \mathbb{C}[\![z]\!]^n$ est à indice, et qu'il est d'indice nul.

[Indication : On considérera un sous-espace $E$ isomorphe à $\widehat{K}$ dans $F = \widehat{K}^n$ engendré par un vecteur propre de $C_0$ auquel on appliquera (P.c)($*$), et on utilisera P.b(iv).]

*Solution*. On raisonne par récurrence sur $n$. Si $n = 1$, le calcul de P.b(v) et le résultat sur l'indice d'un composé d'opérateurs donnent $\mathrm{Ind}(zd/dz; \mathbb{C}[\![z]\!]) = 0$. Montrons le même résultat avec un opérateur $zd/dz - c$ avec $c \neq 0$. Si $f(z) = \sum_{j\geqslant 0} f_j z^j$, on a $(zd/dz - c)f = \sum_{j\geqslant 0}(j - c)f^j z^j$.

Si $c$ n'est pas entier $\geqslant 0$, alors quel que soit $j \in \mathbb{N}$, $j - c \neq 0$. On en déduit que $(zd/dz - c) : \mathbb{C}[\![z]\!] \to \mathbb{C}[\![z]\!]$ est bijectif.

Si $c \in \mathbb{N}$, on voit de même que $\mathrm{Ker}(zd/dz - c) = \mathbb{C} \cdot z^c$ et $\mathrm{Im}(zd/dz - c)$ est formé des séries dont le coefficient sur $z^c$ est nul. On a donc $\dim \mathbb{C}[\![z]\!] / \mathrm{Im}(zd/dz - c) = 1$, et l'indice est encore nul.

Passons au cas où $n \geqslant 2$, en supposant la propriété vraie jusqu'à $n - 1$. On note $E = \mathbb{C}[\![z]\!]^n$, $E' = \mathbb{C}[\![z]\!]$ engendré par le premier vecteur de la base canonique, et $E'' = \mathbb{C}[\![z]\!]^{n-1}$ engendré par les derniers. Puisque $C_0$ est triangulaire supérieure, l'opérateur $z\frac{d}{dz} - C_0$ induit des opérateurs du même type sur $E'$ et $E''$. On conclut par récurrence, en utilisant l'additivité de l'indice dans les suites exactes. □

**(ii)** Soient $C(z)/z$ et $C'(z)/z$ deux matrices définissant des systèmes équivalents, via une matrice $\mathcal{P}(z)$ inversible à éléments dans $K$ (ou $\widehat{K}$). Montrer que si l'opérateur $D = z\frac{d}{dz} - C(z)$ est à indice (sur un couple convenable de réseaux $(E, F)$), alors $D' = z\frac{d}{dz} - C'(z)$ est aussi à indice sur un couple $(E', F')$ et qu'ils ont même irrégularité : $\mathrm{Irr}(D) = \mathrm{Irr}(D')$.

*Solution*. Soit $E$ un réseau de $\widehat{K}^n$ et $\mathcal{P} \in \mathrm{GL}_n(\widehat{K})$. Soit $\boldsymbol{e}$ une base de $E$ et soit $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e} \cdot \mathcal{P}$. Alors $\boldsymbol{e}'$ est aussi une base de $\widehat{K}^n$, et le $\mathbb{C}[\![z]\!]$-module $E'$ engendré par les éléments de $\boldsymbol{e}'$ est un réseau de $\widehat{K}^n$.

On pose $E = \mathbb{C}[\![z]\!]^n$ et, si $\ell$ est l'ordre du pôle de $C(z)$, on pose $F = z^{-\ell}E$, de sorte que $D(E) \subset F$. On définit $E'$ comme ci-dessus à l'aide de $\mathcal{P}$, et $F'$ de même. On voit comme pour P.d(iii) que $D(E') \subset F'$. Soit $P : E \to E'$ et $Q : F \to F'$ les applications de matrice $\mathcal{P}$. Alors l'équivalence des systèmes associés à $C$ et $C'$ signifie exactement que $D' = Q \circ D \circ P^{-1}$. On a donc $\mathrm{Ind}(D; E', F') = \mathrm{Ind}(D; E, F)$, d'après P.b(i).

Par ailleurs, on a $E \subset F$ et $E' \subset F'$, et l'isomorphisme $Q : F \to F'$ induit l'isomorphisme $P$ par restriction à $E$. Il induit donc aussi un isomorphisme $F/E \xrightarrow{\sim} F'/E'$, et ces deux espaces ont même dimension. Ainsi, calculées avec ce choix particulier de réseaux, les irrégularités de $D$ et $D'$ coïncident. Comme elles ne dépendent pas du choix des réseaux, on obtient le résultat. □

**(iii)** En déduire que tout système à singularité régulière $\frac{d}{dz} - C(z)/z$ définit un opérateur $D = z\frac{d}{dz} - C(z)$ à irrégularité bien définie et égale à 0.

*Solution.* Par hypothèse, un tel système est équivalent à un système de matrice $C_0/z$, où $C_0$ est constante, et il est facile de faire en sorte que $C_0$ soit triangulaire supérieure en effectuant un changement de base constant. Les deux résultats précédents permettent de conclure. □

**P.f. Réciproque : fin de la démonstration.** On considère un opérateur $Q$ comme au § (P.c) et l'opérateur $R = \dfrac{1}{c_n(z)}Q$. Soit $C(z)$ la matrice compagnon de $R$ :

$$C(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -\dfrac{c_0}{c_n} & -\dfrac{c_1}{c_n} & -\dfrac{c_2}{c_n} & \cdots & -\dfrac{c_{n-1}}{c_n} \end{pmatrix}$$

On note $E = \mathbb{C}[\![z]\!]^n$ et $F = \mathbb{C}[\![z]\!]^{n-1} \oplus z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!]$.

**(i)** Montrer que le noyau de l'opérateur $D = z\frac{d}{dz} - C(z) : E \to F$ est formé des vecteurs de la forme $U(z) = \big(u(z), z\frac{d}{dz}u(z), \ldots, (z\frac{d}{dz})^{n-1}u(z)\big)$ tels que $Ru = 0$. En déduire que $\dim \mathrm{Ker}(z\frac{d}{dz} - C(z)) = \dim \mathrm{Ker}[R : \mathbb{C}[\![z]\!] \to z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!]]$.

*Solution.* On note $\alpha : \mathbb{C}[\![z]\!] \to E$ l'application définie par $u(z) \mapsto U(z) = \big(u(z), z\frac{d}{dz}u(z), \ldots, (z\frac{d}{dz})^{n-1}u(z)\big)$. C'est une application injective, car composée avec la projection sur le premier coefficient, elle est égale à l'identité. De même, on note $\beta : z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!] \to F$ l'inclusion sur la dernière composante. On a $D \circ \alpha(u) = \beta \circ R(u)$.

Par définition de la matrice compagnon, si $D(U) = 0$ alors $U = \alpha(u)$, et dans ce cas $\beta \circ R(u) = 0$, donc $R(u) = 0$. On en déduit que $\alpha$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Ker}\, R$ sur $\mathrm{Ker}\, D$. □

**(ii)** Montrer de manière analogue que $\dim\big(F/\mathrm{Im}(D)\big) = \dim\big(z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!] / \mathrm{Im}\, R\big)$.

*Solution.* L'application $\beta$ introduite ci-dessus envoie $\mathrm{Im}\, Q$ dans $\mathrm{Im}\, D$. Elle induit une application $\mathbb{C}[\![z]\!] / \mathrm{Im}\, Q \to F/\mathrm{Im}\, D$ dont on veut voir qu'elle est bijective.

Injectivité : Il s'agit de montrer que $\beta(u) \in \operatorname{Im} D \Rightarrow u \in \operatorname{Im} R$. Si $U$ a pour coefficients $u_1, \dots, u_n$, on a

$$DU = \begin{pmatrix} z\frac{d}{dz}u_1 - u_2 \\ \vdots \\ z\frac{d}{dz}u_n + \frac{c_1}{c_n}u_1 + \cdots + \frac{c_{n-1}}{c_n}u_{n-1}, \end{pmatrix}$$

et si $\beta(u) = D(U)$ pour un certain $U$, alors $\beta(u) = D(\alpha(u_1)) = \beta(R(u_1))$. Puisque $\beta$ est injective, on en déduit $u = R(u_1)$.

Surjectivité : Il s'agit de montrer que $F = \operatorname{Im} D + \operatorname{Im} \beta$. Étant donnés $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}[\![z]\!]$, on cherche $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ et $u \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} v_1 &= z\frac{d}{dz}u_1 - u_2 \\ &\vdots \\ v_{n-1} &= z\frac{d}{dz}u_{n-1} - u_n \\ \frac{1}{c_n}v_n &= z\frac{d}{dz}u_n + \frac{c_1}{c_n}u_1 + \cdots + \frac{c_{n-1}}{c_n}u_{n-1} + \frac{1}{c_n}u. \end{aligned}$$

On peut choisir $u_1, \dots, u_n, u$ comme suit : on fixe $u_1 = 0$, d'où $u_2 = -v_1$, et on détermine de même $u_3, \dots, u_n$ dans $\mathbb{C}[\![z]\!]$. La dernière équation, mulitpliée par $c_n$, détermine $u$ dans $\mathbb{C}[\![z]\!]$. □

**(iii)** En conclure que $D : E \to F$ est à indice, que son indice $\operatorname{Ind}(D; E, F)$ est nul et que son irrégularité $\operatorname{Irr}(D)$ est égale à $v(c_n)$.

*Solution.* Les deux questions précédentes montrent que $\operatorname{Ind}(D; E, F) = \operatorname{Ind}(R; \mathbb{C}[\![z]\!], z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!])$, indice qui est nul d'après P.c(iv). Enfin, $\dim F/E = v(c_n)$. □

**(iv)** Conclure la démonstration de la réciproque : Si $P$ est à singularité régulière, $Q$ aussi, et $D$ aussi, donc l'irrégularité de $D$ est nulle (*cf.* P.e(iii)), et par conséquent $v(c_n) = 0$ d'après la question précédente. Ceci équivaut au fait que $Q$ satisfait au critère de Fuchs (P.a(iv)), et donc $P$ aussi.

*Solution.* Rien à ajouter. □

**P.g. Exemples.** Faire les exercices 1.4.10 (qui est en fait contenu dans la partie P.a), 1.4.11 et 1.4.12.