

Errata au livre *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*

1. L'exercice 5.2 du chapitre 0 contient une question éronnée. Il faut le remplacer par l'exemple ci-dessous.

Exemple 5.2 (image inverse et cohomologie)

(1) Soit $\widetilde{\mathcal{F}}_i$ une suite croissante de préfaisceaux sur un espace topologique X et soit $\widetilde{\mathcal{F}} = \bigcup_i \widetilde{\mathcal{F}}_i$. Si \mathcal{F}_i est le faisceau associé à $\widetilde{\mathcal{F}}_i$ et \mathcal{F} celui associé à $\widetilde{\mathcal{F}}$, alors la suite de faisceaux \mathcal{F}_i est croissante et on a $\mathcal{F} = \bigcup_i \mathcal{F}_i$ (autrement dit, pour tout $x \in X$, $\mathcal{F}_x = \bigcup_i \mathcal{F}_{i,x}$). En effet, soit $x \in X$. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{V \ni x} \bigcup_i \widetilde{\mathcal{F}}_i(V) = \bigcup_i \lim_{V \ni x} \widetilde{\mathcal{F}}_i(V).$$

L'inclusion \supset est claire. Si $s \in \widetilde{\mathcal{F}}_x$, alors s consiste en la donnée d'une famille compatible $s_W \in \widetilde{\mathcal{F}}(W)$ pour tout W contenu dans un ouvert V assez petit. Il existe donc j tel que $s_V \in \widetilde{\mathcal{F}}_j(V)$. Par suite, pour tout $W \subset V$, $s_W = \rho_{W,V}(s_V) \in \widetilde{\mathcal{F}}_j(W)$, et donc $s \in \lim_{V \ni x} \widetilde{\mathcal{F}}_j(V)$.

(2) Soient X et S deux espaces topologiques, X étant localement compact, et soit \mathcal{H} un faisceau sur $S \times X$. Alors les deux préfaisceaux

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1 : U \mapsto H^1(S \times U, \mathcal{H}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathcal{F}}_2 : U \mapsto \bigcup_{\mathcal{X}} H^1(\mathcal{X}|_{S \times U}, \mathcal{H})$$

(où la réunion est prise sur les recouvrements ouverts \mathcal{X} de $S \times X$) ont des faisceaux associés identiques. En effet, on a clairement $\widetilde{\mathcal{F}}_2(U) \subset \widetilde{\mathcal{F}}_1(U)$. Si s est une section de $\widetilde{\mathcal{F}}_{1,x}$, alors s provient de $s_{\mathcal{U}} \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ pour un recouvrement ouvert \mathcal{U} d'un ouvert $S \times U$ avec U assez petit contenant x . Si V est relativement compact dans U et contient x , il existe \mathcal{X} tel que $\mathcal{X}|_{S \times V} = \mathcal{U}|_{S \times V}$. Par suite, pour tout $W \subset V$, $s_W \in H^1(\mathcal{X}|_{S \times W}, \mathcal{H})$, et donc $s \in \widetilde{\mathcal{F}}_{2,x}$.

(3) Soit \mathcal{G} un faisceau sur S et $p_1^{-1}\mathcal{G}$ son image inverse par la projection $p_1 : S \times X \rightarrow S$. On suppose X connexe. On a alors une bijection

$$\Gamma(S, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(S \times X, p_1^{-1}\mathcal{G})$$

(on pourra utiliser le fait que l'espace étalé $q : \widetilde{p_1^{-1}\mathcal{G}} \rightarrow S \times X$ est le produit $p \times \text{Id} : \widetilde{\mathcal{G}} \times X \rightarrow S \times X$; voir le § 15.a pour la notion d'espace étalé).

(4) On suppose maintenant S compact et X localement compact et localement connexe (par exemple un ouvert de \mathbb{C}^n). Alors pour tout $x^0 \in X$,

le germe en x^0 du faisceau \mathcal{F} associé au préfaisceau $U \mapsto H^1(S \times U, p_1^{-1}\mathcal{G})$ est égal à $H^1(S, \mathcal{G})$.

On montre d'abord que pour tout recouvrement ouvert \mathcal{L} de $S \times X$, il existe un recouvrement ouvert *fini* \mathcal{S} de S , un raffinement \mathcal{V} de \mathcal{L} et un voisinage ouvert V de x^0 dans X tels que $\mathcal{V}|_{S \times V} = \mathcal{S} \times V$. En effet, par compacité de S , si K est un voisinage compact de x^0 , il existe un raffinement \mathcal{L}' de \mathcal{L} qui est fini en restriction à $S \times K$ et tel que chaque ouvert de \mathcal{L}' qui coupe $S \times K$ soit de la forme $S_j \times V_i$. On note V' l'intersection des V_i qui contiennent x^0 et on choisit pour V un voisinage ouvert de x^0 relativement compact dans V' . On raffine maintenant \mathcal{L}' en prenant les $S_j \times V'$ si i est tel que V_i coupe $S \times \bar{V}$, et les ouverts de \mathcal{L}' qui ne coupent pas $S \times \bar{V}$.

Le faisceau \mathcal{F} est, d'après (2), le faisceau associé au préfaisceau $\bigcup_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}$ et donc aussi $\bigcup_{\mathcal{V}} \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{V}}$, avec $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{V}}(U) = H^1(\mathcal{V}|_{S \times U}, p_1^{-1}\mathcal{G})$. D'autre part, en considérant les complexes de Čech et d'après (3), on a $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{V}}(W) = H^1(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ pour tout $W \subset V$, et les morphismes de restriction sont réduits à l'identité. En particulier, le faisceau $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}$ associé à $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{V}}$ est constant de fibre $H^1(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ en restriction à V . En appliquant (1) à la suite croissante $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{V}}$, on obtient l'assertion.

(5) Sous les mêmes hypothèses (S compact et X ouvert de \mathbb{C}^n), on suppose de plus qu'il existe un recouvrement *fini* \mathcal{S} tel que $H^1(\mathcal{S}, \mathcal{G}) = H^1(S, \mathcal{G})$ (on dira qu'un tel recouvrement ouvert est *bon*; tout raffinement d'un bon recouvrement est encore bon). Alors le faisceau \mathcal{F} associé au préfaisceau $U \mapsto H^1(S \times U, p_1^{-1}\mathcal{G})$ est localement constant, de germe $H^1(S, \mathcal{G})$.

On reprend le raisonnement précédent avec K un compact quelconque. Pour tout \mathcal{L} , on peut trouver un raffinement \mathcal{V} tel que les ouverts de \mathcal{V} qui coupent $S \times K$ soient de la forme $S_j \times V_i$, où les V_i sont en nombre fini et recouvrent K et les S_j sont en nombre fini, recouvrent S et forment un bon recouvrement pour \mathcal{G} . Tout x dans K admet alors un voisinage ouvert V (intersection des V_i qui contiennent x) tel que $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}|_V$ soit le faisceau constant de germe $H^1(\mathcal{S}, \mathcal{G}) = H^1(S, \mathcal{G})$. En appliquant (1), on obtient l'assertion.

2. Au paragraphe 6.c du chapitre II il faut corriger la présentation du faisceau de Stokes, l'énoncé du corollaire 6.6 et la démonstration du théorème 6.1 comme ci-dessous. (Merci à Claus Hertling.) Voici une nouvelle rédaction du paragraphe 6.c (pages 119-121).

Montrons maintenant le théorème 6.1 en commençant par analyser plus en détail le faisceau des matrices de Stokes $\text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}})$. Les germes φ_k sont des polynômes en t^{-1} sans terme constant, à coefficients dans \mathcal{O}_{X, x^0} .

Un automorphisme a de $\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}$ sur un produit $I \times U$ d'un intervalle par un voisinage assez petit U de x^0 se décompose en blocs

$$a_{k\ell} : \widetilde{\mathcal{E}}^{\varphi_k} \otimes \widetilde{\mathcal{R}}_k \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}^{\varphi_\ell} \otimes \widetilde{\mathcal{R}}_\ell.$$

Le terme $a_{k\ell}$ a donc la forme $e^{\varphi_k - \varphi_\ell} b_{k\ell}$, où $b_{k\ell}$ est un homomorphisme de fibrés à connexion $\widetilde{\mathcal{R}}_k \rightarrow \widetilde{\mathcal{R}}_\ell$. Supposons que X est une boule. L'espace V_k des sections horizontales multiformes de \mathcal{R}_k sur $D^* \times X$ est de dimension finie sur \mathbb{C} et l'espace des sections horizontales de $\widetilde{\mathcal{R}}_k$ sur un ouvert du type $]0, r[\times I \times X$, avec $I \neq S^1$, s'identifie à V_k , cette identification dépendant notamment du choix d'une détermination du logarithme sur I . Par une telle identification, $b_{k\ell}$ induit une application \mathbb{C} -linéaire $V_k \rightarrow V_\ell$, qu'on note aussi $b_{k\ell}$. La matrice de $b_{k\ell}$ dans des bases de V_k, V_ℓ est donc constante, tandis que dans des $\mathcal{O}_{D \times X}[t^{-1}]$ -bases de $\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_\ell$, elle est à croissance modérée.

Pour $k \neq \ell$, écrivons

$$(\varphi_k - \varphi_\ell)(t, x) = \frac{\psi_{k\ell}(x)}{t^{n_{k\ell}}} \cdot u_{k\ell}(t, x)$$

avec $n_{k\ell} > 0$, $\psi_{k\ell}(x) \in \mathcal{O}_{X, x^0}^*$ (i.e. ne s'annule pas), $u(t, x)$ holomorphe au voisinage de $(0, x^0)$ et $u(0, 0) = 1$. On choisit aussi une détermination $\eta_{k\ell}(x)$ de classe C^∞ de l'argument de $\psi_{k\ell}$:

$$\psi_{k\ell}(x) = |\psi_{k\ell}(x)| \cdot e^{i\eta_{k\ell}(x)}.$$

Remarquons que $\psi_{\ell k} = -\psi_{k\ell}$.

Lemme 6.5. — Soit $e^{i\theta^0} \in S^1$.

(1) Pour $k \neq \ell$, la matrice $e^{\varphi_k - \varphi_\ell} b_{k\ell}$ dans des $\mathcal{O}_{D \times X}[t^{-1}]$ -bases de $\mathcal{E}^{\varphi_k} \otimes \mathcal{R}_k$, $\mathcal{E}^{\varphi_\ell} \otimes \mathcal{R}_\ell$ est à éléments dans $\mathcal{A}_{S^1 \times X}^{<X}$ au voisinage de $(e^{i\theta^0}, x^0)$ si et seulement si $b_{k\ell} = 0$ ou $\cos(n_{k\ell}\theta^0 - \eta_{k\ell}) < 0$.

(2) La matrice $b_{kk} - \text{Id}$ est à éléments dans $\mathcal{A}_{S^1 \times X}^{<X}$ au voisinage de $(e^{i\theta^0}, x^0)$ si et seulement si $b_{kk} - \text{Id} = 0$.

La démonstration du lemme est facile et laissée aux lecteurs : pour le premier point, il suffit de vérifier que $e^{\varphi_k - \varphi_\ell}$ est dans $\mathcal{A}_{S^1 \times X}^{<X}$ au voisinage de $(e^{i\theta^0}, x^0)$ si et seulement si $\text{Ré}(\varphi_k - \varphi_\ell) < 0$ sur un voisinage assez petit de $(e^{i\theta^0}, x^0)$, puis de traduire cette condition sur le terme principal de $\varphi_k - \varphi_\ell$. Ensuite, on remarque que, puisque $b_{k\ell}$ est à croissance modérée, cette matrice n'affecte pas la propriété de décroissance rapide ou de croissance exponentielle. \square

Soit $V = \bigoplus_k V_k$ l'espace vectoriel des sections horizontales multiformes de $\bigoplus_k \mathcal{A}_k$ sur $D^* \times X$. Considérons le sous-faisceau \mathcal{L} sur $S^1 \times X$ du faisceau constant $\text{Aut}(V)$, dont le germe en $(e^{i\theta^0}, x^0)$ est l'espace des automorphismes $\text{Id} + (\bigoplus c_{k\ell})$, avec $c_{kk} = 0$ et $c_{k\ell} : V_k \rightarrow V_\ell$ non nul si et seulement si $\cos(n_{k\ell}\theta^0 - \eta_{k\ell}) < 0$. On voit que toute matrice de Stokes (section locale de \mathcal{L}) est *unipotente* : si on ordonne convenablement l'ensemble des indices (ordre qui dépend du point θ^0), on peut supposer que $c_{k\ell} = 0$ pour $k < \ell$ et la matrice de $\bigoplus c_{k\ell}$ est triangulaire strictement supérieure.

On en déduit :

Corollaire 6.6 (les matrices de Stokes sont constantes). — *Pour tout intervalle ouvert $I \neq S^1$, les restrictions à $I \times X$ des faisceaux $\text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}})$ et \mathcal{L} sont isomorphes.*

Soit $I \neq S^1$ un intervalle ouvert de S^1 tel que, pour tous $k \neq \ell$, la fonction $t \mapsto \cos(n_{k\ell}t - \eta_{k\ell}(x^0))$ ne s'annule pas aux extrémités de I , et V un voisinage ouvert de x^0 tel que la même propriété soit satisfaite par $t \mapsto \cos(n_{k\ell}t - \eta_{k\ell}(x))$ pour tout $x \in V$. Si a est une section de $\text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}})$ sur $I \times V$, on a $a_{kk} = \text{Id}$ pour tout k et, pour tous $k \neq \ell$, $a_{k\ell} = 0$ ou $a_{\ell k} = 0$. Si $a_{k\ell} \neq 0$, c'est que $\cos(n_{k\ell}t - \eta_{k\ell}(x^0)) < 0$ pour $t \in I$ et dans ce cas la matrice de $b_{k\ell}$ est constante dans des bases de V_k et V_ℓ . \square

Corollaire 6.7 (changement de base pour les sections horizontales)

Si $i : S^1 \times \{x^0\} \hookrightarrow S^1 \times X$ désigne l'inclusion, l'application naturelle (faire $x = x^0$)

$$i^{-1} \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}) \longrightarrow \text{Aut}^{<0}(i^+ \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La question est locale, et on peut remplacer le faisceau $i^{-1} \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}})$ par \mathcal{L} . Le résultat est alors clair. \square

La *variété des directions de Stokes* dans $S^1 \times U$, où U est un voisinage de x^0 sur lequel les φ_k sont définis et satisfont les propriétés de bonté⁽¹⁾, est la réunion des ensembles d'équation

$$\cos(n_{k\ell}\theta - \eta_{k\ell}(x)) = 0.$$

La restriction de cet ensemble à $S^1 \times \{x^0\}$ est un ensemble fini de points, appelés *directions de Stokes en x^0* . Un couple (k, ℓ) contribue aux directions $(\eta_{k\ell} + \pi/2 + j\pi)/n_{k\ell}$, pour $j = 0, \dots, 2n_{k\ell} - 1$.

⁽¹⁾ Pour une étude du type de singularités que peut présenter, dans une situation plus générale, la variété de Stokes, les lecteurs pourront consulter [Kos90].

Exercice 6.8 (redressement de la variété de Stokes). — On suppose dans cet exercice que la variété des directions de Stokes est une sous-variété de $S^1 \times U$ et que, par une direction de Stokes en x^0 , passe une seule composante connexe de la variété des directions de Stokes.

(1) Montrer qu'il existe une application analytique réelle Ψ de $S^1 \times U$ dans lui-même, de la forme $\Psi(\theta, x) = (\psi(\theta, x), x)$ admettant une application réciproque du même type et envoyant la composante de la variété des directions de Stokes qui passe par θ^0 en x^0 sur $\{\theta^0\} \times U$.

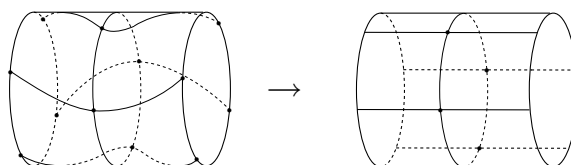


FIGURE 1. L'application Ψ , avec des directions de Stokes correspondant à un couple (k, ℓ) .

(2) Montrer que le faisceau $\text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}})$ est isomorphe à l'image inverse par la projection $p_1 : S^1 \times U \rightarrow S^1$ de sa restriction \mathcal{G} à $S^1 \times \{x^0\}$.

Lorsque l'hypothèse de cet exercice est satisfaite, le théorème 6.1 est conséquence immédiate de l'exemple 0.1 (l'existence d'un bon recouvrement fini sera indiquée au § 6.e). Sinon, l'argument nécessite une analyse plus précise du faisceau $\text{St}_X(\mathcal{M}^{\text{bon}})$. Commençons par montrer :

Proposition 6.9 (changement de base pour le faisceau de Stokes). — *Le germe en x^0 du faisceau de Stokes $\text{St}_X(\mathcal{M}^{\text{bon}})$ est égal à l'espace⁽²⁾ de Stokes $H^1(S^1, \text{Aut}^{<0}(i^+ \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}))$ de la connexion $i^+ \mathcal{M}^{\text{bon}}$.*

Démonstration. — Soit U un voisinage ouvert de x^0 et soit \mathcal{U} un recouvrement ouvert de $S^1 \times U$. Il existe alors un voisinage ouvert V de x^0 contenu dans U et un raffinement \mathcal{V} de \mathcal{U} tel que le recouvrement $\mathcal{V}|_V$ de $S^1 \times V$ induit par \mathcal{V} soit formé d'ouverts du type produit $I_j \times V$, où les I_j sont des intervalles ouverts de S^1 qui n'ont pas d'intersection trois à trois (on raffine d'abord la restriction de \mathcal{U} à $S^1 \times \{x^0\}$ puis on raisonne par compacité). Il sera commode de choisir aussi (\mathcal{V}, V) de sorte que l'on puisse appliquer le corollaire 2 pour tous $I_j \times V$ et $(I_j \cap I_k) \times V$. Par conséquent, $H^1(S^1 \times U, \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}))$ est la réunion des $H^1(\mathcal{V}, \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}))$ pour des recouvrements de ce type et le germe en x^0 du préfaisceau $W \mapsto$

⁽²⁾Le mot « espace » est utilisé ici car l'ensemble en question est muni d'une structure naturelle d'espace affine, cf. exemple 6.e.

$H^1(S^1 \times W, \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}))$ (pour $W \subset U$) est la réunion des germes en x^0 des préfaisceaux $W \mapsto H^1(\mathcal{Z}|_W, \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}))$.

Notons que, pour \mathcal{Z} et V comme ci-dessus,

$$H^1(\mathcal{Z}|_V, \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}})) = H^1(\mathcal{Z}|_{\{x^0\}}, \text{Aut}^{<0}(i^+ \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}))$$

d'après le corollaire 2, qui nous dit que $\Gamma(I_j \times V, \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}})) = \Gamma(I_j, \text{Aut}^{<0}(i^+ \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}))$ et de même pour les intersections $I_j \cap I_k$, ce qui implique l'égalité des complexes de Čech correspondants. De plus, pour $W \subset V$, le morphisme de restriction

$$H^1(\mathcal{Z}|_V, \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}})) \longrightarrow H^1(\mathcal{Z}|_W, \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}))$$

correspond à l'identité sur $H^1(\mathcal{Z}|_{\{x^0\}}, \text{Aut}^{<0}(i^+ \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}))$. Ainsi, pour \mathcal{Z} et V fixés comme ci-dessus, le germe en x^0 du préfaisceau $W \mapsto H^1(\mathcal{Z}|_W, \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}))$ est $H^1(\mathcal{Z}|_{\{x^0\}}, \text{Aut}^{<0}(i^+ \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}))$. On en déduit

$$\begin{aligned} \text{St}_X(\mathcal{M}^{\text{bon}})_{x^0} &= \bigcup_{\mathcal{Z}} H^1(\mathcal{Z}|_{\{x^0\}}, \text{Aut}^{<0}(i^+ \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}})) \\ &= H^1(S^1, \text{Aut}^{<0}(i^+ \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}})). \end{aligned} \quad \square$$

Fin de la démonstration du théorème 6.1. — La démonstration précédente nous dit plus précisément que, pour tout voisinage ouvert assez petit V de x^0 et tout recouvrement \mathcal{Z} de $S^1 \times V$ de la forme $(I_j \times V)_j$, où les intervalles ouverts I_j satisfont aux propriétés ci-dessus, le faisceau associé au préfaisceau $W \mapsto H^1(\mathcal{Z}|_W, \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}))$ est le faisceau constant sur V , de germe $H^1(\mathcal{Z}|_{\{x\}}, \text{Aut}^{<0}(i^+ \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}))$ pour tout $x \in V$.

Pour conclure, il suffit de montrer que on peut choisir le recouvrement fini $(I_j)_j$ de S^1 de sorte que, pour tout $x \in V$, on ait

$$H^1(\mathcal{Z}|_{\{x\}}, \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}})) = H^1(S^1 \times \{x\}, \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}})).$$

En effet, le terme de droite est égal au germe en x de $\text{St}_X(\mathcal{M}^{\text{bon}})$, d'après la proposition précédente et le corollaire 6.7 appliqués au point x . Alors le morphisme de préfaisceaux sur V défini par $H^1(\mathcal{Z}|_W, \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}})) \rightarrow H^1(S^1 \times W, \text{Aut}^{<X}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{bon}}))$ induit un isomorphisme des faisceaux associés. La démonstration de ce point sera indiquée au paragraphe 6.e. \square

3. La démonstration du théorème 5.9 au chapitre IV (pages 172–173) est incomplète. En effet, l'assertion

« Puisque $\mathbb{E}_0^{\text{reg}} = (\mathbb{E}_0^{\text{reg}} \cap \mathbb{E}_\infty^{\text{reg}}) \oplus \tau \mathbb{E}_0^{\text{reg}}$, on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{V}^k \cap \mathbb{E}_0 = (\mathbb{V}^k \cap \mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_\infty) + (\mathbb{V}^k \cap \tau \mathbb{E}_0) + (\mathbb{V}^{k+1} \cap \mathbb{E}_0). \text{ »}$$

est peu claire. Elle est expliquée grâce au lemme ci-dessous. Il faut donc remplacer la démonstration du théorème 5.9 par la suivante.

(Merci à Antoine Douai.)

Démonstration du théorème 5.9. — Commençons par un résultat sur les filtrations opposées. Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie muni d'une filtration décroissante exhaustive V^\bullet (toutes les filtrations sont indexées par \mathbb{Z}). On note $\text{gr}V = \bigoplus_{\ell} (V^{\ell}/V^{\ell+1})$ le gradué de cet espace. On suppose de plus que V est muni de deux filtrations $F_{\bullet}V$ (croissante exhaustive) et $F'^{\bullet}V$ (décroissante exhaustive). Elles induisent sur $\text{gr}V$ des filtrations

$$\begin{aligned} F_{\bullet}\text{gr}V &= \bigoplus_{\ell} [(F_{\bullet} \cap V^{\ell}) / (F_{\bullet} \cap V^{\ell+1})] \\ F'^{\bullet}\text{gr}V &= \bigoplus_{\ell} [(F'^{\bullet} \cap V^{\ell}) / (F'^{\bullet} \cap V^{\ell+1})]. \end{aligned}$$

Lemme. — *On suppose que $F_{\bullet}\text{gr}V$ et $F'^{\bullet}\text{gr}V$ sont opposées. Alors $F_{\bullet}V$ et $F'^{\bullet}V$ le sont aussi et, pour tout k , on a $\text{gr}(F_k V \cap F'^k V) = F_k \text{gr}V \cap F'^k \text{gr}V$.*

Démonstration. — Nous allons donner une démonstration « géométrique » de ce résultat. Pour cela, introduisons une nouvelle variable u . Le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{F} = \bigoplus_k u^k F_k V$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}[u]$ -module, du fait de la croissance de F_{\bullet} . De même, $\mathbb{F}' = \bigoplus_k u^k F'^k V$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}[u^{-1}]$ -module. Tous deux sont contenus dans le $\mathbb{C}[u, u^{-1}]$ -module libre $\mathbb{C}[u, u^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} V$. On vérifie (en prenant une base adaptée à la filtration correspondante) que \mathbb{F} est $\mathbb{C}[u]$ -libre de rang $\dim V$, et \mathbb{F}' est $\mathbb{C}[u^{-1}]$ -libre, du même rang. De plus, on a

$$\mathbb{C}[u, u^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[u]} \mathbb{F} = \mathbb{C}[u, u^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} V = \mathbb{C}[u, u^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[u^{-1}]} \mathbb{F}'.$$

Ces données définissent donc, par recollement, un fibré vectoriel $\mathcal{F}(F_{\bullet}V, F'^{\bullet}V)$ sur \mathbb{P}^1 .

Exercice. — Les filtrations $F_{\bullet}V$ et $F'^{\bullet}V$ sont opposées si et seulement si le fibré $\mathcal{F}(F_{\bullet}V, F'^{\bullet}V)$ est isomorphe au fibré trivial (de rang $\dim V$).

On montre le lemme par récurrence sur la longueur de la filtration V^\bullet . On se ramène au cas d'une filtration de longueur 2, c'est-à-dire à une suite exacte

$$0 \longrightarrow V^1 = \text{gr}^1 V \longrightarrow V = V^0 \longrightarrow V/V^1 = \text{gr}^0 V \longrightarrow 0.$$

Par définition des filtrations induites sur les gradués, on a une suite exacte de fibrés sur \mathbb{P}^1 :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(F_{\bullet}\text{gr}^1 V, F'^{\bullet}\text{gr}^1 V) \rightarrow \mathcal{F}(F_{\bullet}V, F'^{\bullet}V) \rightarrow \mathcal{F}(F_{\bullet}\text{gr}^0 V, F'^{\bullet}\text{gr}^0 V) \rightarrow 0.$$

L'hypothèse est que les deux termes extrêmes sont isomorphes à des fibrés triviaux. Par un argument analogue à celui du théorème I.2.8, l'extension ci-dessus est scindable, donc les filtrations $F_\bullet V$ et $F'^\bullet V$ sont opposées.

Pour tout ℓ et tout k , l'application

$$(*) \quad \text{gr}^\ell(F_k V \cap F'^k V) \stackrel{\text{déf}}{=} (V^\ell \cap F_k V \cap F'^k V) / (V^{\ell+1} \cap F_k V \cap F'^k V) \longrightarrow \text{gr}^\ell V$$

est injective, et son image est contenue dans $F_k \text{gr}^\ell V \cap F'^k \text{gr}^\ell V$. Ainsi,

$$(**) \quad \dim \text{gr}^\ell(F_k V \cap F'^k V) \leq \dim(F_k \text{gr}^\ell V \cap F'^k \text{gr}^\ell V).$$

On a par ailleurs $\dim(F_k V \cap F'^k V) = \dim \text{gr}(F_k V \cap F'^k V)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \dim V &= \sum_k \dim(F_k V \cap F'^k V) && \text{(filtrations opposées)} \\ &= \sum_k \dim \text{gr}(F_k V \cap F'^k V) \\ &= \sum_k \sum_\ell \dim \text{gr}^\ell(F_k V \cap F'^k V) \\ &\leq \sum_k \sum_\ell \dim(F_k \text{gr}^\ell V \cap F'^k \text{gr}^\ell V) && \text{d'après (**)} \\ &= \sum_k \dim(F_k \text{gr} V \cap F'^k \text{gr} V) = \dim \text{gr} V && \text{(filtrations opposées)} \\ &= \dim V, \end{aligned}$$

d'où l'égalité dans (**). Par conséquent, (*) est aussi surjective. \square

Revenons à la démonstration du théorème 5.9. Nous allons construire un $\mathbb{C}[\tau']$ -module \mathbb{E}_∞ solution du problème 5.5 pour \mathbb{E}_0 . Considérons le $\mathbb{C}[\tau', \tau'^{-1}]$ -module

$$\mathbb{M}^{\text{reg}} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \left(\tau'^k \mathbb{V}' / \tau'^{k+1} \mathbb{V}' \right) \simeq \mathbb{C}[\tau', \tau'^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} H'.$$

Il est muni d'une connexion naturelle induite par celle de \mathbb{M} et, si e est une base de H' , donc une $\mathbb{C}[\tau', \tau'^{-1}]$ -base de \mathbb{M}^{reg} , la matrice de la connexion dans cette base n'est autre que $\text{Rés}_{\mathbb{V}'} \nabla \cdot d\tau' / \tau'$. Notons que \mathbb{M}^{reg} est à singularité régulière en ∞ ainsi qu'en 0. Ce module s'identifie, comme indiqué plus haut, au $\mathbb{C}[\tau, \tau^{-1}]$ -module à connexion $\text{gr}_{\mathbb{V}} \mathbb{M}$ déjà considéré à la remarque II.2.22. Lorsque \mathbb{M} n'est pas à singularité régulière en 0, on ne peut pas identifier \mathbb{M} et \mathbb{M}^{reg} , puisque ce dernier module est régulier en 0. Par contre, si \mathbb{M} est à singularité régulière, ces deux modules sont isomorphes.

La filtration H'^\bullet permet de construire un réseau logarithmique $\mathbb{E}_\infty^{\text{reg}}$ de \mathbb{M}^{reg} : on pose

$$\mathbb{E}_\infty^{\text{reg}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \tau'^k H'^{-k}.$$

Par ailleurs, le réseau \mathbb{E}_0 de \mathbb{M} permet de construire un réseau $\mathbb{E}_0^{\text{reg}}$ de \mathbb{M}^{reg} : on pose

$$\mathbb{E}_0^{\text{reg}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (\mathbb{E}_0 \cap \tau^k \mathbb{V}) / (\mathbb{E}_0 \cap \tau^{k+1} \mathbb{V}).$$

La condition du théorème (ou, plus précisément, celle du lemme) signifie exactement que $\mathbb{E}_\infty^{\text{reg}}$ est une solution au problème 5.5 pour le réseau $\mathbb{E}_0^{\text{reg}}$ de \mathbb{M}^{reg} .

Puisque \mathbb{M} est à singularité régulière à l'infini, on peut voir \mathbb{M}^{reg} comme un $\mathbb{C}[\tau, \tau^{-1}]$ sous-module de \mathcal{M}' (cf. remarque II.2.22). Le réseau $\mathbb{E}_\infty^{\text{reg}}$ définit un réseau $\mathcal{E}_\infty \subset \mathcal{M}'$ en posant $\mathcal{E}_\infty = \mathbb{C}\{\tau'\} \otimes_{\mathbb{C}[\tau']} \mathbb{E}_\infty^{\text{reg}}$. Il existe alors un unique réseau \mathbb{E}_∞ de \mathbb{M} sur la carte U_∞ , dont le germe en ∞ soit égal à \mathcal{E}_∞ . Par construction on a

$$\text{gr}_{\mathbb{V}} \mathbb{E}_\infty = \text{gr}_{\mathcal{V}} \mathcal{E}_\infty = \mathbb{E}_\infty^{\text{reg}}.$$

Considérons les filtrations $\mathbb{E}_k = \tau^k \mathbb{E}_0$ et $\mathbb{E}_\infty^k = \tau^k \mathbb{E}_\infty$. L'hypothèse est donc que ces deux filtrations induisent sur $\mathbb{V}^0/\mathbb{V}^1$ des filtrations opposées. En multipliant par τ^j , on voit qu'elles induisent aussi des filtrations opposées sur $\mathbb{V}^j/\mathbb{V}^{j+1}$ pour tout j . On déduit du lemme ci-dessus que, pour tout $\ell \geq 1$, elles induisent sur $\mathbb{V}^0/\mathbb{V}^\ell$ des filtrations opposées et que, avec les notations du lemme 5.10,

$$\dim [(\mathbb{E}_k \cap \mathbb{V}^0 + \mathbb{V}^\ell) \cap (\mathbb{E}_\infty^k \cap \mathbb{V}^0 + \mathbb{V}^\ell) \pmod{\mathbb{V}^\ell}] = \sum_{j=0}^{\ell-1} \dim(G'_{k-j} \cap H'^{k-j}).$$

Mais, k étant fixé, on a $\mathbb{E}_k \cap \mathbb{V}^\ell = 0$ et $\mathbb{V}^\ell \subset \mathbb{E}_\infty^k$ pour $\ell \gg 0$, donc le terme de gauche ci-dessus n'est autre que $\mathbb{E}_k \cap \mathbb{E}_\infty^k \cap \mathbb{V}^0$ et, en multipliant par τ^{-k} , on obtient

$$\dim(\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_\infty \cap \mathbb{V}^{-k}) = \dim(\mathbb{E}_k \cap \mathbb{E}_\infty^k \cap \mathbb{V}^0) = \sum_{j \geq 0} \dim(G'_{k-j} \cap H'^{k-j}).$$

Pour $k \gg 0$, cette égalité nous donne finalement

$$\dim(\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_\infty) = \dim(\mathbb{V}^0/\mathbb{V}^1) = \text{rg } \mathbb{E}_0.$$

Pour conclure, il suffit de montrer (cf. proposition I.4.15) que l'application naturelle $\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_\infty \rightarrow \mathbb{E}_0/\tau \mathbb{E}_0$ est injective, puisqu'elle sera alors bijective. Utilisant encore la propriété d'opposition, on voit que, pour tout k , on a

$$\mathbb{V}^k \cap \tau \mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_\infty \subset \mathbb{V}^{k+1},$$

donc

$$\mathbb{V}^k \cap \tau \mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_\infty \subset \mathbb{V}^{k+1} \cap \tau \mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_\infty.$$

En itérant l'assertion, on en déduit que, pour tout k , $\mathbb{V}^k \cap \tau \mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_\infty$ est nul, donc (en prenant $k \ll 0$) $\tau \mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_\infty$ l'est aussi, d'où l'injectivité cherchée. \square

4. La proposition 1.7 (page 179) du chapitre V :

1.7. Proposition (la localisation préserve les réseaux). — Si \mathbb{E} est un réseau du $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -module \mathbb{M} , son image dans le fibré méromorphe associé est un réseau de ce fibré méromorphe, i.e. engendre le fibré méromorphe sur l'anneau des fractions rationnelles en t à pôles dans Σ . \square

est trivialement fautive. Le bon énoncé est simplement :

1.7. Proposition. — Un réseau \mathbb{E} d'un fibré méromorphe \mathbb{M} est aussi un réseau du $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -module correspondant.

Indications sur la démonstration. — Soient m_1, \dots, m_r des générateurs de \mathbb{E} en tant que $\mathbb{C}[t]$ -module. Par hypothèse, il existe un polynôme $p(t)$ tel que $\mathbb{M} = \bigcup_{k \in -\mathbb{N}} p(t)^k \mathbb{E}$. Il suffit alors de montrer que, pour tout $m \in \mathbb{M}$ (par exemple l'un des m_i), il existe un entier $j \leq 0$ tel que, pour tout $k < j$, $p(t)^k m$ appartienne au $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -module engendré par les $p(t)^i m$, avec $i \in [j, 0]$.

Ce résultat peut être montré en utilisant le polynôme de Bernstein : il existe un polynôme non nul $b(s)$ tel que $b(s)p(t)^s m = Q(t, d, s)p(t)^{s+1} m$. On choisit pour j un entier inférieur aux parties réelles de toutes les racines de b . Alors, pour $k < j$, la relation de Bernstein pour $s = k$ montre que $p(t)^k m$ appartient à $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle \cdot p(t)^{k+1} m$, donc par récurrence à $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle \cdot p(t)^j m$. \square

L'énoncé juste est utilisé implicitement dans la démonstration du corollaire 2.9 du chapitre V : par hypothèse, \mathbb{E} est un réseau du fibré méromorphe \mathbb{M}' ; pour appliquer le théorème 2.7-(2), il faut utiliser le fait que \mathbb{E} est un réseau du $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -module \mathbb{M}' , donc appliquer la proposition ci-dessus.

(Merci à Mathias Schulze.)

5. La démonstration due la proposition 2.10 (page 189) du chapitre V contient une erreur et des coquilles. Voici la démonstration rétablie.

Démonstration de la proposition 2.10 du chapitre V. — Écrivons la base $\boldsymbol{\varepsilon}$ en colonne. Par définition on a

$$t \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = ({}^t B_0 + \tau \cdot {}^t B_\infty) \cdot \boldsymbol{\varepsilon},$$

d'où l'on tire pour tout $k \geq 1$, en utilisant l'hypothèse sur B_∞ ,

$$\tau^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \prod_{\ell=0}^{k-1} \left[({}^t B_\infty + \ell \text{Id})^{-1} (t \text{Id} - {}^t B_0) \right] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Ceci montre que \mathbb{E} est engendré par $\boldsymbol{\varepsilon}$ sur $\mathbb{C}[t]$.

Nous allons maintenant montrer que $\mathbb{M} \subset \mathbb{C}(t) \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{E}$. Il suffit de vérifier que, pour tout $k \geq 1$, $\tau^{-k} \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{C}(t) \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{E}$. On peut écrire la relation définissant t sous la forme

$$\tau^{-1} t \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \left(\tau^{-1} {}^t B_0 + {}^t B_\infty \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

(si la base $\boldsymbol{\varepsilon}$ est écrite en colonne) ; de la relation de commutation $\tau^{-1} t = t \tau^{-1} + 1$, on déduit

$$(t \text{Id} - {}^t B_0) \tau^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = ({}^t B_\infty - \text{Id}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon},$$

et donc

$$(*) \quad \tau^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = (t \text{Id} - {}^t B_0)^{-1} ({}^t B_\infty - \text{Id}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}.$$

En itérant le procédé, on obtient l'assertion voulue, et donc

$$\mathbb{C}(t) \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{M} = \mathbb{C}(t) \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{E}.$$

Puisque le rang de \mathbb{M} est égal à \widehat{d} (proposition 2.2), le rang de \mathbb{E} (i.e. $\dim_{\mathbb{C}(t)} \mathbb{C}(t) \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{E}$) est égal à \widehat{d} . Il en résulte que $\widehat{\mathbb{E}}$ est libre de rang \widehat{d} : le système générateur $\boldsymbol{\varepsilon}$ définit en effet d'un morphisme surjectif $\mathbb{C}[t]^{\widehat{d}} \rightarrow \mathbb{E}$, qui induit un isomorphisme après tensorisation par $\mathbb{C}(t)$ puisque les $\mathbb{C}(t)$ -espaces vectoriels sont de même rang ; son noyau est alors de torsion ; ce dernier doit être nul puisque $\mathbb{C}[t]^{\widehat{d}}$ n'a pas de sous-module de torsion. Ceci donne le premier point.

La matrice de ∇ dans la base $\boldsymbol{\varepsilon}$ est $(B_\infty - \text{Id})(t \text{Id} - B_0)^{-1} dt$: en effet, c'est exactement ce que donne la relation (*). Les pôles de cette matrice sont situés aux valeurs propres de B_0 . Si ces dernières sont simples, les pôles sont simples.

Enfin, si on étend \mathbb{E} en un fibré trivial sur \mathbb{P}^1 , la matrice de la connexion ∇ dans la coordonnée $t' = 1/t$ est égale à $-(B_\infty - \text{Id})(\text{Id} - t' B_0)^{-1} \frac{dt'}{t'}$. Elle est donc à pôle simple en $t' = 0$. \square

6. Dans l'exemple VI.3.20(2) pages 225-226, il faut remplacer (deux fois) $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ par $\mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$.