Claude Sabbah

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ALGÉBRIQUES

STRASBOURG, JANVIER-MARS 2010

C. Sabbah
UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz,
École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France.
E-mail : sabbah@math.polytechnique.fr
Url : http://www.math.polytechnique.fr/~sabbah

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ALGÉBRIQUES

STRASBOURG, JANVIER-MARS 2010

Claude Sabbah

TABLE DES MATIÈRES

LEÇON 1

8 JANVIER 2010

Résumé. On introduit la notion d'équation différentielle et de système différentiel linéaires algébriques. Les trois exemples « mascottes » sont l'équation hypergéométrique, l'équation d'Airy et l'équation de Bessel. On rappelle l'énoncé du théorème de Cauchy. On montre comment « voir » la singularité à l'infini, et on introduit la notion d'équivalence méromorphe. La théorie locale au voisinage d'une singularité conduit à la distinction entre singularité régulière et singularité irrégulière. On rappelle quelques propriétés des singularités régulières.

1.1. Introduction : équations différentielles linéaires et systèmes différentiels linéaires

On considère dans ce cours des équations différentielles linéaires algébriques d'une variable complexe, c'est-à-dire des équations différentielles portant sur la fonction inconnue $u(z)$ de la forme

$$a_n(z)\Big(\frac{d}{dz}\Big)^n u(z) + \cdots + a_1(z)\frac{d}{dz}u(z) + a_0(z)u(z) = 0,$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des *polynômes* en la variable z.

***Définition 1.1.1* (Équation différentielle linéaire).** On appelle *opérateur différentiel linéaire algébrique d'ordre n* un opérateur

$$P = a_n(z)\Big(\frac{d}{dz}\Big)^n + \cdots + a_1(z)\frac{d}{dz} + a_0(z)$$

où les coefficients a_i sont des éléments de l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[z]$ et $a_n \not\equiv 0$.

Les *singularités* de l'opérateur sont les racines de a_n. On considère aussi le point à l'infini sur la sphère de Riemann comme une singularité (j'y reviendrai).

Le premier résultat essentiel est le théorème de Cauchy :

***Théorème 1.1.2* (de Cauchy).** *Soit z^o un nombre complexe qui n'est pas une singularité de l'opérateur P. Pour toute valeur initiale $(v^o, v^o_1, \ldots, v^o_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, il existe une et* *une seule fonction holomorphe $u(z)$ au voisinage de z^o qui satisfait à*

$$\begin{cases} Pu = 0, \\ u(z^o) = v^o, \dots, \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} u(z)_{|z=z^o} = v^o_{n-1}. \end{cases}$$

De plus, toute telle solution se prolonge en un solution holomorphe sur le plus grand disque ouvert de centre z^o ne contenant aucune singularité de P.

Corollaire 1.1.3. *L'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $Pu = 0$ sur un tel disque ouvert est de dimension finie égale à $n =$ rang du système.*

À toute équation différentielle linéaire d'ordre n est associé un système différentiel linéaire de taille n, pour lequel les solutions sont les vecteurs

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Ce système porte sur le vecteur inconnu $U(z) = (u_0, \dots, u_{n-1})$ de fonctions :

$$\frac{d}{dz} U(z) = A(z)U(z),$$

où $A(z)$ est la matrice $n \times n$ compagnon

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$$

dont les éléments sont dans le corps $\mathbb{C}(z)$ des fractions rationnelles.

***Définition 1.1.4* (Système différentiel linéaire).** On appelle *système différentiel linéaire algébrique de taille n* un système linéaire

$$\frac{d}{dz} U(z) = A(z)U(z)$$

en le vecteur de fonctions inconnues $U(z)$, où $A(z)$ est la matrice $n \times n$ à éléments sont dans le corps $\mathbb{C}(z)$ des fractions rationnelles.

Les *singularités* du système sont les pôles de $A(z)$. On considère aussi le point à l'infini sur la sphère de Riemann comme une singularité (j'y reviendrai).

***Théorème 1.1.5* (de Cauchy pour les systèmes).** *Soit z^o un nombre complexe qui n'est pas une singularité du système différentiel de matrice $A(z)$. Pour tout vecteur $U^o = (u^o_0, \dots, u^o_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, il existe, au voisinage de z^o, une unique solution holomorphe $U(z)$ du système $\frac{d}{dz}U(z) = A(z)U(z)$ qui satisfait à $U(z^o) = U^o$. De plus, toute telle solution se prolonge en une solution holomorphe sur le plus grand disque ouvert de centre z^o et ne contenant aucun pôle de A.*

Esquisse de démonstration. On trouvera dans le livre de Cartan (*Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*), au chapitre VIII, la démonstration de ce résultat dans un cadre plus général. Étant donné un système différentiel

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(z, u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ f_n(z, u_1, \dots, u_n) \end{pmatrix}$$

où les f_i sont des *polynômes*[1] *en* $u_1, \dots, u_n$ à coefficients holomorphes en z (c'est bien le cas pour le système linéaire qui nous intéresse), tous holomorphes au voisinage d'un disque fermé de centre z^o et de rayon r, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une unique solution holomorphe dans le disque ouvert $D(z^o, r - \varepsilon)$ du système ci-dessus prenant avec les conditions initiales fixées en z^o. Par unicité, une telle solution existe donc et est holomorphe sur le plus grand disque ouvert de centre z^o où les coefficients des f_i sont holomorphes. □

Corollaire 1.1.6. *L'espace vectoriel des solutions du système différentiel sur un tel disque ouvert est de dimension finie égale à* $n =$ *rang du système.*

Exercice 1.1.7. Montrer que le théorème de Cauchy et son corollaire sont valables si on remplace le disque de centre z^o par un ouvert *convexe* Ω quelconque contenant z^o et sur lequel $A(z)$ est holomorphe. [On montrera que pour tout point z de Ω, il existe une unique solution du système sur un voisinage (qu'on peut supposer convexe) du segment $[z^o, z]$ avec valeur initiale fixée en z^o ; conclure.]

Remarquer que la démonstration n'utilise que le fait que l'ouvert Ω est *étoilé par rapport à* z^o.

Exercice 1.1.8 **(Équations différentielles linéaire algébriques d'ordre** 1**)**

Résoudre l'équation différentielle linéaire algébrique générale d'ordre 1 (= le système différentiel linéaire algébrique général de taille 1)

$$a_1(z)\frac{d}{dz}u(z) + a_0(z)u(z) = 0, \qquad a_1(z) \not\equiv 0.$$

[Décomposer la fraction rationnelle a_0/a_1 en éléments simples.]

Exemple 1.1.9 **(Équation différentielle hypergéométrique).** Elle s'écrit

$$z(1-z)\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2 u(z) + \big(c - (a+b+1)z\big)\frac{d}{dz}u(z) - abu(z) = 0$$

où a, b, c sont trois nombres complexes fixés. Les singularités sont $0, 1, \infty$. On appelle $\lambda = 1 - c$, $\mu = c - a - b$, $\nu = a - b$, les *paramètres angulaires*.

Si ces paramètres ne sont pas entiers, deux solutions indépendantes sur le disque au voisinage de 0 sont données par

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$$

[1] Cartan considère le cas plus général encore de fonctions analytiques en toutes les variables, mais cela peut restreindre le domaine de convergence des solutions.

et $z^\lambda\, {}_2F_1(a+\lambda, b+\lambda, 1+\lambda; z)$, où on a posé

$$(a)_k = \begin{cases} a(a+1)\cdots(a+k-1) = \dfrac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} & \text{si } k \geqslant 1,\\ 1 & \text{si } k=0. \end{cases}$$

***Exercice 1.1.10*.** Montrer que le rayon de convergence de la série ${}_2F_1(a,b,c;z)$ est égal à 1 (on donnera un sens à cette question en considérant la série débutant à $k = k^o$ assez grand). Pourquoi ne peut-on pas déduire *a priori* ce résultat du théorème de Cauchy ?

***Exemple 1.1.11* (Équation différentielle d'Airy).** C'est l'équation

$$\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2 u(z) - zu(z) = 0.$$

Ses singularités ? Il n'y en a qu'une, elle est à l'infini (voir l'exemple 1.2.2). La *fonction d'Airy* est la solution $u(z)$ qui, pour z réel, est donnée par

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(\tfrac{1}{3}t^3 + zt)\, dt.$$

(On peut justifier le fait que cette intégrale est bien définie et satisfait à l'équation différentielle, mais ce n'est pas le lieu de le faire ici.)

***Exemple 1.1.12* (Équation différentielle de Bessel).** C'est l'équation

$$z^2\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2 u(z) + z\frac{d}{dz}u(z) + (z^2-\alpha^2)u(z),$$

où α est une constante fixée. Elle a une singularité en 0 et une en ∞. Une solution est donnée par la *fonction de Bessel* $J_\alpha(z)$ qui admet pour développement de Taylor en 0

$$J_\alpha(z) = \Big(\frac{z}{2}\Big)^\alpha \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2m}.$$

***Conclusion 1.1.13*.** Les solutions d'une équation différentielle (ou d'un système) se présentent en général sous deux formes : un développement en série au voisinage d'une singularité (ceci provient de l'étude locale de la singularité) ou une formule intégrale faisant intervenir des fonctions simples (ceci met en relation l'équation différentielle et la géométrie algébrique des courbes et des surfaces).

1.2. La singularité à l'infini

On pose $z' = 1/z$ et on s'intéresse à une solution $U(z)$ d'un système différentiel $\frac{d}{dz}U(z) = A(z)U(z)$ au voisinage de $z'=0$. On cherche à exprimer le système différentiel satisfait par la fonction composée $V(z') = U(z(z'))$ si $z(z')$ est la fonction $z' \mapsto 1/z'$.

La dérivation des fonctions composées donne

$$\frac{d}{dz'}v(z') = -\frac{1}{z'^2}\frac{d}{dz}u(z(z')) = -z^2\frac{d}{dz}u(z).$$

Définition 1.2.1. Le système différentiel dans la variable z' défini par le système $\frac{d}{dz}U(z) = A(z)U(z)$ est

$$\frac{d}{dz'}V(z') = \widetilde{A}(z')V(z'), \qquad \widetilde{A}(z') = -\frac{1}{z'^2}A(1/z').$$

Exemple 1.2.2. Écrivons l'équation d'Airy sous forme de système en prenant pour $U(z)$ le vecteur $(u(z), u'(z))$:

$$\frac{d}{dz}U(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} U(z).$$

Alors $\widetilde{A}(z')$ est la matrice

$$-\begin{pmatrix} 0 & 1/z'^2 \\ 1/z'^3 & 0 \end{pmatrix}$$

qui a un pôle triple à l'infini.

De la même manière, si $u(z)$ est solution de $Pu = 0$, alors $v(z') = u(z(z'))$ est solution de $P_\infty v = 0$, où P_∞ est l'opérateur

$$P_\infty = a_n(1/z')\Big(-z'^2\frac{d}{dz'}\Big)^n + \cdots + a_1(1/z')\Big(-z'^2\frac{d}{dz'}\Big) + a_0(1/z').$$

Exemple 1.2.3. L'équation d'Airy (exemple 1.1.11) donne

$$P_\infty = \Big(-z'^2\frac{d}{dz'}\Big)^2 - \frac{1}{z'} = \frac{1}{z'}\Big[z'^5\Big(\frac{d}{dz'}\Big)^2 + 2z'^4\Big(\frac{d}{dz'}\Big) - 1\Big].$$

Exercice 1.2.4

(1) Justifier le calcul symbolique ci-dessus pour les opérateurs, à savoir la rèlgle de commutation

$$\frac{d}{dz'}\cdot z' = z'\cdot\frac{d}{dz'} + 1$$

(On se souviendra que le produit des opérateurs correspond à leur composition, quand ils agissent sur les fonctions).

(2) Calculer de la même manière les opérateurs P_∞ pour l'équation hypergéométrique (exemple 1.1.9) et l'équation de Bessel (exemple 1.1.12).

1.3. Changement de base (ou de jauge)

Étant donné un système différentiel de matrice $A(z)$, il est naturel de considérer comme équivalent un système pour lequel il existe un changement de base $\mathcal{P}(z)$ tel que tout vecteur solution $V(z)$ est obtenu à partir d'un vecteur solution $U(z)$ du premier système par

$$V(z) = \mathcal{P}(z)\cdot U(z)$$

où $\mathcal{P}(z)$ est une matrice inversible de taille n, à coefficients fractions rationnelles ayant des pôles au plus sur l'ensemble des pôles de $A(z)$.

Lemme 1.3.1. *Si $U(z)$ est solution du système $\frac{d}{dz}U(z) = A(z)U(z)$, alors $V(z)$ est solution du système $\frac{d}{dz}V(z) = B(z)V(z)$, avec*

$$B(z) = \mathcal{P}(z)A(z)\mathcal{P}(z)^{-1} + \frac{d\mathcal{P}(z)}{dz} \cdot \mathcal{P}(z)^{-1}.$$

Remarque 1.3.2. On peut s'intéresser à un système *localement* équivalent au système de départ. La matrice $\mathcal{P}(z)$ peut alors être une matrice inversible à coefficients méromorphe sur un ouvert Ω du plan complexe, à pôles au plus dans l'ensemble des pôle de A contenus dans Ω.

Exercice 1.3.3. Deux systèmes différentiels de rang 1 au voisinage de $z = 0$, définis par des fonctions méromorphes $a(z)$ et $b(z)$, sont équivalents si et seulement si $a - b$ a un pôle simple avec résidu entier en $z = 0$. (Indication : on montrera qu'une fonction méromorphe $q(z)$ est de la forme $p'(z)/p(z)$ si et seulement si q a un pôle simple et son résidu est entier).

[Note : il est beaucoup plus délicat de donner un critère d'équivalence pour des systèmes de rang $\geqslant 2$, et celui-ci ne se généralise pas du tout.]

1.4. Théorie locale

On s'intéresse maintenant à la question de classer, à équivalence près définie plus haut, les systèmes différentiels au voisinage d'une singularité. On supposera que cette singularité est $z = 0$, et toutes les fonctions ou matrices considérées sont holomorphes ou méromorphes sur un voisinage de $z = 0$. On utilisera donc une équivalence locale dans le sens de la remarque 1.3.2.

Définition 1.4.1. Soit $A(z)$ une matrice à coefficients méromorphes à pôle en $z = 0$ sur un voisinage de $z = 0$. On dit que la singularité $z = 0$ du système différentiel correspondant est

– *régulière* si il existe une matrice méromorphe inversible $\mathcal{P}(z)$ telle que la matrice transformée $B(z)$ ait au plus un pôle simple ;
– *irrégulière* dans le cas contraire.

Remarques 1.4.2

(1) Il n'est pas évident de vérifier qu'une singularité est vraiment irrégulière, car les matrices $\mathcal{P}$ qu'on peut utiliser ont des pôles, et les pôles de B sont difficilement contrôlables à partir des pôles de A. Il est donc important de donner des critères effectifs pour savoir si une singularité est régulière ou pas.

(2) Si un système différentiel est à singularité régulière/irrégulière, tout système localement équivalent (au sens de la remarque 1.3.2) l'est aussi.

(3) La distinction singularité régulière/irrégulière est surtout due au comportement différent des solutions dans les deux cas, comme on va le voir.

(4) On dit qu'un opérateur différentiel P (à coefficients holomorphes au voisinage de $z = 0$ et tel que 0 soit le seul zéro de a_n) est à singularité régulière/irrégulière si le système associé l'est.

***Exercice 1.4.3* (rang 1).** Un système différentiel de rang 1 défini par une fonction méromorphe $a(z)$ est à singularité régulière en $z = 0$ si et seulement si $a(z)$ est à pôle simple en $z = 0$.

***Exercice 1.4.4*.** Montrer que l'équation hypergéométrique a toutes ses singularités régulières. Montrer que l'équation de Bessel a sa singularité $z = 0$ régulière.

***Remarque 1.4.5* (importante).** Une matrice $A(z)$ peut avoir un pôle d'ordre $\geqslant 2$ et donner lieu à un système différentiel à singularité régulière. On peut prendre les choses à l'envers : partant de la matrice à pôle simple

$$B(z) = \frac{1}{z}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on considère les matrices équivalentes $A_k(z)$ obtenues par le changement de base $\mathcal{P}_k(z) = \left(\begin{smallmatrix} z^k & 0 \\ 0 & z^{-k} \end{smallmatrix}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$. Calculer l'ordre du pôle de $A_k(z)$.

***Théorème 1.4.6* (Théorème fondamental pour les singularités régulières)**

Soit $A(z)$ la matrice d'un système différentiel. Alors ce système est à singularité régulière en $z = 0$ si et seulement si pour tout secteur ouvert

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z \in \,]\theta_0, \theta_1[,\ |z| \in \,]0, \varepsilon[\}$$

les composante de tout vecteur solution sur ce secteur sont des fonctions holomorphes à croissance modérée sur ce secteur, c'est-à-dire que

– pour tout $\varepsilon' \in \,]0, \varepsilon[$ et tout arc fermé $[\theta'_0, \theta'_1] \subset \,]\theta_0, \theta_1[$, il existe des constantes $N, C > 0$ telles que, sur le secteur $\overline{S}' = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z \in [\theta'_0, \theta'_1],\ |z| \in \,]0, \varepsilon']\}$, toute telle fonction f satisfasse $|f(z)| \leqslant C|z|^{-N}$.

On notera (*cf.* corollaire 1.1.6 et exercice 1.1.7) que, puisque le secteur S est un ouvert convexe, l'espace des solutions sur ce secteur du système défini par $A(z)$ est de dimension n si on suppose que ε est assez petit pour que $A(z)$ soit holomorphe sur ce secteur.

***Corollaire 1.4.7*.** *Toute solution $U(z)$ holomorphe sur un voisinage épointé de $z = 0$ d'un système différentiel à singularité régulière en $z = 0$ est méromorphe en $z = 0$.*

Démonstration. En effet, recouvrant le cercle par un nombre fini d'arcs fermés (deux par exemple), on peut choisir N et C indépendants des secteurs, et chaque coefficient $u_i(z)$ de $U(z)$ est une fonction holomorphe dur un disque épointé, bornée par $C|z|^{-N}$ sur ce disque, donc méromorphe (par le théorème des singularités inexistantes). □

Démonstration de $\Rightarrow$. Il s'agit de montrer que les solutions d'un système différentiel à singularité régulière sont à croissance modérée. On commence par remarquer que la propriété est vraie pour $U(z)$ si et seulement si elle est vraie pour $\mathcal{P}(z)U(z)$, où $\mathcal{P}(z)$ est une matrice méromorphe inversible au voisinage de $z = 0$. Ainsi, il suffit de montrer la propriété pour un système équivalent au système de départ. Par définition, on peut supposer que la matrice $A(z)$ à un pôle simple en $z = 0$.

Proposition 1.4.8. *Si la matrice $A(z)$ est à pôle simple en $z = 0$, elle est équivalente, au voisinage de $z = 0$, à une matrice constante.*

(Pour la démonstration, voir le livre de Wasow : *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, chapitre 2).

Il s'agit maintenant de résoudre explicitement (dans un secteur S quelconque) le système différentiel $\frac{d}{dz}U(z) = \frac{1}{z}B_0U(z)$, avec B_0 constante. Une matrice fondamentale est donnée par z^{B_0}. □

Esquisse de démonstration de $\Leftarrow$. On définit la notion de matrice fondamentale $Y(z)$ de solutions, dans tout secteur. C'est la matrice dont les colonnes forment une base de solutions. On choisit un logarithme C de la monodromie, de sorte que la monodromie de la matrice fondamentale soit la multiplication à droite par $\exp(2\pi iC)$. Alors, posant $z^C = \exp(2\pi iC \log z)$, la matrice $Y(z)z^{-C}$ est invariante par monodromie. Par ailleurs, $Y(z)$ est à croissance modérée si et seulement si $Y(z)z^{-C}$ l'est. En conclusion, sous l'hypothèse faite, la matrice $Y(z)z^{-C}$ est holomorphe sur le disque épointé et à croissance modérée, donc méromorphe, et son inverse aussi. Considérons donc le changement de base de matrice $\mathcal{P}(z) = z^CY^{-1}$. Sa matrice fondamentale a pour colonnes $\mathcal{P}(z)Y_1, \dots, \mathcal{P}(z)Y_n$, si $Y_1, \dots, Y_n$ sont les colonnes de Y. Cette matrice s'écrit donc $\mathcal{P}\cdot Y$, c'est-à-dire $z^CY^{-1}Y = z^C$. Ainsi, après changement de base de matrice $\mathcal{P}$, le système s'écrit

$$\frac{d}{dz}V(z) = \frac{C}{z}\cdot V(z).$$ □

Le critère de Fuchs. Alors qu'il n'est pas toujours évident de vérifier si un système différentiel a une singularité régulière ou irrégulière (disons à l'origine de $\mathbb{C}$), il est beaucoup plus simple de le vérifier pour une *équation* différentielle linéaire : c'est le critère de Fuchs. Il n'est donc pas toujours utile de mettre une équation sous la forme d'un système.

***Théorème 1.4.9* (Théorème de Fuchs).** *Un opérateur différentiel linéaire*

$$P = a_n(z)\Big(\frac{d}{dz}\Big)^n + \cdots + a_1(z)\frac{d}{dz} + a_0(z),$$

où les coefficients a_i sont des fonctions holomorphes au voisinage de 0, et $a_n \not\equiv 0$ ne s'annule qu'à l'origine sur ce voisinage, est à singularité régulière à l'origine si et seulement si, notant $v_0(a_k)$ l'ordre d'annulation de a_k à l'origine, on a

(Critère de Fuchs) $$\forall\, k \leqslant n, \quad k - v_0(a_k) \leqslant n - v_0(a_n).$$

(On convient que $v_0(a_k) = +\infty$ si $a_k \equiv 0$.)

On ne démontrera pas ce critère dans ces notes (mais voir le problème page 17).

Exercice 1.4.10. Montrer qu'un opérateur P satisfait au critère de Fuchs si et seulement si, utilisant la relation analogue à celle de l'exercice 1.2.4(1), il peut s'écrire sous la forme

$$P = b(z)\Big[\Big(z\frac{d}{dz}\Big)^n + \cdots + b_1(z)\Big(z\frac{d}{dz}\Big) + b_0(z)\Big],$$

où $b_0, \dots, b_{n-1}$ sont holomorphes au voisinage de 0 et b est méromorphe à pôle en 0 au plus (donc de la forme $z^\ell a(z)$ avec a holomorphe, $a(0) \neq 0$ et $\ell \in \mathbb{Z}$).

Soit P un opérateur différentiel à coefficients $a_i \in \mathbb{C}[z]$. On dit que P est à *singularités régulières* si toutes ses singularités (à distance finie et à l'infini) sont régulières. On peut appliquer le critère de Fuchs en chacune de ses singularités à distance finie (zéros de a_n) pour tester s'il est à singularité régulière en ce point. Voyons ce qu'il en est pour l'opérateur associé P_∞ dans la variable z'.

***Exercice 1.4.11* (Critère de Fuchs à l'infini).** Montrer que l'opérateur P est à singularité régulière à l'infini (c'est-à-dire P_∞ est à singularité régulière en $z' = 0$) si et seulement si ses coefficients satisfont aux inégalités

$$\forall\, k \leqslant n, \quad \deg a_k - k \leqslant \deg a_n - n.$$

(On convient que $\deg a_k = -\infty$ si $a_k \equiv 0$).

***Exercice 1.4.12*.** Appliquer le critère de Fuchs aux trois exemples (hypergéométrique, Airy et Bessel) et déterminer le type de leurs singularités (à distance finie et à l'infini).

LEÇON 2

15 JANVIER 2010

Résumé. On s'intéresse à la question de trouver une forme normale la plus simple possible pour un système différentiel linéaire. Dans le cas local, la mise sous forme normale d'un système à singularité régulière permet de le résoudre facilement (de même que la mise sous forme de Jordan d'un système linéaire permet de le résoudre facilement). On s'intéresse en particulier aux formes normales des systèmes à pôle simple par équivalence holomorphe, appelées formes normales de Levelt. Ceci permet d'introduire d'une manière plus générale le problème de Birkhoff. Dans le cas global, on donne aussi l'énoncé du problème de Riemann-Hilbert, qui sera étudié en détail dans la leçon suivante. Il faut noter qu'une solution à ces deux problèmes ne permet pas nécessairement de résoudre plus facilement le système différentiel correspondant. Néanmoins une telle forme normale est utile quand on veut « déformer le système ».

2.1. Théorie locale (bis) : équivalence méromorphe et équivalence holomorphe

Soit $A(z)$ une matrice à coefficients méromorphes au voisinage de $z = 0$, avec pôle en $z = 0$. Rappelons q'une matrice $B(z)$ du même type est dite *équivalente à $A(z)$* (au sens des systèmes différentiels linéaires) s'il existe, toujours au voisinage de $z = 0$, une matrice méromorphe inversible $\mathcal{P}(z)$ à pôle en $z = 0$ uniquement ainsi que son inverse[(1)] telle que

$$B(z) = \mathcal{P}(z)A(z)\mathcal{P}(z)^{-1} + \frac{d\mathcal{P}(z)}{dz} \cdot \mathcal{P}(z)^{-1}. \tag{EQ}$$

On dira aussi que $B(z)$ est méromorphiquement équivalente à $A(z)$, pour distinguer de la propriété suivante :

Définition 2.1.1 **(Équivalence locale holomorphe).** On dira que $B(z)$ est *holomorphiquement équivalente à $A(z)$* si la relation (EQ) a lieu avec une matrice $\mathcal{P}(z)$ à coefficients tous holomorphes *ainsi que son inverse* $\mathcal{P}(z)^{-1}$.

---

(1) C'est-à-dire que dét $\mathcal{P}(z)$ n'est pas identiquement nulle, et on choisit le voisinage de $z = 0$ de sorte que dét $\mathcal{P}(z)$ n'ait ni zéro ni pôle distinct de $z = 0$ dans ce voisinage — on rappelle que les zéros et les pôles d'une fonction méromorphe sont isolés.

Compte tenu de l'holomorphie de $\mathcal{P}(z)$, celle de $\mathcal{P}(z)^{-1}$ est équivalente au fait que $\det \mathcal{P}(z)$ (qui est holomorphe au voisinage de $z = 0$) est aussi inversible comme fonction holomorphe, c'est-à-dire ne s'annule pas en $z = 0$. Cette propriété est aussi équivalente au fait que la matrice $\mathcal{P}(0)$ est *inversible*, puisque la valeur en $z = 0$ de $\det \mathcal{P}(z)$ n'est autre que $\det \mathcal{P}(0)$.

Proposition 2.1.2. *Soit $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}_0 + z\mathcal{P}_1 + z^2\mathcal{P}_2 + \cdots$ une matrice holomorphe à inverse holomorphe (i.e. telle que $\mathcal{P}_0$ soit inversible). Si $B(z)$ est équivalente à $A(z)$ par $\mathcal{P}(z)$, alors l'ordre du pôle de $B(z)$ est égal à celui de $A(z)$, et si $A_r z^{-r}$ est le terme le plus polaire de $A(z)$ ($r \geqslant 1$, $A_r \neq 0$), alors $B_r = \mathcal{P}_0 A_r \mathcal{P}_0^{-1}$.*

On voit bien ici la différence avec l'équivalence méromorphe, qui peut augmenter ou diminuer l'ordre du pôle (méditer la remarque 1.4.5).

Démonstration. On remarque que $\frac{d\mathcal{P}(z)}{dz} \cdot \mathcal{P}(z)^{-1}$est holomorphe, donc ne compte pas pour le calcul de la partie polaire de $B(z)$. Ainsi, *la partie polaire de $B(z)$ est celle de $\mathcal{P}(z)A(z)\mathcal{P}(z)^{-1}$*.

D'autre part, on peut écrire $\mathcal{P}(z)^{-1} = \mathcal{P}_0^{-1} + z\cdots$, et la deuxième assertion est alors claire. □

2.2. La forme normale de Levelt

Soit $A(z)$ la matrice d'un système à singularité régulière en $z = 0$. Il existe donc un changement de base méromorphe qui la rend équivalente à une matrice à pôle simple.

Partons donc d'une matrice $A(z)$ à pôle simple. D'après la proposition 1.4.8, elle est *méromorphiquement* équivalente à une matrice constante.

Question 2.2.1. *Quelle est la forme la plus simple que peut prendre une matrice $A(z)$ à pôle simple par un changement de base holomorphe (ainsi que son inverse) ?*

On aimerait, comme pour le cas des changements de base méromorphes, que la forme la plus simple soit B/z, avec B constante. Mais ce n'est pas toujours le cas, et la réponse précise est donnée par le théorème de Levelt. Commençons par le cas favorable. Puisqu'on travaille avec des matrices à pôle simple, on les notera sous la forme

$$A(z) = \frac{1}{z} \cdot (A_0 + zA_1 + z^2A_2 + \cdots).$$

Proposition 2.2.2. *Si deux valeurs propres quelconques de A_0 ne diffèrent pas d'un entier non nul, il existe une matrice $\mathcal{P}(z)$ holomorphe ainsi que son inverse telle que $B(z) = A_0/z$.*

Démonstration. On pose *a priori* $\mathcal{P}(z) = \mathrm{Id} + z\mathcal{P}_1 + z^2\mathcal{P}_2 + \cdots$, et on cherche à determiner les coefficients $\mathcal{P}_i$. On les détermine de manière inductive, en développant l'équation

$$z\frac{d\mathcal{P}}{dz} = A_0\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(z)(A_0 + zA_1 + z^2A_2 + \cdots), \tag{1}$$

qui donne, pour $\ell \geqslant 1$,

$$\ell \mathcal{P}_\ell = A_0 \mathcal{P}_\ell - \mathcal{P}_\ell A_0 + \Phi_\ell(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{\ell-1}; A_0, \dots, A_\ell), \tag{2}$$

où Φ_ℓ est un polynôme (non commutatif), et en particulier est connu à l'étape ℓ de la récurrence.

Lemme 2.2.3. *Soient $C \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ et $D \in \mathrm{M}_q(\mathbb{C})$ deux matrices carrées de taille p et q respectivement. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *pour toute matrice Y de taille $p \times q$ à éléments dans $\mathbb{C}$, il existe une unique matrice X du même type satisfaisant $CX - XD = Y$;*

(2) *les matrices carrées C et D n'ont pas de valeur propre commune.*

Soit $\ell \geqslant 1$. Supposons déterminées les matrices $\mathcal{P}_k$ ($k \leqslant \ell - 1$). La relation (2) s'écrit sous la forme du lemme avec $X = \mathcal{P}_\ell$, $Y = \Phi_\ell$, $C = \ell \operatorname{Id} - A_0$ et $D = -A_0$. La condition du lemme signifie alors qu'il n'existe pas de couple (λ, λ') de valeurs propres de A_0 avec $\lambda - \lambda' = \ell$. Puisque $\ell \geqslant 1$, la condition mise dans la proposition 2.2.2 permet, pour tout $\ell \geqslant 1$, de déterminer une matrice $\mathcal{P}_\ell$ solution de (2) si l'on connaît les matrices $\mathcal{P}_k$ pour $k \leqslant \ell - 1$.

Démonstration du lemme. Soit $\varphi : \mathbb{C}^{p\times q} \to \mathbb{C}^{p\times q}$ l'application linéaire définie par $\varphi(X) = CX - XD$. On montre (par exemple en supposant d'abord C et D diagonalisables, puis en utilisant un argument de densité) que les valeurs propres de φ sont exactement les $\mu_j - \lambda_i$, où λ_i parcourt l'ensemble des valeurs propres de C et μ_j celui de D. Donc φ est bijective si et seulement si aucune des différences $\mu_j - \lambda_i$ n'est nulle. □

Reste à montrer la convergence de la série $\mathcal{P}(z) = \operatorname{Id} + z\mathcal{P}_1 + z^2\mathcal{P}_2 + \cdots$ ainsi construite. On remarque que la série est solution (formelle seulement, *a priori*) du système (1), qui est un système à pôle simple sur l'espace des matrices $n \times n$.

Proposition 2.2.4. *Soit $A(z)$ une matrice à pôle simple en $z = 0$. Alors toute solution formelle du système différentiel linéaire associé à $A(z)$ est convergente.*

On trouvera la démonstration dans le livre de Wasow déjà mentionné. □

Quelques rappels sur les matrices

– Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée de taille n. Alors M se décompose en $M = S(\operatorname{Id} + N)$, où S est semi-simple (*i.e.* diagonalisable), N nilpotente, et S et N sont des polynômes en M, donc commutent entre elles et avec M.

– Toute telle matrice M définit un endomorphisme $\operatorname{ad} M = [M, \bullet] : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Si M et M' commutent, alors $\operatorname{ad} M$ et $\operatorname{ad} M'$ commutent (utiliser par exemple l'identité de Jacobi $[M, [M', X]] = [[M, M'], X] + [M', [M, X]]$). Si M est conjuguée à M', alors $\operatorname{ad} M$ est conjuguée à $\operatorname{ad} M'$. Si M est diagonale, alors $\operatorname{ad} M$ est diagonale (dans la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$). Par conséquent, si M est semi-simple, alors $\operatorname{ad} M$ est semi-simple.

Passons maintenant au cas général, où la condition sur les valeurs propres de A_0 (proposition 2.2.2) n'est plus nécessairement satisfaite. Soit D une matrice qui satisfait aux propriétés suivantes (nous verrons plus loin qu'une telle matrice existe toujours) :

(1) D est semi-simple à valeurs propres entières et commute à A_0,

(2) $A_0 - D$ satisfait à la condition de la proposition 2.2.2, c'est-à-dire que ses valeurs propres ne diffèrent pas d'un entier non nul.

On note $\delta_1, \dots, \delta_n$ les valeurs propres (entières) de D et $\delta = \max |\delta_i - \delta_j|$. Par exemple, quand A_0 satisfait la condition de la proposition 2.2.2, on peut choisir $D = 0$ et donc $\delta = 0$.

***Théorème 2.2.5* (forme normale de Levelt).** *Choisissons D comme ci-dessus. Il existe alors un changement de base $\mathcal{P}(z) = \mathrm{Id} + z\mathcal{P}_1 + \cdots$ holomorphe ainsi que son inverse, tel qu'on ait $B(z) = \dfrac{1}{z}(A_0 + zB_1 + \cdots + z^\delta B_\delta)$, avec*

$$\operatorname{ad} D(B_i) = iB_i \quad \forall\, i \geqslant 1.$$

Si D est diagonale, la propriété du théorème signifie que l'élément d'indice k, ℓ de B_i est non nul seulement si $\delta_k - \delta_\ell = i$. Ceci implique en particulier que B_i est nilpotente, ce qu'on voit en prenant une base dans laquelle D est diagonale et ses valeurs propres sont ordonnées : $\delta_1 \geqslant \cdots \geqslant \delta_n$, auquel cas la propriété implique que B_i est conjuguée à une matrice strictement triangulaire.

Démonstration. C'est un raffinement de celle de la proposition 2.2.2. On cherche une matrice $\mathcal{P}(z) = \mathrm{Id} + z\mathcal{P}_1 + \cdots$ et une matrice B comme dans la proposition, telles que l'équation analogue à (1), qui s'écrit maintenant

$$z\frac{d\mathcal{P}}{dz} = (A_0 + zB_1 + \cdots + z^\delta B_\delta)\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(z)(A_0 + zA_1 + z^2A_2 + \cdots), \tag{3}$$

soit satisfaite. On obtient l'analogue de l'équation (2) pour tout $\ell \geqslant 1$ pour déterminer $\mathcal{P}_\ell$, mais Φ_ℓ dépend de $B_1, \dots, B_\delta$ qui sont aussi à déterminer. On commence donc par considérer les équations pour $\ell = 1, \dots, \delta$. On écrit

$$\ell\mathcal{P}_\ell = A_0\mathcal{P}_\ell + B_\ell - \mathcal{P}_\ell A_0 + \Psi_\ell(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{\ell-1}; B_1, \dots, B_{\ell-1}; A_0, \dots, A_\ell),$$

où Ψ_ℓ est connu par récurrence sur ℓ, et on veut déterminer $\mathcal{P}_\ell$ et B_ℓ. On écrit ceci sous la forme

$$(\ell\,\mathrm{Id} - \operatorname{ad} A_0)(\mathcal{P}_\ell) = B_\ell + \Psi_\ell.$$

Puisque $\operatorname{ad} A_0$ commute à $\operatorname{ad} D$, on peut décomposer cette équation sur les sous-espaces propres de $\operatorname{ad} D$. De plus, puisque la seule valeur propre entière de $\operatorname{ad}(A_0 - D)$ est 0, l'endomorphisme $\operatorname{ad}(A_0 - D) + k\,\mathrm{Id}$ est inversible pour tout entier $k \neq 0$. Sa restriction à chaque espace propre de $\operatorname{ad} D$ satisfait à la même propriété.

Ceci étant rappelé, on cherche donc à résoudre, pour tout entier k, l'équation

$$(\ell\,\mathrm{Id} - \operatorname{ad} A_0)(\mathcal{P}_\ell^{(k)}) = B_\ell^{(k)} + \Psi_\ell^{(k)}, \tag{4}$$

où $M^{(k)}$ désigne la composante de la matrice M sur l'espace propre de valeur propre k de $\operatorname{ad} D$, qui satisfait donc $\operatorname{ad} D(M^{(k)}) = kM^{(k)}$.

(a) Si $k \neq \ell$, on a $B_\ell^{(k)} = 0$ et $(\ell \operatorname{Id} - \operatorname{ad} A_0)$ coïncide sur cet espace propre avec l'endomorphisme $(\ell - k)\operatorname{Id} - \operatorname{ad}(A_0 - D)$ qui, on l'a vu ci-dessus, est inversible. On peut donc trouver une solution (unique) à l'équation (4).

(b) Si $k = \ell$, on doit résoudre sur cet espace propre l'équation $\operatorname{ad}(D - A_0)(\mathcal{P}_\ell^{(\ell)}) - B_\ell^{(\ell)} = \Psi_\ell^{(\ell)}$ en déterminant B_ℓ par la même occasion.

Choisissons un supplémentaire de l'image de $\operatorname{ad}(D - A_0)$ dans cet espace propre. Alors on peut décomposer $\Psi_\ell^{(\ell)}$ en somme d'un élément de l'image de $\operatorname{ad}(D - A_0)$, ce qui donne $\mathcal{P}_\ell^{(\ell)}$ (de manière non unique) et d'un élément dans ce supplémentaire, qu'on baptise B_ℓ.

On continue maintenant la récurrence lorsque $\ell \geqslant \delta + 1$, tous les B_i étant connus. On procède exactement comme dans le cas où $\ell \leqslant \delta$, et on remarque que le cas (b) ne se produit plus. Il n'est plus nécessaire d'introduire des termes correctifs B_ℓ, et on détermine $\mathcal{P}_\ell$ comme dans le cas (a).

Reste à montrer la convergence de la série $\mathcal{P}(z)$, ce qui se fait à l'aide de la proposition 2.2.4, puisque le système (3) est à pôle simple. □

Exercice 2.2.6.

(1) Vérifier que la matrice $B(z) = \dfrac{1}{z}(A_0 + zB_1 + \cdots + z^\delta B_\delta)$ ainsi obtenue s'écrit

$$B(z) = \frac{z^D B_0 z^{-D}}{z}, \quad \text{avec } B_0 = A_0 + B_1 + \cdots + B_\delta.$$

(2) En appliquant le changement de base méromorphe de matrice $z^D \mathcal{P}(z)$ à la matrice $A(z)$, montrer qu'on obtient la matrice $(B_0 - D)/z$, et retrouver ainsi la proposition 1.4.8.

Choix d'une matrice D. On peut mettre la matrice A_0 sous forme de Jordan. On construit une matrice D en remplaçant chaque bloc de Jordan de A_0, de valeur propre notée α, par la matrice scalaire de même taille, égale à $[\operatorname{Ré}(\alpha)]\operatorname{Id}$ (partie entière de la partie réelle de α). Ainsi, les valeurs propres de $A_0 - D$ sont les $\alpha - [\operatorname{Ré}(\alpha)]$, qui ont une partie réelle dans $[0, 1[$. La différence de deux tels nombres, si elle est entière, ne peut qu'être nulle.

Le problème de Birkhoff. Ce problème se pose dans le cadre plus général des matrices $A(z)$ avec un pôle d'ordre quelconque en $z = 0$.

Problème de Birkhoff 2.2.7. *Étant donnée une matrice méromorphe $A(z)$ à pôle d'ordre $r \geqslant 1$ en $z = 0$, est-il possible de trouver un changement de base $\mathcal{P}(z)$ holomorphe ainsi que son inverse, de sorte que $B(z)$ n'ait pas de partie holomorphe ?*

La réponse est négative en générale, comme on va le voir dans l'exercice 2.2.8 dès le cas où $r = 1$ (pôle simple). Remarquons aussi que, toujours dans le cas où $r = 1$, la proposition 2.2.2 donne une condition pour laquelle le problème a une réponse positive. Le problème de Birkhoff se transpose alors en le problème de trouver des conditions naturelles pour lesquelles il a une réponse positive.

Exercice 2.2.8. Soit $A(z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que le système de matrice $A(z)$ admet le vecteur $\left(\begin{smallmatrix} 1/z \\ \log z \end{smallmatrix}\right)$ comme solution.

(2) Montrer que si $A(z)$ est holomorphiquement équivalente à une matrice constante, celle-ci est conjuguée à $A_0 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(3) Trouver les solutions du système de matrice A_0 et aboutir à une contradiction.

2.3. Théorie globale : le problème de Riemann-Hilbert

On revient à la situation globale où les matrices sont ont pour coefficients des fractions rationnelles, et où toutes leurs singularités, y compris à l'infini, sont régulières.

Problème de Riemann-Hilbert 2.3.1. *Étant donnée une matrice rationnelle $A(z)$ définissant un système différentiel linéaire dont toutes les singularités sont régulières, est-il possible de trouver un changement de base $\mathcal{P}(z)$ rationnel à pôles au plus en les pôles de $A(z)$, de sorte que $B(z)$ n'ait que des pôles simples, y compris à l'infini (on dit alors que le système défini par $B(z)$ est fuchsien).*

Autrement dit, sachant que, au voisinage de chaque singularité, on peut trouver une matrice méromorphe inversible sur un voisinage de cette singularité, qui transforme $A(z)$ en une matrice méromorphe à pôle simple sur ce voisinage, sachant ceci donc, peut-on faire la même chose globalement pour toutes les singularités à la fois, y compris l'infini, avec une matrice rationnelle $\mathcal{P}(z)$?

Lemme 2.3.2 **(expression d'un système fuchsien).** *Soit $A(z)$ la matrice d'un système différentielle fuchsien, à pôles (tous simples) en $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{C}$. Alors on peut écrire*

$$A(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{z - p_j}$$

pour certaines matrices constantes A_j.

Démonstration. Définissons A_j comme le résidu de $A(z)$ en p_j et considérons la matrice $C(z) = A(z) - \sum_{j=1}^{m} A_j/(z - p_j)$. Par construction, cette matrice n'a pas de pôle à distance finie, donc est à coefficients polynomiaux. Considérons la situation à l'infini (*cf.* définition 1.2.1). Le terme $A_j/(z - p_j)$ se transforme en

$$\frac{-1}{z'^2} \cdot \frac{A_j}{(1/z' - p_j)} = \frac{-(1 - p_j z')^{-1} A_j}{z'},$$

qui est donc à pôle simple de résidu $-A_j$ à l'infini. Il est d'autre part facile de voir que si $f(z)$ est un polynôme, la fonction $(-1/z'^2) f(1/z')$ est un polynôme en $1/z'$ sans terme constant ni résidu. Ainsi, la matrice $C(z)$, dont les éléments sont de la forme précédente et qui sont de plus à pôle au plus simple en $z' = 0$, est donc nulle. $\square$

PROBLÈME

22 JANVIER 2010

Résumé. Le but de ce problème est de montrer le théorème de Fuchs 1.4.9 par la méthode des opérateurs à indice.

Problème

On note $\mathbb{C}[\![z]\!]$ l'espace des séries formelles et $\mathbb{C}\{z\}$ le sous-espace des séries convergentes.

P.a. Passage de P à Q. Soit P est un opérateur différentiel comme dans le théorème de Fuchs 1.4.9. On cherche à remplacer, dans la démonstration du théorème de Fuchs, l'opérateur P par un opérateur plus maniable Q.

(i) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que l'opérateur $Q = z^m P$ puisse s'écrire sous la forme $Q = \sum_{k=0}^n b_k(z) z^k (\frac{d}{dz})^k$, où les b_k sont dans $\mathbb{C}\{z\}$, et il existe i tel que $b_i(0) \neq 0$.

(ii) Montrer que P satisfait au critère de Fuchs si et seulement si $b_n(0) \neq 0$, et vérifier que cette condition signifie que Q satisfait au critère de Fuchs.

(iii) Montrer que Q peut aussi s'écrire sous la forme $Q = \sum_{k=0}^n c_k(z)(z\frac{d}{dz})^k$, avec $c_k(z) \in \mathbb{C}\{z\}$, et il existe ℓ tel que $c_\ell(0) \neq 0$.

[Indication : on montrera par récurrence sur $k \geqslant 1$, à partir de la relation de commutation de l'exercice 1.2.4 avec la variable z, la relation $z^k(\frac{d}{dz})^k = (z\frac{d}{dz})(z\frac{d}{dz} - 1)\cdots(z\frac{d}{dz} - k + 1)$. Si tous les c_k s'annulaient en 0, on aurait $Q = zQ'$, pour un opérateur Q' du même type que Q ; on vérifiera que l'hypothèse que $b_i(0) \neq 0$ implique que ce n'est pas le cas.]

(iv) Montrer que P (ou Q d'après la question précédente) satisfait au critère de Fuchs si et seulement si $c_n(0) \neq 0$ (on montrera que $c_n(0) = b_n(0)$).

(v) Montrer d'autre part que P est à singularité régulière si et seulement si Q l'est (on comparera les solutions de $Pu = 0$ et $Qu = 0$).

(vi) Écrire la le système différentiel compagnon de Q sous la forme $z\frac{d}{dz} - C(z)$ sur le vecteur $U(z) = \big(u(z), z\frac{d}{dz}u(z), \dots, (z\frac{d}{dz})^{n-1}u(z)\big)$, et montrer que Q satisfait la condition de Fuchs si et seulement si $C(z)$ est holomorphe (c'est-à-dire que le système $\frac{d}{dz} - C(z)/z$ est à pôle simple).

(vii) Conclure que si P satisfait au critère de Fuchs, alors P est à singularité régulière.

P.b. Opérateurs à indice. Soient E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (de dimension finie ou infinie) et $U : E \to F$ une application linéaire. On dit que U *est à indice* si $\operatorname{Ker} U$ et $F/\operatorname{Im} U$ sont de dimension finie. On appelle alors indice de U l'entier $\operatorname{Ind}(U; E, F) = \dim \operatorname{Ker} U - \dim(F/\operatorname{Im} U)$. On note $\operatorname{Ind}(U; E)$ si $E = F$. Bien entendu, si E et F sont de dimension finie, toute application linéaire est à indice.

(i) Soient $\mathcal{P} : E \to E$ et $\mathcal{Q} : F \to F$ des isomorphismes. Montrer que $U : E \to F$ est à indice si et seulement si $\mathcal{Q} \circ U \circ \mathcal{P}$ l'est, et les indices sont les mêmes.

(ii) Montrer que si E et F sont de dimension finie, l'indice de toute application linéaire $U : E \to F$ est égal à $\dim E - \dim F$.

(iii) On ne fait plus d'hypothèse sur E et F. Montrer que si $U : E \to F$ et $V : F \to G$ sont à indice, alors la composée $V \circ U$ est à indice et que

$$\operatorname{Ind}(V \circ U; E, G) = \operatorname{Ind}(U; E, F) + \operatorname{Ind}(V; F, G).$$

[Indication : il sera judicieux d'utiliser l'égalité (parfois appelée « deuxième théorème d'isomorphisme » pour les sous-espaces $\operatorname{Im} U$ et $\operatorname{Ker} V$ de F) :

$$\frac{\operatorname{Ker} V}{\operatorname{Ker} V \cap \operatorname{Im} U} = \frac{\operatorname{Im} U + \operatorname{Ker} V}{\operatorname{Im} U},$$

de remarquer que $\operatorname{Ker} V \circ U = U^{-1}(\operatorname{Ker} V \cap \operatorname{Im} U)$.]

(iv) Soient $U : E \to E'$, $V : F \to F'$ et $W : G \to G'$ trois applications linéaires. On suppose données des applications linéaires injectives $\varphi : E \to F$ et $\varphi' : E' \to F'$, et des applications linéaires surjectives $\psi : F \to G$ et $\psi' : F' \to G'$ qui satisfont aux propriétés suivantes :

(1) le noyau de ψ est égal à l'image de φ (dans F) et le noyau de ψ' est égal à l'image de φ' (dans F'),

(2) les différentes applications avec même origine et même but, obtenues par composition dans le diagramme suivant, sont égales (on dit que le diagramme est commutatif) :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "U"'] & F \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "V"] & G \arrow[d, "W"] \\
E' \arrow[r, "\varphi'"] & F' \arrow[r, "\psi'"] & G'
\end{tikzcd}$$

(par exemple, $V \circ \varphi = \varphi' \circ U$).

Montrer que, si deux parmi les trois applications U, V, W sont à indice, la troisième l'est aussi et que

$$\operatorname{Ind}(V; F, F') = \operatorname{Ind}(U; E, E') + \operatorname{Ind}(W; G, G').$$

(On traitera les trois choix possibles.)

[Indication : on montrera d'abord que φ' et ψ' définissent des applications linéaires $E'/\operatorname{Im} U \to F'/\operatorname{Im} V$ et $F'/\operatorname{Im} V \to G'/\operatorname{Im} W$, qu'on notera encore φ' et ψ', et on utilisera le *lemme du serpent*, voir par exemple Wikipedia, qui dit que, dans ces conditions, il existe une application linéaire $\eta : \operatorname{Ker} W \to E' / \operatorname{Im} U$ telle que la suite d'applications

$$0 \xrightarrow{0} \operatorname{Ker} U \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Ker} V \xrightarrow{\psi} \operatorname{Ker} W$$
$$\xrightarrow{\eta} E'/\operatorname{Im} U \xrightarrow{\varphi'} F'/\operatorname{Im} V \xrightarrow{\psi'} G'/\operatorname{Im} W \xrightarrow{0} 0$$

satisfasse la propriété : le noyau d'une quelconque des applications est égale à l'image de la précédente (en particulier, φ est injective et ψ' est surjective). On montrera enfin que, lorsqu'une suite d'applications

$$0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to E_4 \to E_5 \to E_6 \to 0$$

satisfait à cette propriété, la somme alternée des dimensions $\dim E_1 - \dim E_2 + \dim E_3 - \dim E_4 + \dim E_5 - \dim E_6$ est nulle.]

(v) Calculer l'indice de $z : \mathbb{C}[\![z]\!] \to \mathbb{C}[\![z]\!]$ et celui de $d/dz : \mathbb{C}[\![z]\!] \to \mathbb{C}[\![z]\!]$.

P.c. Réciproque, première partie. On considère de manière générale un opérateur Q de la forme

$$Q = \sum_{k=0}^{n} c_k(z)\Big(z\frac{d}{dz}\Big)^k, \quad \text{avec } c_k(z) \in \mathbb{C}\{z\},\ c_n(z) \not\equiv 0 \text{ et } \exists\, i,\ c_i(0) \neq 0.$$

Cet opérateur définit une application $\mathbb{C}$-linéaire $\mathbb{C}[\![z]\!] \to \mathbb{C}[\![z]\!]$ de l'espace des séries formelles dans lui-même. Le but de cette partie est de montrer :

$$\text{(P.c)}(*) \qquad \operatorname{Ind}(Q, \mathbb{C}[\![z]\!]) = 0.$$

(i) Montrer que pour tout entier $j \geqslant 0$, on a

$$Q(z^j) = \Big(\sum_k c_k(0) j^k\Big) z^j + \text{termes d'ordre} > j.$$

(ii) Montrer qu'il existe $j_0 \geqslant 0$ tel que $\sum_k c_k(0) j^k \neq 0$ pour tout $j \geqslant j_0$.

(iii) En déduire que pour tout $g \in z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!]$, il existe une unique $f \in z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!]$ telle que $Qf = g$, c'est-à-dire que $Q : z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!] \to z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!]$ est bijectif.

(iv) En déduire que $\operatorname{Ind}(Q; z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!]) = 0$, puis que $\operatorname{Ind}(Q; \mathbb{C}[\![z]\!]) = 0$. (On montrera que $\operatorname{Ind}(Q; \mathbb{C}[\![z]\!]) = \operatorname{Ind}(Q; z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!]) + \operatorname{Ind}(Q; \mathbb{C}[\![z]\!] / z^{j_0}\mathbb{C}[\![z]\!])$ à l'aide de P.b(iv), puis on conclura à l'aide de P.b(ii).)

(v) Soit R l'opérateur $\dfrac{1}{c_n(z)}Q$, qui définit une application linéaire $\mathbb{C}[\![z]\!] \to z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!]$. Montrer que $\operatorname{Ind}(R; \mathbb{C}[\![z]\!], z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!]) = 0$.

[Indication : on considérera le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[\![z]\!] \arrow[r, "R"] \arrow[d, equal] & z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!] \arrow[d, "z^{v(c_n)}", "\wr"'] \\ \mathbb{C}[\![z]\!] \arrow[r, "Q"] & \mathbb{C}[\![z]\!] \end{tikzcd}$$

qui permet de comparer les noyaux et images de Q et R.]

P.d. Indice d'un système linéaire. On note $\widehat{K}$ le corps des séries de Laurent formelles (bornées à gauche). Un élément de $\widehat{K}$ s'écrit donc $\sum_{k\geqslant k_0} a_n z^n$ pour un certain $k_0 \in \mathbb{Z}$. On s'intéresse à un opérateur différentiel linéaire de matrice $A(z)$ de taille $n \times n$ qu'on écrit sous la forme $C(z)/z$, où les éléments de $A(z)$ (ou de $C(z)$) sont dans $\widehat{K}$. On considère l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dz}$ comme un opérateur linéaire $\widehat{K}^n \to \widehat{K}^n$. On s'intéresse à l'opérateur linéaire

$$D = z\frac{d}{dz} - C(z) : \widehat{K}^n \longrightarrow \widehat{K}^n.$$

On appelle *réseau de* $\widehat{K}^n$ tout $\mathbb{C}[\![z]\!]$-module E engendré par une $\widehat{K}$-base de $\widehat{K}^n$.

(i) Montrer que si $E \subset F$ sont deux réseaux de $\widehat{K}^n$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $z^\ell F \subset E$. (On travaillera avec des bases.)

(ii) En déduire que pour deux tels réseaux $E \subset F$, le quotient F/E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Le but de cette partie est de montrer que, pour un opérateur D comme ci-dessus, *s'il existe deux réseaux $E \subset F$ tels que $D(E) \subset F$ et que l'application linéaire $D : E \to F$ soit à indice, alors pour tout couple de réseaux $E' \subset F'$ tels que $D(E') \subset F'$, l'application linéaire $D : E' \to F'$ est à indice, et on a :*

$$\text{(P.d)}(*) \qquad \operatorname{Ind}(D; E, F) + \dim F/E = \operatorname{Ind}(D; E', F') + \dim F'/E'.$$

On notera $\operatorname{Irr}(D)$ (irrégularité de D) le nombre $\operatorname{Ind}(D; E, F) + \dim E/F$, s'il existe.

On suppose donc l'existence de $E \subset F$ comme ci-dessus et on se donne deux réseaux emboîtés $E' \subset F'$ tels que $D(E') \subset F'$.

(iii) Montrer qu'il existe deux réseaux $E'' \supset E \cup E'$ et $F'' \supset F \cup F'$ tels que $E'' \subset F''$ et $D(E'') \subset F''$.

(iv) En considérant les applications linéaires

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "D"'] & E'' \arrow[r] \arrow[d, "D"] & E''/E \arrow[d, "D"] \\ F \arrow[r] & F'' \arrow[r] & F''/F \end{tikzcd}$$

et le fait que E''/E et F''/F sont de dimension finie, montrer (P.d)($*$) lorsque E', F' est remplacé par E'', F''.

[Indication : on utilisera P.b(ii) et P.b(iv).]

(v) En raisonnant de manière analogue avec (E', F') et (E'', F''), en déduire (P.d)($*$).

P.e. Un système à singularité régulière est d'irrégularité nulle.

(i) Soit C_0 une matrice carrée triangulaire supérieure, de taille n. Montrer que l'opérateur $z\frac{d}{dz} - C_0 : \mathbb{C}[\![z]\!]^n \to \mathbb{C}[\![z]\!]^n$ est à indice, et qu'il est d'indice nul.

[Indication : On considérera un sous-espace E isomorphe à $\widehat{K}$ dans $F = \widehat{K}^n$ engendré par un vecteur propre de C_0 auquel on appliquera (P.c)($*$), et on utilisera P.b(iv).]

(ii) Soient $C(z)/z$ et $C'(z)/z$ deux matrices définissant des systèmes équivalents, via une matrice $\mathcal{P}(z)$ inversible à éléments dans K (ou $\widehat{K}$). Montrer que si l'opérateur $D = z\frac{d}{dz} - C(z)$ est à indice (sur un couple convenable de réseaux (E,F)), alors $D' = z\frac{d}{dz} - C'(z)$ est aussi à indice sur un couple (E',F') et qu'ils ont même irrégularité : $\mathrm{Irr}(D) = \mathrm{Irr}(D')$.

(iii) En déduire que tout système à singularité régulière $\frac{d}{dz} - C(z)/z$ définit un opérateur $D = z\frac{d}{dz} - C(z)$ à irrégularité bien définie et égale à 0.

P.f. Réciproque : fin de la démonstration. On considère un opérateur Q comme au § (P.c) et l'opérateur $R = \dfrac{1}{c_n(z)}Q$. Soit $C(z)$ la matrice compagnon de R :

$$C(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -\dfrac{c_0}{c_n} & -\dfrac{c_1}{c_n} & -\dfrac{c_2}{c_n} & \cdots & -\dfrac{c_{n-1}}{c_n} \end{pmatrix}$$

On note $E = \mathbb{C}[\![z]\!]^n$ et $F = \mathbb{C}[\![z]\!]^{n-1} \oplus z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!]$.

(i) Montrer que le noyau de l'opérateur $D = z\frac{d}{dz} - C(z) : E \to F$ est formé des vecteurs de la forme $U(z) = \big(u(z), z\frac{d}{dz}u(z), \ldots, (z\frac{d}{dz})^{n-1}u(z)\big)$ tels que $Ru = 0$. En déduire que $\dim \mathrm{Ker}(z\frac{d}{dz} - C(z)) = \dim \mathrm{Ker}[R : \mathbb{C}[\![z]\!] \to z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!]]$.

(ii) Montrer de manière analogue que $\dim\big(F/\mathrm{Im}(D)\big) = \dim\big(z^{-v(c_n)}\mathbb{C}[\![z]\!] / \mathrm{Im}\, R\big)$.

(iii) En conclure que $D : E \to F$ est à indice, que son indice $\mathrm{Ind}(D; E, F)$ est nul et que son irrégularité $\mathrm{Irr}(D)$ est égale à $v(c_n)$.

(iv) Conclure la démonstration de la réciproque : Si P est à singularité régulière, Q aussi, et D aussi, donc l'irrégularité de D est nulle (*cf.* P.e(iii)), et par conséquent $v(c_n) = 0$ d'après la question précédente. Ceci équivaut au fait que Q satisfait au critère de Fuchs (P.a(iv)), et donc P aussi.

P.g. Exemples. Faire les exercices 1.4.10 (qui est en fait contenu dans la partie P.a), 1.4.11 et 1.4.12.

LEÇON 3

29 JANVIER 2010

Résumé. On introduit la notion de fibré vectoriel algébrique sur la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On s'intéresse particulièrement aux fibrés de rang 1 (fibrés en droites).

3.1. La droite projective et ses ouverts de Zariski

La droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On privilégiera deux ouverts, notés U_0 et U_∞ : l'ouvert U_0 est $\mathbb{C} = \mathbb{P}^1 \smallsetminus \{\infty\}$, de coordonnée z, et U_∞ est $\mathbb{P}^1 \smallsetminus \{0\}$, de coordonnée z'.

Définition 3.1.1. Un *ouvert de Zariski* de la droite projective est le complémentaire d'un nombre *fini* de points de $\mathbb{P}^1$.

Ainsi, U_0, U_∞ et $U_0 \cap U_\infty = \mathbb{C}^*$ sont des ouverts de Zariski. À tout ouvert de Zariski U est associé un anneau, noté $\mathscr{O}(U)$ (ou aussi $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(U)$), qu'on appelle *anneau des fonctions régulières* sur U. Par définition, $\mathscr{O}(U)$ est l'anneau des fractions rationnelles en la variable z ont des pôles au plus en les points (en nombre fini) de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$. On rappelle qu'une fraction rationnelle en z à un pôle en ∞ si et seulement si son degré total (degré du numérateur $-$ degré du dénominateur) est > 0. On note $\mathbb{C}(z)$ le corps des fractions rationnelles en z. Ainsi, tous les anneaux $\mathscr{O}(U)$ sont des sous-anneaux de $\mathbb{C}(z)$.

Exemples 3.1.2.

– L'anneau $\mathscr{O}(\mathbb{P}^1)$ est réduit aux constantes.

– L'anneau $\mathscr{O}(U_0)$ est l'anneau $\mathbb{C}[z]$ des polynômes en z.

– Une fraction rationnelle en z de degré $\leqslant 0$ a un pôle en 0 uniquement si et seulement si c'est un polynôme en $1/z$. On identifie donc $\mathscr{O}(U_\infty)$ à l'anneau $\mathbb{C}[z']$.

– Avec cette identification $z' = 1/z$, on a $\mathscr{O}(U_0 \cap U_\infty) = \mathbb{C}[z, z^{-1}] = \mathbb{C}[z', z'^{-1}]$ (anneau des polynômes de Laurent).

Si $U' \subset U$ sont deux ouverts de Zariski emboîtés, alors $\mathscr{O}(U) \subset \mathscr{O}(U')$. (On dit que le foncteur qui associe à tout ouvert de Zariski U son anneau de fonctions régulières $\mathscr{O}(U)$ est *contravariant*.)

Exercice 3.1.3. Soient U et V deux ouverts de Zariski de $\mathbb{P}^1$.

(1) Montrer que $\mathscr{O}(U \cup V) = \mathscr{O}(U) \cap \mathscr{O}(V)$ (intersection prise dans $\mathbb{C}(z)$) ; on interprétera aussi $\mathscr{O}(U \cup V)$ comme le noyau de l'application $\mathbb{C}$-linéaire

$$\begin{aligned} \mathscr{O}(U) \oplus \mathscr{O}(V) &\longrightarrow \mathbb{C}(z) \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \varphi - \psi. \end{aligned}$$

(2) Montrer que $\mathscr{O}(U \cap V) = \mathscr{O}(U) + \mathscr{O}(V)$ (somme des espaces prise dans $\mathbb{C}(z)$) ; on interprétera aussi $\mathscr{O}(U \cap V)$ comme l'image de l'application ci-dessus.

(3) En conclure qu'on a une *suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(U \cup V) \longrightarrow \mathscr{O}(U) \oplus \mathscr{O}(V) \longrightarrow \mathscr{O}(U \cap V) \longrightarrow 0$$

(c'est-à-dire que le noyau de toute flèche est égal à l'image de la précédente).

(4) Appliquer ceci à $U = U_0$ et $V = U_\infty$.

3.2. Fibrés vectoriels sur la droite projective

Soit U un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^1$ *distinct de* $\mathbb{P}^1$, d'anneau $\mathscr{O}(U)$. On appelle *fibré vectoriel algébrique de rang n sur U* un $\mathscr{O}(U)$-module libre $\mathscr{E}(U)$ de rang fini n. Autrement dit, $\mathscr{E}(U)$ admet une base $e_1, \dots, e_n$ sur $\mathscr{O}(U)$, et tout élément de $\mathscr{E}(U)$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i=1}^n a_i(z)e_i$ avec $a_i \in \mathscr{O}(U)$. Les changements de base sont des matrices inversibles à coefficients dans $\mathscr{O}(U)$ ainsi que leur inverse, c'est-à-dire des matrices à coefficients dans $\mathscr{O}(U)$ dont le déterminant (qui est aussi un élément de $\mathscr{O}(U)$) ne s'annule pas sur U.

Un *homomorphisme* de fibrés vectoriels algébriques sur U est une application $\mathscr{O}(U)$-linéaire $f_U : \mathscr{E}(U) \to \mathscr{F}(U)$. Si on choisit des bases $e_1, \dots, e_n$ et $f_1, \dots, f_m$, un tel homomorphisme est déterminé par sa matrice $m \times n$ à coefficients dans $\mathscr{O}(U)$. Cette matrice se comporte *via* les formules usuelles par un changement de base de $\mathscr{E}(U)$ ou de $\mathscr{F}(U)$. Un homomorphisme est un isomorphisme si $m = n$ et une (ou toute) matrice est inversible, d'inverse à coefficients dans $\mathscr{O}(U)$ (*i.e.* le déterminant ne s'annule pas sur U).

Soient $U' \subset U$ deux ouverts de Zariski emboîtés. Alors $\mathscr{O}(U) \subset \mathscr{O}(U')$ et en particulier $\mathscr{O}(U')$ est un module sur $\mathscr{O}(U)$. Si $\mathscr{E}(U)$ est un fibré vectoriel algébrique sur U, on obtient un fibré vectoriel sur U', noté $\mathscr{E}(U')$, par la formule

$$\mathscr{E}(U') = \mathscr{O}(U') \otimes_{\mathscr{O}(U)} \mathscr{E}(U).$$

Concrètement, si $e_1, \dots, e_n$ est une base de $\mathscr{E}(U)$, permettant d'identifier $\mathscr{E}(U)$ au $\mathscr{O}(U)$-sous-module $\mathscr{O}(U)^n$ de $\mathbb{C}(z)^n$, alors $\mathscr{E}(U')$ est le $\mathscr{O}(U')$-sous-module de $\mathbb{C}(z)^n$ engendré par $e_1, \dots, e_n$, isomorphe à $\mathscr{O}(U')^n$. Si $f_U : \mathscr{E}(U) \to \mathscr{F}(U)$ est un homomorphisme, alors f_U détermine un unique homomorphisme $f_{U'} : \mathscr{E}(U') \to \mathscr{F}(U')$ (dans les bases correspondantes, la matrice de $f_{U'}$ est égale à celle de f_U).

Définition 3.2.1.

– Un fibré vectoriel algébrique $\mathscr{E}$ de rang n sur la droite projective complexe $\mathbb{P}^1$ consiste en la donnée

(1) d'un fibré vectoriel algébrique $E_0 = \mathscr{E}_0(U_0)$ de rang n sur U_0, donc isomorphe à $\mathbb{C}[z]^n$,

(2) d'un fibré vectoriel algébrique $E_\infty = \mathscr{E}_\infty(U_\infty)$ de rang n sur U_∞, donc isomorphe à $\mathbb{C}[z']^n$

(3) et d'un isomorphisme $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$-linéaire $\psi_{0\infty} : \mathscr{E}_0(U_0 \cap U_\infty) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_\infty(U_0 \cap U_\infty)$.

– Un homomorphisme $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ de fibrés sur $\mathbb{P}^1$ (avec $\mathscr{E} = (E_0, E_\infty, \psi_{0\infty})$ et $\mathscr{F} = (F_0, F_\infty, \phi_{0\infty})$) consiste en la donnée de deux homomorphismes

$$f_0 : E_0 \longrightarrow F_0 \quad (\mathbb{C}[z]\text{-linéaire})$$
$$f_\infty : E_\infty \longrightarrow F_\infty \quad (\mathbb{C}[z']\text{-linéaire})$$

tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}_0(U_0 \cap U_\infty) \arrow[r, "\psi_{0\infty}"] \arrow[d, "f_0"'] & \mathscr{E}_\infty(U_0 \cap U_\infty) \arrow[d, "f_\infty"] \\
\mathscr{F}_0(U_0 \cap U_\infty) \arrow[r, "\phi_{0\infty}"] & \mathscr{F}_\infty(U_0 \cap U_\infty)
\end{tikzcd}$$

On note $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des homomorphismes f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

On peut décrire, à isomorphisme près, un fibré de rang n par une matrice $\Psi_{0\infty} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$, appelée *cocycle du fibré*. Pour cela, choisissons des bases $\boldsymbol{e}_0$ de E_0 et $\boldsymbol{e}_\infty$ de E_∞, qui déterminent des bases de $\mathscr{E}_0(U_0 \cap U_\infty)$ et $\mathscr{E}_\infty(U_0 \cap U_\infty)$. La matrice Ψ dans ces bases, c'est-à-dire la matrice Ψ telle que $\Psi_{0\infty}(\boldsymbol{e}_0) = \boldsymbol{e}_\infty \cdot \Psi$, est à éléments dans $\mathscr{O}(U_0 \cap U_\infty) = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ ainsi que son inverse.

De même, si $f = (f_0, f_\infty)$ est un homomorphisme, on note M_0 la matrice de f_0 dans des bases $\boldsymbol{e}_0$ de E_0 et $\widetilde{\boldsymbol{e}}_0$ de F_0, et de même pour M_∞. Alors on a $\Phi M_0 = M_\infty \Psi$.

Exercice 3.2.2. Montrer qu'un polynôme de Laurent non nul admet pour inverse dans $\mathbb{C}(z)$ un polynôme de Laurent si et seulement s'il est de la forme $c \cdot z^k$, avec $c \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ et $k \in \mathbb{Z}$. En déduire que dét $\Psi_{0\infty} = cz^k$ pour un certain $c \neq 0$ et un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, étant donnée une telle matrice Ψ, on reconstruit un fibré en posant $E_0 = \mathbb{C}[z]^n$ (équipé de sa base canonique $\boldsymbol{e}_0$ sur $\mathbb{C}[z]$) et $E_\infty = \mathbb{C}[z']^n$ (équipé de sa base canonique $\boldsymbol{e}_\infty$ sur $\mathbb{C}[z']$) et en définissant $\Psi_{0\infty}$ par sa valeur sur la base $\boldsymbol{e}_0$: $\Psi_{0\infty}(\boldsymbol{e}_0) = \boldsymbol{e}_\infty \cdot \Psi$. De manière analogue, deux matrices M_0, M_∞ telles que $M_\infty = \Phi M_0 \Psi^{-1}$ déterminent un homomorphisme de fibrés.

Lemme 3.2.3.

– *Tout fibré vectoriel de rang n sur $\mathbb{P}^1$ est isomorphe à un fibré du type $(\mathbb{C}[z]^n, \mathbb{C}[z']^n, \Psi_{0\infty})$.*

– *Un morphisme $(\mathbb{C}[z]^n, \mathbb{C}[z']^n, \Psi_{0\infty}) \to (\mathbb{C}[z]^m, \mathbb{C}[z']^m, \Phi_{0\infty})$ consiste en la donnée d'une matrice $P \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{C}[z])$, d'une matrice $Q \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{C}[z'])$, telles que $\Phi_{0\infty} \circ P = Q \circ \Psi_{0\infty}$.*

– *Deux fibrés* $(\mathbb{C}[z]^n, \mathbb{C}[z']^n, \Psi_{0\infty})$ *et* $(\mathbb{C}[z]^n, \mathbb{C}[z']^n, \Phi_{0\infty})$ *sont isomorphes si et seulement si il existe deux matrices* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z])$ *(i.e.* $\text{dét}\, P$ *est un polynôme en* z *qui ne s'annule pas, donc une constante non nulle) et* $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z'])$ *(i.e.* $\text{dét}\, Q$ *est une constante non nulle) telles que* $\Phi_{0\infty} \cdot P = Q \cdot \Psi_{0\infty}$.

Démonstration. Le premier point est obtenu en prenant une base de E_0 et une base de E_∞. Les deux autres points sont des conséquences immédiates. □

3.3. Noyau et image d'un homomorphisme de fibrés vectoriels

Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une homomorphisme de fibrés vectoriels. Dans une présentation $\mathscr{E} = (\mathbb{C}[z]^n, \mathbb{C}[z']^n, \Psi)$ et $\mathscr{F} = (\mathbb{C}[z]^m, \mathbb{C}[z']^m, \Phi)$, on a donc $f = (f_0, f_\infty)$. On note $N_0 = \operatorname{Ker} f_0 \subset \mathbb{C}[z]^n$ et $N_\infty = \operatorname{Ker} f_\infty \subset \mathbb{C}[z']^n$ et, de manière analogue, $M_0 = \operatorname{Im} f_0 \subset \mathbb{C}[z]^m$ et $M_\infty = \operatorname{Im} f_\infty \subset \mathbb{C}[z]^m$.

Lemme 3.3.1*. Les* $\mathbb{C}[z]$*-modules* N_0, M_0 *sont libres, tout comme le sont les* $\mathbb{C}[z']$*-modules* N_∞, M_∞.

Ceci provient de résultats généraux sur les anneaux principaux intègres, et plus précisément du lemme 3.3.3 ci-dessous. On rappelle que l'anneau A des polynômes d'une variable à coefficients dans un corps est *principal* car euclidien. De plus, il est *intègre*, c'est-à-dire sans diviseur de zéro :

$$\forall\, \alpha, \beta \in A, \quad \alpha\beta = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0.$$

Lemme 3.3.2*. Soit* A *un anneau et* M *un* A*-module. Soit* e *un élément de* M *et* $p : M \to A$ *une application* A*-linéaire tels que* $p(e) = 1$. *Alors les sous-modules* Ae *et* $\operatorname{Ker} p$ *de* M *sont en somme directe.*

Démonstration. On écrit tout élément x de M sous la forme $x = p(x)e + (x - p(x)e)$ pour obtenir la décomposition $M = Ae + \operatorname{Ker} p$. Si $x \in Ae$, on a $x = p(x)e$. Si $x \in Ae \cap \operatorname{Ker} p$, on a donc $x = 0$, d'où la somme directe. □

Lemme 3.3.3*. Soit* A *un anneau principal intègre et* M *un* A*-module libre de rang fini* n. *Alors tout sous-module* M' *de* M *est libre de rang fini* $\leqslant n$.

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est facile : un A-module libre de rang 1 est isomorphe à l'anneau A lui-même, et un sous-module n'est autre qu'un idéal de A ; mais justement, l'anneau est principal, donc l'idéal est engendré par un élément a, et on a une application A-linéaire surjective $A \to Aa \subset M$. Il reste à voir qu'elle est injective, ce qui vient de la propriété d'intégrité.

Soit maintenant $n \geqslant 2$. On fixe une base $e_1, \ldots, e_n$ de M, et on note M_{n-1} le module libre de rang $n-1$ engendré par $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Si $M' \subset M_{n-1}$, on a terminé par récurrence. Sinon, on pose $M'_{n-1} = M' \cap M_{n-1}$, qui est libre de rang $\leqslant n-1$ par récurrence. Soit $q : M' \to A$ défini par $q(a_1e_1 + \cdots + a_ne_n) = a_n$. On a donc $M'_{n-1} = \operatorname{Ker} q$, et $q(M')$ est un idéal non nul de A, engendré par un élément $a \in A$. Soit $e \in M'$ tel que $q(e) = a$. Composant avec la bijection linéaire inverse de $A \to Aa$, on obtient une application linéaire $p : M' \to A$ telle que $p(e) = 1$. On déduit du lemme 3.3.2 que $M' = Ae \oplus M'_{n-1}$, qui est donc libre de rang $\leqslant n$. □

Proposition 3.3.4. *Le noyau et l'image d'un homomorphisme de fibrés vectoriels sur* $\mathbb{P}^1$ *sont des fibrés vectoriels sur* $\mathbb{P}^1$.

Démonstration. On va montrer le lemme dans le cas du noyau. Celui de l'image se traite de manière identique. Le lemme 3.3.3 nous dit que $N_0 \simeq \mathbb{C}[z]^{n'_0}$ avec $n'_0 \leqslant n$, et $N_\infty \simeq \mathbb{C}[z]^{n'_\infty}$ avec $n'_\infty \leqslant n$. On a donc $\widetilde{N}_0 \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[z]} N_0 \simeq \mathbb{C}[z, z^{-1}]^{n'_0}$, et un résultat analogue pour N_∞. Mais, utilisant le diagramme de la définition 3.2.1, on voit que $\psi_{0\infty}$ induit un isomorphisme de $\widetilde{N}_0$ sur $\widetilde{N}_\infty$. Par conséquent, $n'_0 = n'_\infty = n'$ et $(N_0, N_\infty, \psi_{0\infty}\big|_{\widetilde{N}_0})$ est un fibré vectoriel de rang $n' \leqslant n$. □

3.4. Sections globales d'un fibré vectoriel algébrique

Définition 3.4.1. Une *section globale* s d'un fibré $\mathscr{E}$ est un couple (s_0, s_∞), avec $s_0 \in E_0$, $s_\infty \in E_\infty$ tels que $s_{\infty|U_0 \cap U_\infty} = \psi_{0\infty}(s_{0|U_0 \cap U_\infty})$. On note $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des sections globales de $\mathscr{E}$.

Ainsi, une section globale du fibré $(\mathbb{C}[z]^n, \mathbb{C}[z']^n, \Psi_{0\infty})$ consiste en la donnée de $s_0 \in \mathbb{C}[z]^n$ et $s_\infty \in \mathbb{C}[z']^n$ tels que $s_\infty = \Psi_{0\infty} s_0$ dans $\mathbb{C}[z, z^{-1}]^n$. Il revient au même de se donner un vecteur $s_0 \in \mathbb{C}[z]^n$ tel que le vecteur $\Psi_{0\infty} s_0$ de $\mathbb{C}[z, z^{-1}]^n$ soit contenu dans $\mathbb{C}[z^{-1}]^n$.

On notera désormais Ψ au lieu de $\Psi_{0\infty}$. Soit $s = (s_0, s_\infty)$ une section globale de $\mathscr{E}$. On dit que $z^o \in \mathbb{C}$ est un zéro de s de multiplicité $k \geqslant 1$ si on peut écrire $s_0(z) = (z - z^o)^k \sigma(z)$ avec $\sigma(z) \in \mathbb{C}[z]^n$ et $\sigma_0(z^o) \neq 0$. Autrement dit, toutes les composantes du vecteur s_0 s'annulent en z^o et k est la multiplicité minimale des composantes de s_0 en z^o. On dira enfin que ∞ est un zéro de s de multiplicité k si $s_\infty(z')$ s'annule à l'ordre k exactement en $z' = 0$.

Les zéros de s autres que 0 et ∞ peuvent se lire sur s_0 ou sur s_∞. En effet, si $z^o \neq 0$, alors z^o est un zéro d'ordre k de s_0 si et seulement si $z'^o = 1/z^o$ est un zéro d'ordre k de $s_\infty(z')$. En effet, il s'agit de voir que Ψs_0 s'annule en z^o à l'ordre k exactement. On a $\Psi s_0 = (z - z^o)^k \Psi \sigma_0$. De plus, $(\Psi\sigma_0)(z^o) \neq 0$: en effet, $\Psi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$, on a $\text{dét}\, \Psi = cz^k$ pour un certain $c \neq 0$ et un certain $k \in \mathbb{Z}$ (exercice 3.2.2), donc $\text{dét}\, \psi(z^o) = c(z^o)^k \neq 0$ puisque $z^o \in \mathbb{C}^*$; ainsi, $\Psi(z^o) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et l'assertion se déduit du fait que $\sigma^o(z^o) \neq 0$.

Soit s une section globale de $\mathscr{E}$. Il existe alors des nombres complexes $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}^*$ et des entiers $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_r, \nu_\infty$ tels que $0, z_1, \dots, z_r, \infty$ soient les zéros de s, avec multiplicités respectives $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_r, \nu_\infty$ (on posera $\nu_i = 0$ si z_i, ou 0, ou ∞, n'est pas un zéro).

***Exercice 3.4.2* (Fibré dual).** Définir la notion de fibré dual et montrer que les sections globales du fibré dual de $\mathscr{E}$ s'identifient à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}}(\mathscr{E}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1})$.

Proposition 3.4.3. *Soit s une section globale de $\mathscr{E}$, s'annulant au plus en $0, z_1, \dots, z_r, \infty$ avec multiplicités $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_r, \nu_\infty$. Il existe alors une section globale σ de $\mathscr{E}$ s'annulant en ∞ au plus, avec multiplicité $\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_r + \nu_\infty$.*

Démonstration. On peut écrire $s_0(z) = z^{\nu_0} f(z)\sigma_0(z)$, où $f(z) \overset{\text{déf}}{=} (z-z_1)^{\nu_1} \cdots (z-z_r)^{\nu_r}$ avec $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}^*$, et $\sigma_0(z) \in \mathbb{C}[z]^n$ ne s'annule en aucun $z^o \in \mathbb{C}$, autrement dit les composantes de $\sigma_0(z)$ n'ont pas de zéro commun.

De même, $s_\infty(z') = z'^{\nu_\infty} g(z')\sigma_\infty(z')$, où $g(z') \overset{\text{déf}}{=} (z' - z'_1)^{\nu'_1} \cdots (z' - z'_r)^{\nu'_r}$. On a vu ci-dessus que, pour $i = 1, \dots, r$, on a $z'_i = 1/z_i$ et $\nu'_i = \nu_i$.

Montrons que $\big(\sigma_0, \big(\prod_{i=1}^r (-z_i)^{-\nu_i}\big) z'^{\nu_0+\cdots+\nu_r}\sigma_\infty\big)$ est une section du type voulu. On a

$$\Psi\sigma_0 = \frac{1}{z^{\nu_0} f(z)}\, s_\infty(z') = z'^{(\nu_0+\nu_\infty)}\, \frac{g(z')}{f(z)}\, \sigma_\infty(z') = \Big(\prod_{i=1}^r (-z_i)^{-\nu_i}\Big) z'^{\nu_0+\cdots+\nu_r}\sigma_\infty(z'),$$

d'où la propriété de section. De plus, par construction de σ_0, cette section n'a pas de zéro sur $\mathbb{C}$. Ses zéros sont réduits à ∞, et la multiplicité est bien celle attendue, puisque $\sigma_\infty(0) \neq 0$ par hypothèse. $\square$

3.5. Fibrés en droites

On appelle *fibré en droites sur* $\mathbb{P}^1$ un fibré vectoriel algébrique de rang $n = 1$. Un tel fibré est isomorphe à un fibré de la forme $(\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[z'], \Psi)$ où Ψ est un polynôme de Laurent non nul à inverse dans $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$, donc est de la forme cz^k, avec $c \neq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$. De plus, la multiplication par c sur l'un des facteurs montre que le fibré est isomorphe à $(\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[z'], z^k)$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Enfin, deux fibrés $(\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[z'], z^k)$ ne sont pas isomorphes si $k \neq \ell$. On note $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-k)$ le fibré $(\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[z'], z^k)$. On note aussi $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$ le fibré $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(0)$.

Lemme 3.5.1.

(1) *On a* $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)) \neq 0$ *si et seulement si* $\ell \geqslant 0$ *et dans ce cas cet espace est de dimension* $\ell + 1$.

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k), \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell - k)) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell - k)))$. *Par conséquent, si* $k \geqslant \ell$, *le seul homomorphisme de* $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ *vers* $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$ *est l'homomorphisme nul.*

Démonstration.

(1) Une section de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$ consiste en la donnée de $s_0(z) \in \mathbb{C}[z]$ tel que $z^{-\ell}s_0(z) \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ soit un polynôme en $z' = z^{-1}$. Si on écrit $z^{-\ell}s_0(z) = z'^{\ell}s_0(1/z')$, on voit qu'il est nécessaire que $\ell \geqslant 0$ pour avoir une solution non nulle. Dans ce cas, toutes les solutions sont obtenues pour $s_0(z)$ de degré $\leqslant \ell$, d'où un espace de dimension $\ell + 1$. On retiendra de cette démonstration l'identification de $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell))$ avec l'espace des polynômes de degré $\leqslant \ell$ lorsque $\ell \geqslant 0$.

(2) Un homomorphisme (f_0, f_∞) de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ vers $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$ consiste en la donnée de $f_0 \in \mathbb{C}[z]$ et $f_\infty \in \mathbb{C}[z']$ tels qu'on ait, dans $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ l'égalité $z^{-\ell}f_0(z) = z^{-k}f_\infty(z')$. On écrit ceci sous la forme $z^{k-\ell}f_0(z) = f_\infty(z')$ pour constater la première égalité (c'est-à-dire qu'on peut remplacer k par 0 et ℓ par $\ell - k$ sans changer (f_0, f_∞)). On applique la définition d'une section pour obtenir la seconde égalité. $\square$

Exercice 3.5.2.

(1) Montrer que, si $k \leqslant \ell$, l'application $(s_0, s_\infty) \mapsto (z^{\ell-k}s_0, s_\infty)$ induit une injection $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)) \hookrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell))$.

(2) Décrire les homomorphismes de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ dans $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$.

***Exemple 3.5.3* (Le fibré tangent).** On a vu au § 1.2 que, sur $\mathbb{C}^*$, $\frac{d}{dz} = -z^{-2}\frac{d}{dz'}$. Le fibré tangent de $\mathbb{P}^1$ est le fibré décrit par $(\mathbb{C}[z]\frac{d}{dz}, \mathbb{C}[z']\frac{d}{dz'}, \psi)$ avec $\psi : \mathbb{C}[z, z^{-1}]\frac{d}{dz} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[z', z'^{-1}]\frac{d}{dz'}$ donné par la formule $\psi(\frac{d}{dz}) = -z^{-2}\frac{d}{dz'}$. Ainsi, le fibré tangent est isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$. Il admet trois sections globales indépendantes qu'on écrit sous la forme (s_0, s_∞), à savoir

$$\Big(\frac{d}{dz}, -z'^2\frac{d}{dz'}\Big), \quad \Big(z\frac{d}{dz}, -z'\frac{d}{dz'}\Big), \quad \Big(z^2\frac{d}{dz}, -\frac{d}{dz'}\Big).$$

***Exemple 3.5.4* (Le fibré cotangent).** C'est le fibré dual, qu'on notera $\Omega^1_{\mathbb{P}^1}$. Il est donné par $(\mathbb{C}[z]dz, \mathbb{C}[z']dz', \phi)$. Sur $\mathbb{C}^*$ on écrit $dz' = d(1/z) = -dz/z^2$. On pose donc $\phi(dz) = -z^2\, dz'$, et on a $\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$. On retiendra qu'il n'existe pas de forme différentielle algébrique globale non nulle sur $\mathbb{P}^1$.

LEÇON 4

5 FÉVRIER 2010

Résumé. La question qui nous préoccupe dans cette leçon est la classification des fibrés vectoriels à isomorphisme près. On cherche donc les formes les plus simples des matrices $\Psi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$ modulo l'équivalence $\Psi \sim Q\Psi P^{-1}$, où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z])$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z'])$. Le résultat principal est le théorème de Birkhoff-Grothendieck, qui donne une classification simple.

4.1. Sous-fibrés, fibrés quotients

Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux fibrés vectoriels algébriques de rang n et n' respectivement. On dit que $\mathscr{E}'$ est un sous-fibré de $\mathscr{E}$ si on peut trouver des présentations $\mathscr{E} \simeq (\mathbb{C}[z]^n, \mathbb{C}[z']^n, \Psi)$ et $\mathscr{E}' \simeq (\mathbb{C}[z]^{n'}, \mathbb{C}[z']^{n'}, \Psi')$ telles que la matrice Ψ ait la forme triangulaire supérieure par blocs :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi' & \Xi \\ 0 & \Psi'' \end{pmatrix}.$$

On a alors $n = n' + n''$, Ψ' et Ψ'' sont respectivement dans $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$ et $\mathrm{GL}_{n''}(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$, et Ψ'' définit un fibré $\mathscr{E}''$ de rang n'', appelé fibré quotient de $\mathscr{E}$ par $\mathscr{E}'$. On dit alors que $\mathscr{E}$ est extension de $\mathscr{E}''$ par $\mathscr{E}'$.

Remarque 4.1.1. Il ne faut pas confondre le fait que $\mathscr{E}'$ est un sous-fibré vectoriel de $\mathscr{E}$ et le fait qu'il existe un homomorphisme injectif de $\mathscr{E}'$ dans $\mathscr{E}$. La première assertion est plus forte que la seconde. En effet, si $\mathscr{E}'$ est un sous-fibré vectoriel de $\mathscr{E}$, on a un homomorphisme injectif donné par les inclusions naturelles $\mathbb{C}[z]^{n'} \hookrightarrow \mathbb{C}[z]^n = \mathbb{C}[z]^{n'} \oplus \mathbb{C}[z]^{n''}$ et $\mathbb{C}[z']^{n'} \hookrightarrow \mathbb{C}[z']^n = \mathbb{C}[z']^{n'} \oplus \mathbb{C}[z']^{n''}$, et la commutativité du diagramme de la définition 3.2.1 provient de la forme triangulaire de Ψ.

Réciproquement, il existe des homomorphismes injectifs qui ne donnent pas lieu à des sous-fibrés. Par exemple, si $k < \ell$, on a un homomorphisme injectif $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \hookrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$ qui n'est pas bijectif. Il n'est donc pas possible de mettre sa matrice sous la forme donnée plus haut, puisqu'on n'a pas $\Psi = \Psi'$.

Fixons maintenant deux fibrés vectoriels algébriques $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$. On dit que deux extensions $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ de $\mathscr{E}''$ par $\mathscr{E}'$ sont *isomorphes* (en tant qu'extensions) si il existe deux matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z])$, $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z^{-1}])$ *triangulaires supérieures par blocs et de diagonale l'identité* :

$$P = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & p \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & q \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

telles que $\Psi_2 = Q\Psi_1 P^{-1}$.

Remarque 4.1.2. Il se peut que deux fibrés vectoriels $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$, chacun extension de $\mathscr{E}''$ par $\mathscr{E}'$, soient isomorphes comme fibrés vectoriels mais pas comme extension. Autrement dit, il se peut que Ψ_1 soit équivalente à Ψ_2, mais pas par des matrices P et Q triangulaires supérieures par blocs. On en verra des exemples à l'exercice 4.1.8.

Définition 4.1.3. On dit qu'une extension $\mathscr{E}$ de $\mathscr{E}''$ par $\mathscr{E}'$ est *scindable* si elle est isomorphe à l'extension dite *somme directe*, définie par une matrice diagonale par blocs.

Exercice 4.1.4.

(1) Montrer que toutes les extensions de $\mathscr{E}''$ par $\mathscr{E}'$ qui sont sommes directes sont isomorphes comme extensions.

(2) Montrer que $\mathscr{E}$ est extension de $\mathscr{E}''$ par $\mathscr{E}'$ si et seulement si il existe un homomorphisme injectif de $\mathscr{E}'$ dans $\mathscr{E}$, un homomorphisme surjectif de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}''$ tel que l'image du premier soit égale au noyau du second. On dit alors qu'on a une *suite exacte* de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'' \longrightarrow 0.$$

(3) Montrer qu'une extension $\mathscr{E}$ est scindable si et seulement si il existe un homomorphisme $\sigma : \mathscr{E}'' \to \mathscr{E}$ dont le composé avec $\mathscr{E} \to \mathscr{E}''$ est l'identité de $\mathscr{E}''$. On dit que σ une *scission de l'extension*. Montrer que σ est un homomorphisme injectif.

Proposition 4.1.5. *Supposons que le fibré $\mathscr{E}$ admette une section s partout non nulle. Alors le fibré $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$ (trivial de rang 1) est un sous-fibré de $\mathscr{E}$.*

Nous aurons besoin d'utiliser le résultat suivant.

Proposition 4.1.6. *Soit $s_0 \in \mathbb{C}[z]^n$ un élément qui ne s'annule pas (i.e. les composantes de s_0 ne s'annulent pas simultanément). Il existe alors une base de $\mathbb{C}[z]^n$ dont le premier élément est s_0.*

Démonstration. Puisque le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, si $s_0^{(1)}, \dots, s_0^{(n)}$ est une famille de polynômes qui ne s'annulent pas simultanément, il existe, d'après Bézout, une famille de polynômes $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[z]$ tels que $\sum_{i=1}^n p_i s_0^{(i)} = 1$. On applique le lemme 3.3.2 à $M = \mathbb{C}[z]^n$ et $e = s_0$. Dans la base canonique, on écrit tout élément x de M sous la forme d'un vecteur de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ et on pose $p(x) = \sum_i p_i x_i \in \mathbb{C}[z]$. Par définition, on a $p(s_0) = 1$. On en déduit que $\mathbb{C}[z]^n = \mathbb{C}[z]s_0 \oplus \operatorname{Ker} p$. Il reste à utiliser le lemme 3.3.3 et le fait que l'anneau des polynômes est principal et intègre (*i.e.* sans diviseur de 0) pour voir que les deux facteurs sont libres sur $\mathbb{C}[z]$ et conclure. $\square$

Démonstration de la proposition 4.1.5. Soit donc $s = (s_0, s_\infty)$ une section de $\mathscr{E} = (\mathbb{C}[z]^n, \mathbb{C}[z']^n, \Psi)$ qui ne s'annule pas. On peut, d'après la proposition précédente, choisir une base de $\mathbb{C}[z]^n$ dont le premier élément est s_0, et même chose pour $\mathbb{C}[z']^n$ et s_∞. Par hypothèse, $\Psi s_0 = s_\infty$, donc la matrice de Ψ dans ces bases a la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \Xi \\ 0 & \Psi'' \end{pmatrix},$$

comme voulu. □

Définition 4.1.7. Soit k un entier. On note $H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k))$ l'espace vectoriel quotient de $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ par le sous-espace des polynômes de Laurent qui peuvent s'écrire sous la forme $q(z^{-1}) - z^{-k}p(z)$, avec $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ et $q(z') \in \mathbb{C}[z']$.

On voit donc que $H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)) = 0$ si $k \geqslant -1$ et $\dim H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)) = |k| - 1$ pour $k \leqslant -2$.

***Exercice 4.1.8* (Extensions de fibrés en droites).** Soient k et ℓ deux entiers.

(1) Montrer que toute extension $\mathscr{E}$ de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$ par $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ est un fibré vectoriel de rang 2 qui admet une présentation $(\mathbb{C}[z]^2, \mathbb{C}[z']^2, \Psi)$, où Ψ est une matrice triangulaire supérieure du type

$$\Psi = \begin{pmatrix} z^{-k} & \psi \\ 0 & z^{-\ell} \end{pmatrix},$$

avec $\psi \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$.

(2) Montrer que ψ_1 et $\psi_2 \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ donnent lieu à deux extensions isomorphes de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$ par $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ si et seulement s'il existe $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ et $q(z') \in \mathbb{C}[z']$ tels que $\psi_2 = \psi_1 + z^{-\ell}q(z^{-1}) + z^{-k}p(z)$ dans $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$.

(3) En déduire que les classes d'isomorphisme d'extensions de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$ par $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ sont en bijection avec les éléments de $H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k - \ell))$.

(4) Vérifier que, *via* cette bijection, l'élément nul de $H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k - \ell))$ correspond à l'extension somme directe $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$ et donc que les autres éléments de $H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k - \ell))$ définissent des extensions *non scindables*.

(5) Montrer que l'espace des extensions de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ par $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ est de dimension 1 et que les classes d'extension sont déterminées par la matrice $\Phi = \left(\begin{smallmatrix} z & \phi \\ 0 & z^{-1} \end{smallmatrix}\right)$, où $\phi \in \mathbb{C}$.

(6) Montrer que si $\phi \neq 0$, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}[z])$ et une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}[z^{-1}]$ telles que

$$\begin{pmatrix} z & \phi \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \cdot P = Q.$$

En déduire que le fibré $\mathscr{E}_\phi$ correspondant est trivial, c'est-à-dire isomorphe au fibré $(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1})^2$ (et on notera que pour $\phi = 0$, le fibré $\mathscr{E}_\phi$ est isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$).

(7) En déduire qu'on obtient des exemples indiqués à la remarque 4.1.2.

Voyons maintenant le comportement des sections globales dans les extensions. Soit donc $\mathscr{E}$ une extension de $\mathscr{E}''$ par $\mathscr{E}'$. Toute section globale $s = (s_0, s_\infty)$ de $\mathscr{E}$ se décompose en $s = s' + s''$, où s'_0 est la composante de s_0 sur $\mathbb{C}[z]^{n'}$, s''_0 celle de s_0 sur $\mathbb{C}[z]^{n''}$, et même chose pour s_∞. On a $s'_\infty = \Psi' s'_0 + \Xi s''0$ et $s''_\infty = \Psi'' s''_0$, de sorte que s'' une section globale de $\mathscr{E}''$. De même, si s' est une section globale de $\mathscr{E}'$, alors $s' \oplus 0$ est une section globale de $\mathscr{E}$. On obtient ainsi deux applications linéaires

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}') &\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}), & \qquad H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}) &\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}'') \\ s' &\longmapsto s' + 0, & s &\longmapsto s''. \end{aligned}$$

La première application est clairement injective. De plus, le noyau de la seconde est égal à l'image de la première. Autrement dit, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}') \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}'').$$

La dernière application n'est pas nécessairement surjective. Nous utiliserons un cas particulier elle l'est.

Lemme 4.1.9. *Si $\mathscr{E}' = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ avec $k \geqslant -1$, alors l'application $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}) \to H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}'')$ est surjective. Si $k = -1$ elle est bijective*

Démonstration. Le second point se déduit du premier puisque, si $k = -1$, $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0$, donc l'application $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}) \to H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}'')$ est injective.

Revenons donc au premier point. Soit $s'' = (s''_0, s''_\infty)$ une section globale de $\mathscr{E}''$. La matrice Ψ d'une présentation de $\mathscr{E}$ a la forme

$$\Psi = \begin{pmatrix} z^{-k} & \Xi \\ 0 & \Psi'' \end{pmatrix}$$

où Ξ est une matrice ligne. Par hypothèse, $s''_\infty = \Psi'' s_0$. Si s'' admet un relèvement $s = s' + s''$, on doit avoir $s_\infty = \Psi s_0$, ce qui revient maintenant à $s'_\infty = z^{-k} s'_0 + \Xi s''_0$ et bien sûr $s'_0 \in \mathbb{C}[z]$, $s'_\infty \in \mathbb{C}[z']$. Mais il est clair qu'étant donné $\Xi s''_0 \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, on peut toujours trouver $s'_0 \in \mathbb{C}[z]$ et $s'_\infty \in \mathbb{C}[z']$ tels que $\Xi s''_0 = s'_\infty - z^{-k} s_0$ puisque $-k \leqslant 1$, d'où la surjectivité. $\square$

4.2. Le théorème de classification de Birkhoff-Grothendieck

***Théorème 4.2.1* (de Birkhoff-Grothendieck).** *Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel de rang n sur $\mathbb{P}^1$. Il existe alors une unique suite d'entiers $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ telle que l'on ait un isomorphisme*

$$\mathscr{E} \simeq \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_n).$$

On dit que la suite $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ est le *type* du fibré $\mathscr{E}$. On en déduit :

Corollaire 4.2.2. *Soit Ψ une matrice inversible $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Il existe alors deux matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z])$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z'])$ telles que la matrice $Q\Psi P^{-1}$ soit égale à une matrice diagonale d'éléments diagonaux $z^{a_1}, \dots, z^{a_n}$, où la suite d'entiers $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ ne dépend que de Ψ.* $\square$

Avant de passer à la démonstration, nous allons introduire une notation utile. Si $\mathscr{E}$ est un fibré vectoriel algébrique sur $\mathbb{P}^1$ et si k est un entier, on note $\mathscr{E}(k)$ le fibré $\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$. Si $(\mathbb{C}[z]^n, \mathbb{C}[z']^n, \Psi)$ est une présentation du fibré $\mathscr{E}$, alors, par définition du produit tensoriel, $(\mathbb{C}[z]^n, \mathbb{C}[z']^n, z^{-k}\Psi)$ est une présentation de $\mathscr{E}(k)$. Par exemple, si $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$, alors $\mathscr{E}(k) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell + k)$.

Proposition 4.2.3. *Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel algébrique sur $\mathbb{P}^1$. Il existe un unique entier k_0 dans $\mathbb{Z}$ tel que*

– *pour tout $k \geqslant k_0$, $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}(k)) \neq 0$.*
– *pour tout $k \leqslant k_0 - 1$, $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}(k)) = 0$,*

On note que le résultat est clairement vrai pour un fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$, puisque $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell + k)) = 0$ si $k \leqslant -\ell - 1$ et $\neq 0$ si $k \geqslant -\ell$.

Démonstration de la proposition 4.2.3. On commence par remarquer, comme à l'exercice 3.5.2(1), que pour $k \leqslant \ell$, l'application $(s_0, s_\infty) \mapsto (z^{\ell-k}s_0, s_\infty)$ est une injection de $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}(k))$ dans $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}(\ell))$, de sorte que, s'il existe k_0 tel que $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}(k_0 - 1)) = 0$, alors $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}(k)) = 0$ pour tout $k \leqslant k_0 - 1$. De même, s'il existe k_1 tel que $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}(k_1)) \neq 0$, alors $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}(k)) \neq 0$ pour tout $k \geqslant k_1$.

Il suffit donc de montrer l'existence de k_1 tel que $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}(k_1)) \neq 0$ et de k_2 tel que $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}(k_2)) = 0$: on prendra pour k_0 le minimum des k_1 possibles, qui existe d'après l'existence d'un k_2.

Si $\mathscr{E} \simeq (\mathbb{C}[z]^n, \mathbb{C}[z']^n, \Psi)$, alors une section globale s de $\mathscr{E}$ est un vecteur $s_0 \in \mathbb{C}[z]^n$ tel que $\Psi s_0 \in \mathbb{C}[z^{-1}]^n$. Étant donné s_0 quelconque dans $\mathbb{C}[z]^n$, il existe k_1 tel qu'on ait $z^{-k_1}\Psi s_0 \in \mathbb{C}[z^{-1}]^n$: il suffit de prendre pour k_1 le maximum des degrés en z des composantes de Ψs_0. Ainsi k_1 convient.

D'autre part, les colonnes de Ψ sont les images par Ψ de la base canonique de $\mathbb{C}[z, z^{-1}]^n$. Soit k_2 tel que les colonnes de $z^{k_2}\Psi$ soient toutes dans $(z\mathbb{C}[z])^n$. Il en est alors de même de toute combinaison linéaire à coefficient dans $\mathbb{C}[z]$ de ces colonnes. Aucune telle combinaison non nulle ne peut être dans $\mathbb{C}[z^{-1}]^n$, et par suite le fibré correspondant à $z^{k_2}\Psi$ n'a pas de section non nulle, donc un tel k_2 convient. □

Démonstration du théorème de Birkhoff-Grothendieck, existence

La démonstration se fait par récurrence sur le rang n du fibré, le cas $n = 1$ étant vu au § 3.5. Par ailleurs, si le résultat est vrai pour un fibré $\mathscr{E}$, il est vrai pour tous les fibrés $\mathscr{E}(k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$: on aura $\mathscr{E}(k) \simeq \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1 + k) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_n + k)$.

Soit donc $\mathscr{E}$ un fibré de rang n sur $\mathbb{P}^1$ et soit k_0 donné par la proposition 4.2.3. Il suffit de montrer l'existence de la décomposition pour le fibré $\mathscr{E}(k_0)$, pour lequel l'entier k_0' de la proposition est nul. On peut donc supposer dès le début que $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}) \neq 0$ et $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}(k)) = 0$ pour tout $k < 0$.

Première étape. On montre l'existence (sous l'hypothèse ci-dessus) d'une section globale de $\mathscr{E}$ partout non nulle. Puisque $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}) \neq 0$, il existe une section globale de $\mathscr{E}$ non identiquement nulle. Supposons qu'elle s'annule en certains points. Il existe alors une section, que l'on note $s = (s_0, s_\infty)$, qui s'annule à l'infini uniquement (proposition 3.4.3). Soit $k \geqslant 1$ son ordre d'annulation. Alors $\widetilde{s} \overset{\text{déf}}{=} (s_0, s_\infty/z'^k) = (s_0, z^k s_\infty)$ est une section globale non identiquement nulle du fibré de matrice $z^k\Psi$, c'est-à-dire $\mathscr{E}(-k)$. Ceci est contradictoire avec l'hypothèse.

On déduit de cette première étape et de la proposition 4.1.5 que le fibré trivial $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$ est un sous-fibré de $\mathscr{E}$, et le fibré quotient $\mathscr{F}$ est un fibré de rang $n-1$. Par hypothèse de récurrence, $\mathscr{F} \simeq \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(b_2) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(b_n)$ avec $b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$.

Deuxième étape. On montre maintenant que l'extension $\mathscr{E}$ de $\mathscr{F}$ par $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$ est scindable. Il existe une présentation de $\mathscr{E}$ dans laquelle la matrice Ψ prend la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \psi_2 & \psi_3 & \cdots & \psi_n \\ 0 & z^{-b_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & z^{-b_3} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & z^{-b_n} \end{pmatrix}$$

En raisonnant comme dans l'exercice 4.1.8, il suffit de vérifier que pour tout $i = 2, \dots, n$, il existe $p_i(z) \in \mathbb{C}[z]$ et $q_i(z') \in \mathbb{C}[z']$ tels que $\psi_i = z^{-b_i} q_i(z^{-1}) + p_i(z)$, et il suffit donc de montrer que $b_i \leqslant 1$ pour tout $i = 2, \dots, n$. Nous allons montrer mieux : $b_i \leqslant 0$ pour tout i. Pour cela, il suffit de montrer

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{F}(-1)) = 0.$$

En effet, si c'est le cas, on en déduit

$$0 = H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{F}(-1)) = \bigoplus_{i=2}^{n} H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(b_i - 1)),$$

donc $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(b_i - 1)) = 0$ pour tout i. D'après le lemme 3.5.1, ceci équivaut bien à $b_i - 1 \leqslant -1$.

De la suite exacte de fibrés

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

on déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \longrightarrow \mathscr{E}(-1) \longrightarrow \mathscr{F}(-1) \longrightarrow 0,$$

et le lemme 4.1.9 montre que $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}(-1)) \to H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{F}(-1))$ est surjective. Puisque la source est nulle par hypothèse, le but l'est aussi. □

Démonstration du théorème 4.2.1*, unicité.* Supposons que l'on ait deux décompositions correspondant à deux suites distinctes $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ et $a'_1 \geqslant \cdots \geqslant a'_n$. Soit $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_i = a'_i$ pour $i < j_0$ et $a_{j_0} \neq a'_{j_0}$, par exemple $a_{j_0} > a'_{j_0}$. Alors $a'_i - a_{j_0} = a_i - a_{j_0} \geqslant 0$ pour $i < j_0$ et $a'_i - a_{j_0} = (a'_i - a'_{j_0}) + (a'_{j_0} - a_{j_0}) < 0$ pour $i \geqslant j_0$. Si l'on a un isomorphisme

$$\bigoplus_i \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i) \simeq \bigoplus_i \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a'_i)$$

on en déduit, en tensorisant par $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_{j_0})$, un isomorphisme

$$\bigoplus_i \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i - a_{j_0}) \simeq \bigoplus_i \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a'_i - a_{j_0}).$$

Les termes coïncident pour $i \geqslant j_0 + 1$. Pour tout $i \leqslant j_0$, on a $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a'_i - a_{j_0}))$, tandis que por $i = j_0$ par exemple, $H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i - a_{j_0}))$ est de dimension 1, d'où une contradiction. □

***Exercice 4.2.4* (degré d'un fibré).** On appelle *degré* d'un fibré E de type $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ sur $\mathbb{P}^1$ la somme $\sum_{i=1}^n a_i$. Montrer qu'un fibré E est trivial si et seulement s'il est de degré 0 et satisfait $H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{E}(-1)) = 0$.

LEÇON 5

19 FÉVRIER 2010

Résumé. On introduit la notion de dérivation d'un fibré vectoriel sur un ouvert de Zariski, puis celle de connexion rationnelle. On montre comment cette notion généralise celle de système différentiel méromorphe, puis on formule un problème de Riemann-Hilbert dans ce cadre. Enfin, on montre le théorème des résidus pour les connexions méromorphes à pôles simples.

5.0. Compléments : fibrés vectoriels sur un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^1$

Soit U un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^1$ distinct de $\mathbb{P}^1$. Nous avons défini un fibré vectoriel sur U comme un $\mathscr{O}(U)$-module libre $\mathscr{E}(U)$ de rang n. Par contre, un fibré $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{P}^1$ est défini par un triplet $(\mathscr{E}(U_0), \mathscr{E}(U_\infty), \Psi_{0\infty})$. Il sera utile de considérer l'opération de restriction de $\mathscr{E}$ à un ouvert de Zariski U, et donc de présenter $\mathscr{E}(U)$ aussi sous la forme d'un triplet $(\mathscr{E}(U \cap U_0), \mathscr{E}(U \cap U_\infty), \Psi_{0\infty})$ où $\Psi_{0\infty}$ est un isomorphisme $\mathscr{E}(U \cap U_0 \cap U_\infty) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}(U \cap U_0 \cap U_\infty)$.

En choisissant des bases de $\mathscr{E}(U \cap U_0)$ et $\mathscr{E}(U \cap U_\infty)$, tout tel triplet se représente par $(\mathscr{O}(U \cap U_0)^n, \mathscr{O}(U \cap U_\infty)^n, \Psi)$ avec $\Psi \in \mathrm{GL}_n(U \cap U_0 \cap U_\infty)$. Deux tels triplets donnés par des matrices Ψ_1 et Ψ_2 sont dits équivalents si $\Psi_2 = Q\Psi_1 P^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathscr{O}(U \cap U_0))$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathscr{O}(U \cap U_\infty))$. Un triplet provenant de $\mathscr{E}(U)$ peut être défini à l'aide de $\Psi = \mathrm{Id}$: en effet, prenons une base de $\mathscr{E}(U)$ et induisons-la sur $\mathscr{E}(U \cap U_0)$ et $\mathscr{E}(U \cap U_\infty)$; la matrice de passage dans ces bases est l'identité, d'où l'assertion.

Réciproquement, lorsque $U \neq \mathbb{P}^1$, la proposition ci-dessous montre que tout triplet $(\mathscr{E}(U \cap U_0), \mathscr{E}(U \cap U_\infty), \Psi_{0\infty})$ est équivalent à un triplet pour lequel $\Psi = \mathrm{Id}$. La situation est donc bien différente de celle de $\mathbb{P}^1$, où une telle équivalence n'a pas toujours lieu. La démonstration sera parallèle à celle du théorème de Birkhoff-Grothendieck, avec plusieurs simplifications, et aussi une conclusion plus simple.

Proposition 5.0.1. *Soit $U \neq \mathbb{P}^1$ un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^1$. Alors tout triplet $(\mathscr{E}(U \cap U_0), \mathscr{E}(U \cap U_\infty), \Psi_{0\infty})$ comme ci-dessus provient, à équivalence près, d'un unique $\mathscr{O}(U)$-module libre $\mathscr{E}(U)$ par le procédé suivant :*

$$\mathscr{E}(U \cap U_0) = \mathscr{O}(U \cap U_0) \otimes_{\mathscr{O}(U)} \mathscr{E}(U), \quad \mathscr{E}(U \cap U_\infty) = \mathscr{O}(U \cap U_\infty) \otimes_{\mathscr{O}(U)} \mathscr{E}(U), \quad \Psi = \mathrm{Id}\,.$$

Démonstration. Voyons la signification de cet énoncé lorsque $n = 1$. Soit donc ψ une fraction rationnelle à pôles au plus dans $\mathbb{P}^1 \smallsetminus (U \cap U_0 \cap U_\infty)$. Puisque $U \neq \mathbb{P}^1$, il existe $z^o \in \mathbb{P}^1 \smallsetminus U$. Supposons pour simplifier que $z^o \neq \infty$. Si $r = \deg \psi$, la fraction $q = (z - z^o)^{-r}\psi$ est de degré 0, donc n'a pas de pôle en ∞ non plus que son inverse ; de plus, elle n'a pas de pôle dans U ; ainsi $q \in \mathrm{GL}_1(\mathscr{O}(U \cap U_\infty))$. D'autre part, $(z - z^o)^{-r} \in \mathrm{GL}_1(\mathscr{O}(U \cap U_0))$ puisque $z^o \notin U$. On obtient ainsi l'assertion dans le cas où $n = 1$.

Comme au § 3.4, on appelle section globale de $(\mathscr{E}(U\cap U_0),\mathscr{E}(U\cap U_\infty),\Psi_{0\infty})$ la donnée de $s_0\in\mathscr{E}(U\cap U_0)$ et $s_\infty\in\mathscr{E}(U\cap U_\infty)$, telles que $s_\infty=\Psi_{0\infty}s_0$.

On commence par vérifier qu'il existe des sections globales non identiquement nulles (on utilise ici que $U\neq\mathbb{P}^1$, car sinon on sait que de telles sections peuvent ne pas exister, pour $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ par exemple). Soit $z^o\notin U$ (un tel z^o existe par hypothèse !) et supposons par exemple $z^o\in U_0$. Soit $s_0\in\mathscr{E}(U\cap U_0)$. Alors, pour tout $r\geqslant 0$, $(z-z^o)^{-r}s_0\in\mathscr{E}(U\cap U_0)$. Je dis qu'on peut choisir r assez grand pour que $(z-z^o)^{-r}s_\infty=\Psi_{0\infty}((z-z^o)^{-r}s_0)$ soit dans $\mathscr{E}(U\cap U_\infty)$. Il suffit en effet de faire en sorte que $(z-z^o)^{-r}\Psi_{0\infty}(s_0)$ soit une fraction rationnelle de degré $\leqslant 0$, et de prendre r assez grand pour assurer cette propriété.

Montrons, par le même procédé que pour la proposition 3.4.3, que si $s=(s_0,s_\infty)$ est une section globale non identiquement nulle de $(\mathscr{E}(U\cap U_0),\mathscr{E}(U\cap U_\infty),\Psi_{0\infty})$, il existe une section globale σ qui ne s'annule pas sur U. En reprenant la même démonstration que dans la proposition 3.4.3, on montre l'existence d'une section de la forme $(\sigma_0,cz'^k\sigma_\infty)$, pour une certaine constante $c\neq 0$ et un entier k, où σ_0 ne s'annule pas sur $U\cap U_0$ et σ_∞ ne s'annule pas sur $U\cap U_\infty$. Si $\infty\notin U$, on a terminé puisque z' et $1/z'$ ne s'annulent pas sur U. Sinon, soit $z^o\notin U$. On remplace alors cette section par la section $((z-z^o)^k\sigma^o,c(z-z^o)^kz'^k\sigma_\infty))$, et on remarque que $(z-z^o)$ et $(z-z^o)^{-1}$ sont dans $\mathscr{O}(U\cap U_0)$, et $(z-z^o)z'=(z-z^o)/z$ et $z/(z-z^o)$ sont dans $\mathscr{O}(U\cap U_\infty)$.

Soit maintenant $s=(s_0,s_\infty)$ une section globale partout non nulle du fibré $(\mathscr{E}(U\cap U_0),\mathscr{E}(U\cap U_\infty),\Psi_{0\infty})$, qui existe d'après ce qu'on vient de voir. On vérifie alors que s_0 se complète en une base de $\mathscr{E}(U\cap U_0)$ et s_∞ en une base de $\mathscr{E}(U\cap U_\infty)$. Montrons-le pour s_0. On écrit $s_0=r(z)\widetilde{s}_0$, où $\widetilde{s}_0\in\mathbb{C}[z]^n$ ne s'annule qu'en dehors de U et $r(z)$ est une fraction rationnelle qui n'a de zéro ou de pôle qu'en dehors de U. Le théorème de Bézout donne une relation $\sum_i p_i(z)\widetilde{s}_{0,i}=\delta(z)\in\mathbb{C}[z]$, où δ ne s'annule qu'en dehors de U. On a donc une relation $\sum_i q_is_{0,i}=1$ dans $\mathscr{O}(U\cap U_0)$, en posant $q_i=p_i/(r\delta)\in\mathscr{O}(U\cap U_0)$. On conclut comme dans la proposition 4.1.6.

En raisonnant par récurrence sur le rang n comme dans la démonstration du théorème de Birkhoff-Grothendieck, on montre que la matrice de $\Psi_{0\infty}$ dans ces nouvelles bases est équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix}1&\psi\\0&\mathrm{Id}_{n-1}\end{pmatrix},$$

où $\psi=(\psi_2,\dots,\psi_n)$ est un vecteur d'éléments de $\mathscr{O}(U\cap U_0\cap U_\infty)$. Comme dans ce théorème (deuxième étape), il suffit de montrer que $\psi_i=q_i(z')+p_i(z)$ avec $q_i\in\mathscr{O}(U\cap U_\infty)$ et $p_i\in\mathscr{O}(U\cap U_0)$.

De fait, tout élément $r\in\mathscr{O}(U\cap U_0\cap U_\infty)$ s'écrit sous la forme $r(z)=q(z')+p(z)$ avec p et q comme ci-dessus (autrement dit, $H^1(U,\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1})=0$). En effet, posons $r(z)=a(z)b(z)$, où $a(z)$ n'a de pôles qu'en 0 et ∞ (c'est-à-dire $a(z)\in\mathbb{C}[z,z^{-1}]$) et $b(z)$ n'a de pôles qu'en dehors de $U\cup\{0,\infty\}$). On écrit $a(z)=\alpha(z)+\alpha'(z')$, avec $\alpha(z)\in\mathbb{C}[z]$ et $\alpha'(z')\in\mathbb{C}[z']$ et on pose $q(z)=\alpha'(z^{-1})b(z)$ et $p(z)=\alpha(z)b(z)$, qui conviennent. $\square$

5.1. Dérivations des sections d'un fibré vectoriel

Soit U un ouvert de Zariski de la droite projective complexe. Dans un premier temps, je vais supposer que l'ouvert U ne contient pas le point ∞, c'est-à-dire que U

est contenu dans l'ouvert U_0. Je vais donc privilégier la coordonnée z. L'anneau $\mathscr{O}(U)$ est formé des fractions rationnelles en z qui ont des pôles au plus aux points de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$.

Soit $\mathscr{E}(U)$ un fibré vectoriel de rang n sur U, c'est-à-dire un $\mathscr{O}(U)$-module libre de rang n. On cherche à définir la notion de dérivation d'éléments de U de manière intrinsèque, c'est-à-dire sans privilégier le choix d'une base.

Commençons par choisir une base $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathscr{E}(U)$. Tout élément $s \in \mathscr{E}(U)$ se représente sous la forme d'un vecteur colonne, de sorte que, matriciellement, on ait

$$s = (e_1, \dots, e_n) \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix},$$

où les s_i sont des éléments de $\mathscr{O}(U)$. Notons $\nabla^{\boldsymbol{e}}_{\partial_z}$ l'opérateur qui dérive les composantes $s_1, \dots, s_n$ de s dans la base fixée $\boldsymbol{e}$:

$$\nabla^{\boldsymbol{e}}_{\partial_z} s = \boldsymbol{e} \cdot \begin{pmatrix} ds_1/dz \\ \vdots \\ ds_n/dz \end{pmatrix}.$$

Que se passe-t-il après un changement de base ? Soit donc $\boldsymbol{e}'$ une autre base de $\mathscr{E}(U)$. La matrice de passage $\mathcal{P}$ de $\boldsymbol{e}'$ à $\boldsymbol{e}$ est une matrice dans $\mathrm{GL}_n(\mathscr{O}(U))$, définie par

$$(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot \mathcal{P}, \quad \text{c'est-à-dire } \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}' \cdot \mathcal{P}.$$

Soient $s'_1, \dots, s'_n$ les composantes de s dans la base $\boldsymbol{e}'$. On a

$$\begin{pmatrix} s'_1 \\ \vdots \\ s'_n \end{pmatrix} = \mathcal{P} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}, \quad \text{puisque } \boldsymbol{e}' \cdot \begin{pmatrix} s'_1 \\ \vdots \\ s'_n \end{pmatrix} = s = \boldsymbol{e} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}' \cdot \mathcal{P} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Notons $\nabla^{\boldsymbol{e}'}_{\partial_z}$ l'opérateur qui dérive les composantes $s'_1, \dots, s'_n$ de s dans la base $\boldsymbol{e}'$. On peut donc écrire dans la base $\boldsymbol{e}'$:

$$\begin{aligned}
\nabla^{\boldsymbol{e}'}_{\partial_z} s = \boldsymbol{e}' \cdot \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} s'_1 \\ \vdots \\ s'_n \end{pmatrix} &= \boldsymbol{e}' \cdot \frac{d}{dz} \Bigg(\mathcal{P} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \Bigg) \\
&= \boldsymbol{e}' \cdot \frac{d\mathcal{P}}{dz} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} + \boldsymbol{e}' \cdot \mathcal{P} \cdot \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{e}' \cdot \frac{d\mathcal{P}}{dz} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} + \boldsymbol{e} \cdot \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{e}' \cdot \frac{d\mathcal{P}}{dz} \, \mathcal{P}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} s'_1 \\ \vdots \\ s'_n \end{pmatrix} + \nabla^{\boldsymbol{e}}_{\partial_z} s
\end{aligned}$$

Ainsi, $\nabla^{\boldsymbol{e}'}_{\partial_z} s$ et $\nabla^{\boldsymbol{e}}_{\partial_z} s$ diffèrent en général d'un terme de la forme $A \cdot s$, où A est l'endomorphisme de matrice $\frac{d\mathcal{P}}{dz}\,\mathcal{P}^{-1}$ dans la base $\boldsymbol{e}'$. Puisqu'il n'y a pas de raison de privilégier la base $\boldsymbol{e}$, il n'y a pas non plus de raison de privilégier la dérivation d/dz des composantes de s dans cette base. On est donc amené à la définition générale de *dérivation.*

Définition 5.1.1. On appelle *dérivation de $\mathscr{E}(U)$ le long de d/dz* toute application $\mathbb{C}$-linéaire $\nabla_{\partial_z} : \mathscr{E}(U) \to \mathscr{E}(U)$ qui satisfait à la *règle de Leibniz* :

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(U),\ \forall\, s \in \mathscr{E}(U), \quad \nabla_{\partial_z}(fs) = \frac{df}{dz}\, s + f\nabla_{\partial_z} s.$$

***Proposition 5.1.2* (Classification des dérivations).**

(1) *Soient ∇_{∂_z} et ∇'_{∂_z} deux dérivations de $\mathscr{E}(U)$ (sous-entendu : le long de d/dz). Alors la différence $\nabla'_{\partial_z} - \nabla_{\partial_z}$ est un endomorphisme $\mathscr{O}(U)$-linéaire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{E}(U)$.*

(2) *Réciproquement, étant donnée une dérivation ∇_{∂_z}, alors pour tout endomorphisme $\mathscr{O}(U)$-linéaire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{E}(U)$, l'opérateur $\nabla_{\partial_z} + \mathscr{A}$ est une dérivation de $\mathscr{E}(U)$.*

(3) *Soit ∇_{∂_z} une dérivation de $\mathscr{E}(U)$, soit $\boldsymbol{e}$ une base de $\mathscr{E}(U)$ et soit $\nabla^{\boldsymbol{e}}_{\partial_z}$ la dérivation associée. Soit enfin $A^{\boldsymbol{e}} \in \mathrm{M}_n(\mathscr{O}(U))$ la matrice de l'endomorphisme $\mathscr{A}^{\boldsymbol{e}} \overset{\text{déf}}{=} \nabla_{\partial_z} - \nabla^{\boldsymbol{e}}_{\partial_z}$ dans la base $\boldsymbol{e}$. Alors pour tout élément $s \in \mathscr{E}(U)$, de composantes $s_1, \dots, s_n$ dans cette base, on a*

$$\nabla_{\partial_z} s = \nabla^{\boldsymbol{e}}_{\partial_z} s + \boldsymbol{e} \cdot A^{\boldsymbol{e}} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

On appelle $A^{\boldsymbol{e}}$ la matrice de ∇_{∂_z} dans la base $\boldsymbol{e}$.

(4) *Soient $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{e}'$ deux bases de $\mathscr{E}(U)$, avec $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e} \cdot \mathcal{Q}$, pour $\mathcal{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathscr{O}(U))$. Alors les matrices $A^{\boldsymbol{e}}$ et $A^{\boldsymbol{e}'}$ de ∇_{∂_z} dans ces bases sont reliées par la formule*

$$A^{\boldsymbol{e}'} = \mathcal{Q}^{-1} A^{\boldsymbol{e}} \mathcal{Q} + \mathcal{Q}^{-1}\frac{d\mathcal{Q}}{dz} = \mathcal{P} A^{\boldsymbol{e}} \mathcal{P}^{-1} - \frac{d\mathcal{P}}{dz}\,\mathcal{P}^{-1} \quad \text{si } \mathcal{P} = \mathcal{Q}^{-1}.$$

Exemple 5.1.3. Le calcul fait plus haut, lu à l'envers, nous dit que la matrice $A^{\boldsymbol{e}'}_{\boldsymbol{e}}$ de la dérivation $\nabla^{\boldsymbol{e}}_{\partial_z}$ dans la base $\boldsymbol{e}'$ est $-\frac{d\mathcal{P}}{dz}\,\mathcal{P}^{-1}$. C'est bien compatible avec la formule 5.1.2(4), puisque la matrice $A^{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{e}}$ de la dérivation $\nabla^{\boldsymbol{e}}_{\partial_z}$ dans la base $\boldsymbol{e}$ est nulle par définition, et cette formule se lit

$$A^{\boldsymbol{e}'}_{\boldsymbol{e}} = \mathcal{P} A^{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{e}} \mathcal{P}^{-1} - \frac{d\mathcal{P}}{dz}\,\mathcal{P}^{-1} = -\frac{d\mathcal{P}}{dz}\,\mathcal{P}^{-1}.$$

Démonstration de la proposition 5.1.2.

(1) Il suffit de vérifier la compatibilité $\mathscr{A}(fs) = f\mathscr{A}(s)$ pour tous $f \in \mathscr{O}(U)$ et $s \in \mathscr{E}(U)$. On a

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(fs) &= \nabla'_{\partial_z}(fs) - \nabla_{\partial_z}(fs) \\ &= \frac{df}{dz}\, s + f\nabla'_{\partial_z} s - \Big(\frac{df}{dz}\, s + f\nabla_{\partial_z} s\Big) \\ &= f\nabla'_{\partial_z} s - f\nabla_{\partial_z} s = f\mathscr{A}(s). \end{aligned}$$

(2) Réciproquement, même calcul lu à l'envers :

$$\begin{aligned}(\nabla_{\partial_z} + \mathscr{A})(fs) &= \Big(\frac{df}{dz}\, s + f\nabla_{\partial_z} s\Big) + f\mathscr{A}(s)\\ &= \frac{df}{dz}\, s + f(\nabla_{\partial_z} + \mathscr{A})(s).\end{aligned}$$

(3) C'est la définition de la matrice d'un endomorphisme.

(4) On écrit

$$\nabla_{\partial_z} = \nabla^{\boldsymbol{e}}_{\partial_z} + \mathscr{A}^{\boldsymbol{e}} = \nabla^{\boldsymbol{e}'}_{\partial_z} + \mathscr{A}^{\boldsymbol{e}'}.$$

On a vu plus haut que, dans la base $\boldsymbol{e}'$, on a $\nabla^{\boldsymbol{e}'}_{\partial_z} - \nabla^{\boldsymbol{e}}_{\partial_z} = \boldsymbol{e}' \cdot \frac{d\mathcal{P}}{dz}\, \mathcal{P}^{-1}$, c'est-à-dire que la matrice de $\mathscr{A}^{\boldsymbol{e}} - \mathscr{A}^{\boldsymbol{e}'}$ dans cette base est $\frac{d\mathcal{P}}{dz}\, \mathcal{P}^{-1}$. Mais c'est aussi $\mathcal{P}A^{\boldsymbol{e}}\mathcal{P}^{-1} - A^{\boldsymbol{e}'}$, ce qu'on voulait démontrer. $\square$

Remarque 5.1.4 **(Systèmes différentiels linéaires à coefficients méromorphes et dérivations)**

À toute dérivation ∇_{∂_z} on associe le système différentiel $\nabla_{\partial_z} s = 0$, portant sur l'élément inconnu s. Il y a en général peu de chances de trouver une solution dans $\mathscr{E}(U)$, et on cherchera des solutions dans des espaces plus grands. Dans une base $\boldsymbol{e}$ de $\mathscr{O}(U)$, le système s'écrit

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} s_1\\ \vdots\\ s_n\end{pmatrix} + A^{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} s_1\\ \vdots\\ s_n\end{pmatrix} = 0.$$

La matrice correspondante du système est $-A^{\boldsymbol{e}}$. La formule

$$A^{\boldsymbol{e}'} = \mathcal{P}A^{\boldsymbol{e}}\mathcal{P}^{-1} - \frac{d\mathcal{P}}{dz}\,\mathcal{P}^{-1},$$

lue sous la forme

$$-A^{\boldsymbol{e}'} = \mathcal{P}(-A^{\boldsymbol{e}})\mathcal{P}^{-1} + \frac{d\mathcal{P}}{dz}\,\mathcal{P}^{-1},$$

correspond à la formule de changement de base du lemme 1.3.1. Derrière cette formule se cache donc un unique objet, la dérivation ∇_{∂_z} de $\mathscr{E}(U)$.

5.2. Connexions rationnelles sur un fibré vectoriel algébrique

Soit U un ouvert contenu dans $U_0 \cap U_\infty = \mathbb{C}^*$. On va comparer la notion de dérivation le long de d/dz et le long de d/dz' sur $\mathscr{E}(U)$.

Soient $f \in \mathscr{O}(U)$ et $s \in \mathscr{E}(U)$. Pour une dérivation ∇_{∂_z} le long de d/dz, on a $\nabla_{\partial_z}(fs) = (df/dz)s + f\nabla_{\partial_z} s$. De même, pour une dérivation $\nabla'_{\partial'_z}$ le long de d/dz', on a $\nabla'_{\partial'_z}(fs) = (df/dz')s + f\nabla'_{\partial'_z} s$. On dira que les deux dérivations ∇_{∂_z} et $\nabla'_{\partial'_z}$ correspondent à la même *connexion* si $\nabla'_{\partial'_z} = -z^2\nabla_{\partial_z}$, autrement dit si ces deux dérivations sont reliées par la même formule qui lie les deux dérivations d/dz et d/dz' sur $\mathscr{O}(U)$ (ou sur $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$).

Autrement dit, une dérivation ∇_{∂_z} sur $\mathscr{E}(U)$ définit une unique connexion ∇ sur $\mathscr{E}(U)$ en posant $\nabla_{\partial_{z'}} = -z^2\nabla_{\partial_z}$.

Soit maintenant U un ouvert de Zariski quelconque de $\mathbb{P}^1$ (qu'il sera commode de supposer distinct de $\mathbb{P}^1$). On peut donner une version plus intrinsèque de la notion de système différentiel méromorphe. Soit $\mathscr{E}(U)$ un fibré vectoriel sur U, qu'on présente sous la forme $(\mathscr{E}(U\cap U_0),\mathscr{E}(U\cap U_\infty),\Psi_{0\infty})$.

Définition 5.2.1.

(1) Une *connexion* ∇ sur $\mathscr{E}(U)=(\mathscr{E}(U\cap U_0),\mathscr{E}(U\cap U_\infty),\Psi_{0\infty})$ consiste en la donnée d'une dérivation ∇_{∂_z} sur $\mathscr{E}(U\cap U_0)$ et d'une dérivation $\nabla_{\partial_{z'}}$ sur $\mathscr{E}(U\cap U_\infty)$, dont les restrictions à $\mathscr{E}(U\cap U_0\cap U_\infty)$ se correspondent par la formule $\nabla_{\partial_{z'}}\circ\Psi_{0\infty}=-z^2\Psi_{0\infty}\circ\nabla_{\partial_z}$.

(2) La connexion ∇ sur $\mathscr{E}(U)$ est dite *à singularités régulières* si le système différentiel associé à la dérivation ∇_{∂_z} est à singularité régulière en tout point de $U_0\smallsetminus(U\cap U_0)$ et le système différentiel associé à $\nabla_{\partial'_z}$ l'est en tout point de $U_\infty\smallsetminus(U\cap U_\infty)$.

Il sera utile de donner une version plus explicite de cette définition, en termes de matrices de la connexion. Comme pour d'autres objets associés à des fibrés vectoriels, nous allons trouver deux matrices, qui sont reliées entre elles. Nous considérons la présentation $\mathscr{E}(U)=(\mathscr{E}(U\cap U_0),\mathscr{E}(U\cap U_\infty),\Psi_{0\infty})$. Choisissons des bases $\boldsymbol{e}$ de $\mathscr{E}(U\cap U_0)$ et $\boldsymbol{e}'$ de $\mathscr{E}(U\cap U_\infty)$, et notons Ψ la matrice de $\Psi_{0\infty}$ dans ces bases, c'est-à-dire $\Psi_{0\infty}(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{e}'\cdot\Psi$. C'est une matrice dans $\mathrm{GL}_n(\mathscr{O}(U\cap U_0\cap U_\infty)$ (il peut être bon de se rappeler que $U\cap U_0\cap U_\infty$ est égal à $\mathbb{C}^*$ privé d'un nombre fini de points).

Soit ∇ une connexion sur $\mathscr{E}(U)=(\mathscr{E}(U\cap U_0),\mathscr{E}(U\cap U_\infty),\Psi_{0\infty})$, de matrice $A^{\boldsymbol{e}}\in\mathrm{M}_n(\mathscr{O}(U\cap U_0))$ sur $U\cap U_0$ dans la base $\boldsymbol{e}$, et $A'^{\boldsymbol{e}'}\in\mathrm{M}_n(\mathscr{O}(U\cap U_\infty))$ sur $U\cap U_\infty$ dans la base $\boldsymbol{e}'$.

Proposition 5.2.2. *Sur $U\cap U_0\cap U_\infty$, les matrices $A^{\boldsymbol{e}}$ et $A'^{\boldsymbol{e}'}$ sont reliées par la formule*

$$A'^{\boldsymbol{e}'}=z^2\Big[-\Psi A^{\boldsymbol{e}}\Psi^{-1}+\frac{d\Psi}{dz}\Psi^{-1}\Big].$$

Démonstration. Soit $s_0\in\mathscr{E}(U\cap U_0)$. On doit avoir, sur $U\cap U_0\cap U_\infty$, $\nabla_{\partial_{z'}}(\Psi_{0\infty}(s_0))=-z^2\Psi_{0\infty}(\nabla_{\partial_z}s_0)$. Dans la base $\boldsymbol{e}'$ on a d'une part

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_{z'}}(\Psi_{0\infty}(s_0))&=\nabla_{\partial_{z'}}(\Psi\cdot s_0)\\&=\frac{d(\Psi s_0)}{dz'}+A'^{\boldsymbol{e}'}(\Psi s_0)\\&=-z^2\frac{d\Psi}{dz}s_0-z^2\Psi\frac{ds_0}{dz}+A'^{\boldsymbol{e}'}\Psi s_0\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}-z^2\Psi_{0\infty}(\nabla_{\partial_z}s_0)&=-z^2\Psi_{0\infty}\Big(\frac{ds_0}{dz}+A^{\boldsymbol{e}}s_0\Big)\\&=-z^2\Psi\frac{ds_0}{dz}-z^2\Psi A^{\boldsymbol{e}}s_0,\end{aligned}$$

donc la relation définissant la connexion s'écrit

$$-z^2\frac{d\Psi}{dz}s_0+A'^{\boldsymbol{e}'}\Psi s_0=-z^2\Psi A^{\boldsymbol{e}}s_0$$

valable pour tout s_0, d'où l'identité voulue. □

Introduisons maintenant la notion de *connexion à pôles simples sur un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{P}^1$*. Comme on l'a vu à la proposition 2.1.2, la notion d'ordre du pôle d'un système différentiel en une singularité n'est invariante par les changements de base que si ceux-ci, et leurs inverses, sont supposés sans pôle. Dans le cadre considéré ici, cette restriction sur les changements de base consiste en la donnée supplémentaire d'un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{P}^1$, et pas seulement celle de $\mathscr{E}(U)$. Nous allons préciser ceci.

Soit donc $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$, décrit par la donnée de $(\mathscr{E}(U_0), \mathscr{E}(U_\infty), \Psi_{0\infty})$. Pour un ouvert de Zariski U, on note $\mathscr{E}_U$ l'objet décrit par la donnée d'un triplet $(\mathscr{E}(U \cap U_0), \mathscr{E}(U \cap U_\infty), \Psi_{0\infty})$ (voir le paragraphe 3.2 avec la notation U et U'). Soit $\boldsymbol{e}$ une base de $\mathscr{E}(U_0)$. Elle induit une base $\boldsymbol{e}$ de $\mathscr{E}(U \cap U_0)$. De même, une base $\boldsymbol{e}'$ de $\mathscr{E}(U_\infty)$ induit une base $\boldsymbol{e}'$ de $\mathscr{E}(U \cap U_\infty)$. La matrice Ψ de $\Psi_{0\infty}$ dans ces bases, initialement vue comme élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$, est maintenant vue comme élément de $\mathrm{GL}_n(\mathscr{O}(U \cap U_0 \cap U_\infty))$ (avec la propriété de n'avoir de pôle, ainsi que son inverse, qu'en 0 et ∞).

Soit ∇ une connexion sur $\mathscr{E}(U)$. Soit $z^o \in U_0 \smallsetminus (U \cap U_0)$ un pôle de ∇ à distance finie.

Définition 5.2.3. On dit que ∇ a un pôle simple en z^o relativement à $\mathscr{E}$ si la matrice de ∇_{∂_z} dans une base $\boldsymbol{e}$ de $\mathscr{E}(U \cap U_0)$ provenant d'une base de $\mathscr{E}(U_0)$ est à pôle simple.

Remarques 5.2.4.

(1) Il est important de noter que la base considérée doit provenir d'une base de $\mathscr{E}(U_0)$, et pas être une $\mathscr{O}(U \cap U_0)$-base quelconque de $\mathscr{E}(U \cap U_0)$, pour que la condition ne dépende pas de la base choisie.

(2) La formule de changement de base pour les dérivations permet de montrer que la condition de pôle simple ne dépend pas de la base de $\mathscr{E}(U_0)$ choisie.

(3) On a une définition analogue pour $z'^o \in U_\infty \smallsetminus (U \cap U_\infty)$ et la dérivation $\nabla_{\partial_{z'}}$.

(4) Pour $z^o \in (U_0 \cap U_\infty) \smallsetminus U$, les conditions de pôle simple pour ∇_{∂_z} et $\nabla_{\partial_{z'}}$ relativement à $\mathscr{E}$ sont équivalentes. En effet, choisissons des base $\boldsymbol{e}$ de $\mathscr{E}(U_0)$ et $\boldsymbol{e}'$ de $\mathscr{E}(U_\infty)$. Il s'agit de vérifier que la matrice $A^{\boldsymbol{e}}$ est à pôle simple en $z^o \in \mathbb{C}^*$ si et seulement si $A'^{\boldsymbol{e}'}$ l'est. Pour cela, on remarque que, dans la formule de la proposition 5.2.2, le terme $z^2 \frac{d\Psi}{dz} \Psi^{-1}$ n'a de pôle qu'en 0 et ∞ au plus, puisque les éléments des matrices Ψ et Ψ^{-1} sont des polynômes de Laurent. Tout revient donc à montrer que $A^{\boldsymbol{e}}$ et $-z^2 \Psi A^{\boldsymbol{e}} \Psi^{-1}$ ont le même ordre du pôle en $z^o \in \mathbb{C}^*$, ce qui est clair pour la même raison.

(5) Si $U \neq \mathbb{P}^1$, tous les fibrés $\mathscr{E}$ de rang n donnent lieu à des fibrés $\mathscr{E}(U)$ isomorphes au fibré trivial de rang n sur U, d'après la proposition 5.0.1 (par exemple, si $U = U_0 \cap U_\infty$, tous les fibrés sur $\mathbb{P}^1$ ont des restrictions à U isomorphes, à savoir $\mathbb{C}[z, z^{-1}]^n$). La condition de pôle simple est relative au fibré $\mathscr{E}$, alors que la condition de singularité régulière n'en dépend pas.

Définition 5.2.5. Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$. Une connexion ∇ sur $\mathscr{E}(U)$ est dite *à pôles simples relativement à $\mathscr{E}$* si elle est à pôle simple en tout point de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$ relativement à $\mathscr{E}$.

Remarque 5.2.6. Dans des bases $\boldsymbol{e}$ de $\mathscr{E}(U_0)$ et $\boldsymbol{e}'$ de U_∞, ceci signifie que $A^{\boldsymbol{e}}$ est à pôles simples sur U_0 (mais peut-être pas à l'infini) et $A'^{\boldsymbol{e}'}$ est à pôles simples sur U_∞ (mais peut-être pas en 0). Puisque la condition sur les deux matrices est redondante sur $U_0 \cap U_\infty$ (*cf.* remarque 5.2.4(4) ci-dessus), il suffit de demander que $A^{\boldsymbol{e}}$ soit à pôles simple sur U_0 et que $A'^{\boldsymbol{e}'}$ soit à pôle simple en ∞.

Problème de Riemann-Hilbert pour les fibrés vectoriels 5.2.7. *Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$, $U \neq \mathbb{P}^1$ un ouvert de Zariski, et ∇ une connexion sur $\mathscr{E}(U)$ à pôles simples relativement à $\mathscr{E}$. Existe-t-il un fibré trivial $\mathscr{E}'$ (c'est-à-dire isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}^n$) telle que ∇ soit à pôle simple relativement à $\mathscr{E}'$.*

Nous verrons plus tard que la résolution de ce problème est une étape essentielle dans celle du problème de Riemann-Hilbert original 2.3.1.

5.3. Résidu d'une connexion relativement à un fibré

Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel, $U \neq \mathbb{P}^1$ un ouvert de Zariski et ∇ une connexion sur $\mathscr{E}(U)$, et soit z^o un pôle de ∇. On suppose pour simplifier que $z^o \in U_0$.

Si ∇_{∂_z} a un pôle simple en z^o, alors l'application $\mathbb{C}$-linéaire $(z - z^o)\nabla_{\partial_z}$: $\mathscr{E}(U \cap U_0) \to \mathscr{E}(U \cap U_0)$ s'étend en une application $\mathbb{C}$-linéaire $\mathscr{E}(V \cap U_0) \to \mathscr{E}(V \cap U_0)$ si on pose $V = U \cup \{z^o\}$ (autrement dit, si on multiplie la matrice de la connexion dans une base $\boldsymbol{e}$ par $(z - z^o)$, on obtient une matrice sans pôle). Cette application satisfait à la propriété

$$[(z - z^o)\nabla_{\partial_z}](fs) = (z - z^o)\frac{df}{dz}\, s + f \cdot [(z - z^o)\nabla_{\partial_z}]s,$$

pour tout $f \in \mathscr{E}(V \cap U_0)$ et $s \in \mathscr{E}(V \cap U_0)$. Prenant $f = (z - z^o)$ on en déduit que $(z - z^o)\nabla_{\partial_z}$ envoie $(z - z^o)\mathscr{E}(V \cap U_0)$ dans lui-même, et donc induit une application $\mathbb{C}$-linéaire du quotient $\mathscr{E}(V \cap U_0)/(z - z^o)\mathscr{E}(V \cap U_0)$ dans lui-même.

Lemme 5.3.1. *Le quotient $\mathscr{E}(V \cap U_0)/(z - z^o)\mathscr{E}(V \cap U_0)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, qu'on appelle* fibre de $\mathscr{E}$ en z^o.

Démonstration. Si on choisit une base $\boldsymbol{e}$ de $\mathscr{E}(U_0)$, on a $\mathscr{E}(U_0) \simeq \mathbb{C}[z]^n$ et $\mathscr{E}(V \cap U_0) \simeq \mathscr{O}(V \cap U_0)^n$. Il suffit donc de voir que $\mathscr{O}(V \cap U_0)/(z - z^o)\mathscr{O}(V \cap U_0)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1. L'application $\mathscr{O}(V \cap U_0) \to \mathbb{C}$ définie par $f \mapsto f(z^o)$ est bien définie, car les éléments de $\mathscr{O}(V \cap U_0)$ sont des fractions rationnelles sans pôle en z^o. Elle est $\mathbb{C}$-linéaire, surjective (prendre pour f une fraction rationnelle constante). Son noyau est formé des fractions rationnelles qui s'annulent en z^o. En écrivant ces fractions sous forme de quotient de deux polynômes, on voit que le numérateur s'annule en z^o, donc est multiple de $z - z^o$. $\square$

Revenant à la connexion ∇ à pôle simple en z^o, l'application induite par $(z - z^o)\nabla_{\partial_z}$ sur la fibre $\mathscr{E}_{z^o}$ est appelée *résidu de ∇ en z^o relativement à $\mathscr{E}$*, et est noté $\mathrm{Rés}_{z^o}(\nabla, \mathscr{E})$.

On définit de même le résidu de ∇ en $z'^o \in U_\infty \smallsetminus (U \cap U_\infty)$. Quand il y a possibilité de deux définitions, elles coïncident, comme le montre le lemme qui suit.

Lemme 5.3.2. *Soit* $z^o \in U_0 \cap U_\infty \smallsetminus U$ *et soit* $z'^o = 1/z^o$*. Alors* $\mathrm{Rés}_{z^o}(\nabla_{\partial_z}, \mathscr{E}) = \mathrm{Rés}_{z'^o}(\nabla_{\partial_{z'}}, \mathscr{E})$.

Démonstration. L'opérateur $(z' - z'^o)\nabla_{\partial_{z'}}$ s'écrit aussi $-z^2(z' - z'^o)\nabla_{\partial_z}$. Il reste à remarquer que $-z^2(z' - z'^o) = (z/z^o)(z - z^o)$ et que $(z - z^o)\nabla_{\partial_z}$ induit le même endomorphisme que $(z/z^o)(z - z^o)\nabla_{\partial_z}$ sur $\mathscr{E}_{z^o}$. □

Théorème 5.3.3 **(Théorème des résidus pour les connexions à pôle simple)**
Soit ∇ *une connexion à pôles simples relativement à un fibré* $\mathscr{E}$ *sur* $\mathbb{P}^1$*. Alors*

$$\deg \mathscr{E} = -\sum_{z^o \in \mathbb{P}^1 \smallsetminus U} \mathrm{tr}\, \mathrm{Rés}_{z^o}(\nabla, \mathscr{E}).$$

Expliquons d'abord les notations. Le nombre $\mathrm{tr}\, \mathrm{Rés}_{z^o}(\nabla, \mathscr{E})$ est la *trace* de l'endomorphisme $\mathrm{Rés}_{z^o}(\nabla, \mathscr{E})$ (c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux de la matrice de l'endomorphisme dans une base quelconque). D'autre part, $\deg \mathscr{E}$ est le degré de $\mathscr{E}$, c'est-à-dire la somme des nombres a_i qui forment le type de $\mathscr{E}$ (voir exercice 4.2.4). Ce théorème exprime en particulier que le terme de droite ne dépend pas de la connexion à pôles simples.

Exercice 5.3.4 **(la formule des résidus pour une fraction rationnelle)**
Soit $f \in \mathbb{C}(z)$ une fraction rationnelle avec des pôles d'ordre arbitraire $z_1, \dots, z_r, \infty$. Montrer la formule des résidus :

$$\sum_{i=1}^r \mathrm{rés}_{z_i} f = \mathrm{rés}_\infty(z^2 f).$$

Démonstration du théorème 5.3.3. On fixe des bases $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{e}'$ de $\mathscr{E}(U_0)$ et $\mathscr{E}(U_\infty)$ comme plus haut, et on note $A^{\boldsymbol{e}}$ et $A'^{\boldsymbol{e}'}$ les matrices de la connexion ∇ dans ces bases. Soient $z_1, \dots, z_r$ les pôles de ∇ à distance finie, c'est-à-dire ceux de $A^{\boldsymbol{e}}$ à distance finie. On a :

$$\sum_{i=1}^r \mathrm{tr}\, \mathrm{Rés}_{z_i}(\nabla, \mathscr{E}) = \sum_{i=1}^r \mathrm{tr}\, \mathrm{rés}_{z_i} A^{\boldsymbol{e}} = \mathrm{tr}\, \mathrm{rés}_\infty(z^2 A^{\boldsymbol{e}}),$$

d'après la formule des résidus pour les fractions rationnelles. D'autre part, $\mathrm{tr}\, \mathrm{Rés}_\infty(\nabla, \mathscr{E}) = \mathrm{tr}\, \mathrm{rés}_\infty A'^{\boldsymbol{e}'}$.

On remarque maintenant que

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\, \mathrm{rés}_\infty(z^2 A^{\boldsymbol{e}}) &= \mathrm{rés}_\infty(z^2\, \mathrm{tr}\, A^{\boldsymbol{e}}) = \mathrm{rés}_\infty\big(z^2\, \mathrm{tr}(\Psi A^{\boldsymbol{e}} \Psi^{-1})\big) \quad (\mathrm{tr}\, AB = \mathrm{tr}\, BA)\\ &= \mathrm{tr}\, \mathrm{rés}_\infty\big(z^2(\Psi A^{\boldsymbol{e}} \Psi^{-1})\big).\end{aligned}$$

Utilisant alors la formule de la proposition 5.2.2 on trouve

$$\sum_{z^o \in \mathbb{P}^1 \smallsetminus U} \mathrm{tr}\, \mathrm{Rés}_{z^o}(\nabla, \mathscr{E}) = \mathrm{tr}\, \mathrm{rés}_\infty\big(z^2(\Psi A^{\boldsymbol{e}} \Psi^{-1}) + A'^{\boldsymbol{e}'}\big) = \mathrm{tr}\, \mathrm{rés}_\infty\Big(z^2 \frac{d\Psi}{dz} \Psi^{-1}\Big).$$

On voit déjà que l'expression du théorème ne dépend pas de la connexion, mais uniquement du fibré $\mathscr{E}$ par la matrice Ψ. Reprenant la formule des résidus dans l'autre sens, on écrit le dernier terme sous la forme $\mathrm{tr}\, \mathrm{rés}_0(\frac{d\Psi}{dz} \Psi^{-1})$, puisque la matrice $\frac{d\Psi}{dz} \Psi^{-1}$ n'a de pôle qu'en 0 et ∞. Il s'agit de voir que cette expression est égale à $-\deg \mathscr{E}$.

Commençons par le cas simple où $n = 1$. Alors on peut choisir $\Psi = z^{-k}$, si $k = \deg \mathscr{E}$ (c'est-à-dire $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$). On a bien $\text{rés}_0(-kz^{-1}) = -k$.

En général, on a vu que l'expression $\sum_{z^o \in \mathbb{P}^1 \smallsetminus U} \operatorname{tr} \text{Rés}_{z^o}(\nabla, \mathscr{E})$ ne dépend pas du choix des bases $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{e}'$. En utilisant le théorème de Birkhoff-Grothendieck, on peut les choisir de sorte que Ψ soit diagonale, de termes diagonaux $z^{-a_1}, \dots, z^{-a_n}$. Le calcul est alors le même que lorsque $n = 1$. $\square$

Exercice 5.3.5. Montrer directement que si Φ et Ψ sont deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$ qui sont équivalentes, c'est-à-dire telles que $\Phi = Q\Psi P^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z])$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z^{-1}])$, alors $\operatorname{tr} \text{rés}_0(\frac{d\Phi}{dz}\, \Phi^{-1}) = \operatorname{tr} \text{rés}_0(\frac{d\Psi}{dz}\, \Psi^{-1})$.

[Indication : on permutera trace er résidu pour travailler de manière commutative, comme avec les dérivées logarithmiques.]

LEÇON 6

26 FÉVRIER/5 MARS 2010

Résumé. En 1908, quelques années après que Hilbert ait posé ses problèmes, Plemelj publie un livre dans lequel il donne une démonstration du 21$^{\text{e}}$ problème, appelé maintenant « problème de Riemann-Hilbert ». Quelques 70 ans plus tard, on s'aperçoit que la démonstration utilise une hypothèse cachée supplémentaire qui n'apparaissait pas dans le problème initial. Nous allons donner une démonstration du théorème de Plemelj pour le problème de Riemann-Hilbert 5.2.7.

6.1. Connexions à pôles simples relativement à un fibré de rang 1

6.1.a. Descriptions des connexions à pôles simples. En complément au théorème des résidus 5.3.3, nous allons considérer plus en détail le cas des fibrés de rang 1. Fixons donc un entier k, et considérons le fibré $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ présenté sous la forme $(\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[z'], z^{-k})$. Pour être plus clair, notons e_0 la base canonique de $\mathbb{C}[z]$ comme $\mathbb{C}[z]$-module et e_∞ celle de $\mathbb{C}[z']$ comme $\mathbb{C}[z']$-module. Soit $U \subsetneq \mathbb{P}^1$ un ouvert de Zariski et ∇ une connexion sur $\mathscr{E}(U)$. La « matrice » $a_k^{e_0}(z)$ de ∇_{∂_z} dans la base e_0 est une fraction rationnelle à pôles en les points de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$, et de même pour la matrice $a_k'^{e_\infty}(z')$ de $\nabla_{\partial_{z'}}$.

La connexion ∇ est à pôles simples relativement à $\mathscr{E}$ si $a_k^{e_0}(z)$ est à pôles simples sauf éventuellement à l'infini, et de même pour $a_k'^{e_\infty}(z')$. Enfin, rappelons (proposition 5.2.2) que $a_k^{e_0}(z)$ et $a_k'^{e_\infty}(z')$ sont reliées par

$$(*) \qquad a_k'^{e_\infty}(z) = -z^2 a_k^{e_0}(z) - kz, \quad \text{c'est-à-dire aussi } a_k'^{e_\infty}(z') = -\frac{k}{z'} - \frac{a_k^{e_0}(1/z')}{z'^2}.$$

La connexion ∇ est donc à pôles simples relativement à $\mathscr{E}$(plus précisément, à pôles au pire simple relativement à $\mathscr{E}$, car on admet que certains points de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$ ne soient pas des pôles ; on appelle ces points *singularités apparentes de la connexion* ∇ *relativement à* $\mathscr{E}$) si et seulement si

- $a_k^{e_0}$ est à pôles simples sur U_0 (mais éventuellement pas à l'infini),
- et $z^2 a_k^{e_0}(z) + kz$ est
  - à pôle simple à l'infini si $\infty \notin U$ (et dans ce cas, ceci est équivalent au fait que $z^2 a_k^{e_0}(z)$ soit à pôle simple à l'infini),
  - sans pôle à l'infini si $\infty \in U$.

Exercice 6.1.1 **(connexions à pôles simples sur $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ lorsque $\infty \notin U$)**

(1) Montrer qu'une fraction rationnelle $a(z) \in \mathbb{C}(z)$ se met sous la forme $\sum_i a_i/(z-z_i)$, où $z_i \in U_0 \smallsetminus (U\cap U_0)$ et $a_i \in \mathbb{C}$, si et seulement si les pôles de $a(z)$ dans U_0 sont au plus simples et $\deg a(z) \leqslant -1$, et qu'alors $\deg a(z) \leqslant -2$ si et seulement si $\sum_i a_i = 0$.

(2) Soit $a(z) \in \mathscr{O}(U)$. Alors $a(z)$ définit une connexion du fibré $\mathscr{O}(U)$: on réalise le fibré $\mathscr{O}(U)$ par la présentation $(\mathscr{O}(U\cap U_0), \mathscr{O}(U\cap U_\infty), \mathrm{Id})$, de bases canoniques e_0 et e_∞, et on pose $\nabla = (\nabla_{\partial_z}, \nabla_{\partial'_z})$, où la dérivation ∇_{∂_z} a pour matrice $a^{e_0}(z) = a(z)$ et $a'^{e_\infty}(z) = -z^2 a(z)$ (définition 5.2.1).

On suppose désormais que $\infty \notin U$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $e_\infty^{(k)} = z^k e_\infty$ est encore une base de $\mathscr{O}(U\cap U_\infty)$. On pose aussi $e_0^{(k)} = e_0$. Calculer la matrice Ψ de Id dans ces bases et en déduire que le fibré vectoriel de présentation $(\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[z'], \Psi)$ est isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$. Calculer les matrices $a^{e_0^{(k)}}$ et $a'^{e_\infty^{(k)}}$ de la connexion ∇ dans ces bases.

(3) Montrer que la connexion ∇ sur $\mathscr{O}(U)$ définie par $a(z) \in \mathscr{O}(U)$ est à pôles (au plus) simples relativement à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ si et seulement si $a(z)$ est à pôles (au plus) simples à distance finie et de degré $\leqslant -1$.

(4) En conclure que, lorsque $\infty \notin U$, si une connexion sur $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(U)$ est à pôle simple relativement à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, elle l'est pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

(5) Pour quelles valeurs de k la connexion ∇ n'a pas de pôle à l'infini relativement à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$?

Exercice 6.1.2 **(connexions à pôles simples sur $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ lorsque $\infty \in U$)**

On se place dans la situation du début de 6.1.1(2), et on suppose maintenant que $\infty \in U$. On suppose que $U \neq \mathbb{P}^1$ et on fixe $z^o \notin U$ (donc $z^o \in U_0$).

(1) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $e_0^{(k)} = (z-z^o)^{-k} e_0$ est une base de $\mathscr{O}(U\cap U_0)$ et $e_\infty^{(k)} = z^k (z-z^o)^{-k} e_\infty$ est une base de $\mathscr{O}(U\cap U_\infty)$. Calculer la matrice Ψ de Id dans ces bases, et montrer que le fibré vectoriel de présentation $(\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[z'], \Psi)$ est isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$.

(2) Calculer les matrices $a^{e_0^{(k)}}$ et $a'^{e_\infty^{(k)}}$ de la connexion ∇ dans ces bases (on montrera que $a^{e_0^{(k)}} = -k/(z-z^o)$ et $a'^{e_\infty^{(k)}} = -z^2 a^{e_0^{(k)}} - kz = kz^o z/(z-z^o)$).

(3) Donner un critère sur $a(z)$ pour que ∇ soit à pôle simple relativement à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$.

(4) En conclure que, si une connexion sur $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(U)$ est à pôle simple relativement à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, elle l'est pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Ces exercices permettent de construire tous les exemples de connexions sur un ouvert U fixé de $\mathbb{P}^1$ qui n'a que des pôles simples relativement à un fibré de rang 1. Il suffit de le faire pour le fibré $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$ (c'est-à-dire $k=0$).

6.1.b. Calcul du degré à l'aide de la formule des résidus. Soit $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ présenté comme plus haut, et soit z^o un point de $\mathbb{P}^1$. Supposons pour commencer que $z^o \in \mathbb{C}^*$ et posons $z'^o = 1/z^o$. Pour $\ell \in \mathbb{Z}$, on définit le fibré $\mathscr{E}' = \mathscr{E}(\ell\cdot z^o)$ par la présentation $(\mathscr{E}'(U_0), \mathscr{E}'(U_\infty), \psi'_{0\infty})$ donnée par

$$\mathscr{E}'(U_0) = (z-z^o)^{-\ell}\mathbb{C}[z] \subset \mathbb{C}(z), \quad \mathscr{E}'(U_\infty) = (z'-z'^o)^{-\ell}\mathbb{C}[z'], \quad \psi'_{0\infty} = z^{-k}.$$

Ainsi $\mathscr{E}'(U_0)$ est un $\mathbb{C}[z]$-module libre de rang 1 contenu dans $\mathbb{C}(z)$, de base $e'_0 = (z-z^o)^{-\ell} e_0$ (avec la notation plus haut), et de même $\mathscr{E}'(U_\infty)$ est le $\mathbb{C}[z]$-module libre dans $\mathbb{C}(z)$ de base $e'_\infty = (z'-z'^o)^{-\ell} e_\infty$.

Proposition 6.1.3. *Le degré du fibré $\mathscr{E}(\ell \cdot z^o)$ est égal à $\deg \mathscr{E} + \ell = k + \ell$, autrement dit $\mathscr{E}(\ell \cdot z^o) \simeq \mathscr{E}(\ell)$.*

Démonstration. Supposons d'abord que $z^o \in \mathbb{C}^*$. Soit $U = \mathbb{P}^1 \smallsetminus z^o$ et $a^{e^o}(z) = -k/(z - z^o)$. On définit a'^{e_∞} par la formule $(*)$ ci-dessus. Ceci détermine bien une connexion sur $\mathscr{E}(U)$, à pôle simple (en z^o) relativement à $\mathscr{E}$. Calculons la matrice de ∇_{∂_z} dans la base e'_0 et celle de $\nabla_{\partial_{z'}}$ dans la base e'_∞. On a

$$\nabla_{\partial_z} e'_0 = \nabla_{\partial_z}((z - z_0)^{-\ell} e_0) = a^{e_0}(z) e'_0 - \frac{\ell}{(z - z_0)}\, e'_0 = -\frac{k + \ell}{(z - z^o)}\, e'_0.$$

De la même manière, le calcul de $(*)$ donne $a'^{e_\infty}(z') = kz^o/(1 - z'z^o) = -k/(z' - z'^o)$, et la matrice de $\nabla_{\partial_{z'}}$ dans la base e'_∞ est $-(k+\ell)/(z' - z'^o)$, dont le résidu en $z' = 0$ est nul. Par la formule des résidus, le degré de $\mathscr{E}(\ell \cdot z^o)$ est égal à $k + \ell$.

Si maintenant $z^o = 0$, on pose $\mathscr{E}'(U_0) = z^{-\ell}\mathbb{C}[z]$, $\mathscr{E}'(U_\infty) = \mathbb{C}[z']$ et $\psi'_{0\infty} = z^{-k}$. Si enfin $z^o = \infty$, on pose $\mathscr{E}'(U_0) = \mathbb{C}[z]$, $\mathscr{E}'(U_\infty) = z'^{-\ell}\mathbb{C}[z']$ et $\psi'_{0\infty} = z^{-k}$. Le calcul du degré est similaire. □

6.2. Retour sur le théorème de Birkhoff-Grothendieck

Nous avons vu que tout fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{P}^1$ admet une décomposition $\mathscr{E} \simeq \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_n)$ avec $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$, et que le type $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ est déterminé de manière unique. Nous nous intéressons désormais aux diverses décompositions possibles de $\mathscr{E}$. Autrement dit, nous voulons déterminer les isomorphismes du fibré vectoriel $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_n)$ dans lui-même.

Il sera maintenant commode de noter le type $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ sous la forme $((\alpha_1, n_1), \ldots, (\alpha_r, n_r))$, où $n_1, \ldots, n_r$ sont les longueurs des paquets de a_j égaux entre eux, et α_i est la valeur commune des a_j dans le paquet i. On a donc

$$\alpha_1 > \cdots > \alpha_r, \quad n_1 + \cdots + n_r = n.$$

Soit f un homomorphisme du fibré $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_n) = \bigoplus_{i=1}^r \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)^{n_i}$ dans lui-même. Soit $f_{ij} : \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_j)^{n_j} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)^{n_i}$ le bloc correspondant (composition de la restriction de f à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_j)^{n_j}$ avec la projection sur $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)^{n_i}$). Alors $f_{ij} = 0$ si $\alpha_j > \alpha_i$ (c'est-à-dire si $i > j$), puisqu'il n'y a pas d'homomorphisme non nul de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ dans $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$ si $k > \ell$.

Proposition 6.2.1. *Un homomorphisme f de $\bigoplus_{i=1}^r \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)^{n_i}$ dans lui-même est un isomorphisme si et seulement si tous les blocs f_{ii} sont eux-mêmes des isomorphismes.*

Démonstration. Considérons la présentation standard du fibré $\bigoplus_{i=1}^r \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)^{n_i}$ et posons $f = (f_0, f_\infty)$ relativement à cette présentation. Dans la base canonique $\boldsymbol{e}$ de $\mathbb{C}[z]^n$, f_0 est représenté par une matrice F_0 (*i.e.* $f_0(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e} \cdot F_0$), décomposée en blocs, telle que $F_{0,ij} = 0$ si $i > j$. Le déterminant de F_0 est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux $F_{0,ii}$. Par suite, f_0 est inversible si et seulement si $\operatorname{dét} F_0 \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}[z]) = \mathbb{C}^*$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout i, $\operatorname{dét} F_{0,ii} \in \mathbb{C}^*$. On raisonne de même avec f_∞. □

Il y a donc beaucoup d'isomorphismes de $\bigoplus_{i=1}^r \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)^{n_i}$ dans lui-même. Nous allons en construire explicitement plusieurs.

D'une manière générale, si $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est un homomorphisme de fibrés vectoriels, et si $z^o \in \mathbb{P}^1$, on définit la *fibre de f en z^o* comme l'homomorphisme f_{z^o} du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{E}_{z^o}$ (fibre de $\mathscr{E}$ en z^o, *cf.* lemme 5.3.1) vers le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{E}'_{z^o}$. Plus précisément, si $\mathscr{E} = (\mathscr{E}(U_0), \mathscr{E}(U_\infty), \Psi_{0\infty})$ (et de même pour $\mathscr{E}'$), alors on pose $f = (f_0, f_\infty)$. Si $z^o \in U_0$, on note f_{z^o} l'homomorphisme induit par f_0 de $\mathscr{E}(U_0)/(z - z^o)\mathscr{E}(U_0)$ vers $\mathscr{E}'(U_0)/(z - z^o)\mathscr{E}'(U_0)$. Si $z^o = \infty$, on note f_{z^o} l'homomorphisme induit par f_∞ de $\mathscr{E}(U_\infty)/z'\mathscr{E}(U_\infty)$ vers $\mathscr{E}'(U_\infty)/z'\mathscr{E}'(U_\infty)$.

Soit donc $\mathscr{E} = \bigoplus_{i=1}^r \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)^{n_i}$. Alors pour tout z^o, la fibre $\mathscr{E}_{z^o}$ a une décomposition correspondante, qu'on note $\mathscr{E}_{z^o} = \bigoplus \mathscr{E}_{z^o}^{(i)}$, et la fibre en z^o d'un homomorphisme f de $\mathscr{E}$ dans lui-même a une décomposition en blocs, qu'on note $(f_{z^o,ij})_{ij}$.

Proposition 6.2.2. *Soit g^o un endomorphisme de $\mathscr{E}_{z^o}$, décomposé en blocs (g^o_{ij}). Il existe un endomorphisme f de $\mathscr{E}$ tel que $f_{z^o} = g^o$ si et seulement si $g^o_{ij} = 0$ pour tous $i > j$.*

Si cette condition est satisfaite, et si g^o est inversible (i.e. si les blocs g_{ii} sont inversibles), alors f est inversible.

Démonstration. La condition $g^o_{ij} = 0$ pour tous $i > j$ est nécessaire pour trouver f, comme on l'a vu plus haut. Réciproquement, si elle est satisfaite, il suffit de montrer le résultat pour les composantes de g^o. Autrement dit, si maintenant $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_j)$ et $\mathscr{E}' = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)$ avec $i \leqslant j$ (de sorte que $\alpha_i \geqslant \alpha_j$), et $g^o : \mathscr{E}_{z^o} \to \mathscr{E}'_{z^o}$ est un homomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (de dimension 1), il s'agit de montrer l'existence de f tel que $f_{z^o} = g^o$. Supposons par exemple $z^o \in U_0$. Choisissons des présentations $\mathscr{E} = (\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[z'], z^{-\alpha_j})$, $\mathscr{E}' = (\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[z'], z^{-\alpha_i})$, et $f = (f_0, f_\infty)$. Alors $g^o : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est la multiplication par une constante c, et on peut choisir $f_0 = c$, $f_\infty = cz'^{(\alpha_i - \alpha_j)}$.

Exercice 6.2.3. Adapter le raisonnement si $z^o = \infty$.

Supposons g^o inversible. Alors les blocs g^o_{ii} sont inversibles. Il suffit de voir que les blocs f_{ii} sont inversibles. Pour cela, on remarque que si $i = j$, l'espace des homomorphismes de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)$ dans lui-même est de dimension 1 (voir lemme 3.5.1(2)), de même que l'espace des homomorphismes des fibres en z^o correspondantes, donc la restriction en z^o, $f \mapsto f_{z^o}$, qui est surjective comme on vient de le voir, est bijective. En conclusion, g^o_{ii} se relève de manière unique en f_{ii}, et l'un est inversible si et seulement si l'autre l'est (relever l'inverse de g^o_{ii}, et vérifier, par unicité, qu'il vérifie les propriétés de l'inverse de f_{ii}). $\square$

6.3. Modification du type d'un fibré en un point z^o

Nous allons généraliser la proposition 6.1.3 dans le cas d'un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ de rang n.

Soit donc $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel de rang n sur $\mathbb{P}^1$ et soit $z^o \in \mathbb{P}^1$. Supposons d'abord que $z^o \in \mathbb{C}^*$, et commençons par définir l'analogue du fibré $\mathscr{E}'$. Il faut pour cela choisir un vecteur dans la fibre du fibré vectoriel en z^o. Si $\mathscr{E} = (\mathscr{E}(U_0), \mathscr{E}(U_\infty), \Psi_{0\infty})$ alors, puisque $z^o \in \mathbb{C}^*$, $\Psi_{0\infty}$ induit un isomorphisme $\Psi^o_{0\infty} : \mathscr{E}(U_0)/(z - z^o)\mathscr{E}(U_0) \to \mathscr{E}(U_\infty)/(z' - z'^o)\mathscr{E}(U_\infty)$. Si on choisit une présentation $(\mathbb{C}[z]^n, \mathbb{C}[z']^n, \Psi)$, la matrice de $\Psi^o_{0\infty}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}[z]^n/(z-z^o)\mathbb{C}[z]^n$ et $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}[z']^n/(z'-z'^o)\mathbb{C}[z']^n$ est $\Psi(z^o)$.

Si $e^o_0 \in \mathscr{E}(U_0)/(z-z^o)\mathscr{E}(U_0)$, on notera $e^o_\infty = \Psi^o_{0\infty}(e^o_0) \in \mathscr{E}(U_\infty)/(z'-z'^o)\mathscr{E}(U_\infty)$. Fixons donc un tel vecteur $e^o_0 \in \mathscr{E}(U_0)/(z-z^o)\mathscr{E}(U_0)$ et soit $L^o_0 = \mathbb{C}\cdot e^o_0$ la droite qu'il engendre, et de même L^o_∞ la droite $\Psi^o_{0\infty}(L^o_0)$. On pose

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(L^o\cdot z^o)(U_0) &\overset{\text{déf}}{=} \Big\{s'_0 \in \frac{1}{z-z^o}\mathscr{E}(U_0) \mid \text{rés}_{z^o}(s'_0) \in L^o_0\Big\} \\ \mathscr{E}(L^o\cdot z^o)(U_\infty) &\overset{\text{déf}}{=} \Big\{s'_\infty \in \frac{1}{z'-z'^o}\mathscr{E}(U_\infty) \mid \text{rés}_{z'^o}(s'_\infty) \in L^o_\infty\Big\}. \end{aligned}$$

Enfin on note $\Psi'_{0\infty}$ l'extension naturelle de $\Psi_{0\infty}$ à $\mathscr{E}(L^o\cdot z^o)(U_0)$: un élément s'_0 s'écrit $s_0/(z-z^o)$, aussi on pose $\Psi'_{0\infty}(s'_0) = \Psi_{0\infty}(s_0)/(z-z^o)$. Si $\text{rés}_{z^o}(s'_0) \in L^o_0$, cette formule montre que $\text{rés}_{z'^o}(s'_\infty) \in L^o_\infty$.

Proposition 6.3.1. *Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel muni d'une décomposition de Birkhoff-Grothendieck comme plus haut. Soit $z^o \in \mathbb{P}^1$ et L^o une droite de base e^o dans la fibre $\mathscr{E}_{z^o}$. Supposons que e^o ait une projection non nulle sur le terme $\mathscr{E}^{(r)}_{z^o}$. Si on note le type de $\mathscr{E}$ sous la forme $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_{n-n_r} > a_{n-n_r+1} = \cdots = a_n$, alors le type de $\mathscr{E}(L^o\cdot z^o)$ est égal à $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_{n-n_r} \geqslant a_{n-n_r+1}+1 > a_{n-n_r+2} = \cdots = a_n$.*

Considérons le « défaut de trivialité du fibré $\mathscr{E}$ » :

***Définition 6.3.2* (du défaut).** Soit $\mathscr{E}$ un fibré de rang n sur $\mathbb{P}^1$ de type $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$. Le *défaut* de $\mathscr{E}$ est l'entier $\delta(\mathscr{E}) = \sum_{i=1}^n (a_1 - a_i)$.

Le défaut est un entier $\geqslant 0$. Il est nul si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n$, autrement dit si et seulement si le fibré $\mathscr{E}$ est isomorphe au fibré $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a)^n$, pour un certain entier a.

On déduit de la proposition :

Corollaire 6.3.3. *Dans la situation de la proposition* 6.3.1, *supposons que $\delta(\mathscr{E}) > 0$. On a alors $\delta(\mathscr{E}(L^o\cdot z^o)) = \delta(\mathscr{E}) - 1$.*

Démonstration. En effet, puisque $\delta(E) > 0$, on a $r \geqslant 2$ et $a_1 > a_{n-n_r+1}$, de sorte que a_1 reste le maximum des éléments du type, et le calcul du défaut de $\mathscr{E}(L^o\cdot z^o)$ est alors immédiat. □

Démonstration de la proposition 6.3.1. Faisons la démonstration si $z^o \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 6.3.4. Adapter cette démonstration dans le cas où $z^o = 0$ ou celui où $z^o = \infty$ (et en profiter pour définir $\mathscr{E}(L^o\cdot z^o)$ dans ces deux cas).

Partons donc d'une décomposition $\mathscr{E} = \bigoplus_{i=1}^r \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)^{n_i}$ de $\mathscr{E}$ donnée par le théorème de Birkhoff-Grothendieck. Fixons une base $\boldsymbol{\varepsilon}^o = (\varepsilon^o_1, \ldots, \varepsilon^o_n)$ de $\mathscr{E}_{z^o}$ adaptée à la décomposition en blocs. Quitte à renuméroter les vecteurs de base qui se trouvent dans $\mathscr{E}^{(r)}_{z^o}$, on peut supposer que le vecteur e^o a une composante non nulle sur $\varepsilon^o_{n-n_r+1}$. Il existe alors un changement de base g^o tel que $g^o(\varepsilon^o_j) = \varepsilon^o_j$ si $j \neq n-n_r+1$ et $g^o(\varepsilon^o_{n-n_r+1}) = e^o$. Il est donc triangulaire supérieur par blocs (c'est la raison du choix de e^o avec projection non nulle dans $\mathscr{E}^{(r)}_{z^o}$), et les blocs diagonaux sont inversibles, avec en particulier $g^o_{ii} = \text{Id}$ si $i < r$.

D'après la proposition 6.2.2, on peut trouver un isomorphisme $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ tel que $f_{z^o} = g^o$, et par suite, prenant la décomposition image par f de la décomposition initial, on obtient une décomposition $\mathscr{E} = \bigoplus_i \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)$ telle que e^o soit contenu dans la fibre en z^o de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_r)$.

On peut donc supposer dès le départ que $\mathscr{E}$ est muni d'une décomposition de Birkhoff-Grothendieck et que e^o est dans le facteur $\mathscr{E}^{(r)}_{z^o}$. On note cette décomposition

$$\mathscr{E} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)^{n_i} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_r) \cdot e_{n-n_r+1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_r)^{n_r-1}.$$

On a alors $\mathscr{E}(L^o\cdot e^o) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)^{n_i} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_r)(1\cdot z^o) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_r)^{n_r-1}$ (la condition sur s'_0, et de même pour s'_∞, nous dit que les résidus sur les composantes autres que $e^o_{n-n_r+1} = e^o$ sont nuls, donc ces facteurs du fibré vectoriel ne sont pas modifiés).

Le calcul de la proposition 6.1.3 montre alors que

$$\mathscr{E}(L^o \cdot e^o) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)^{n_i} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_r + 1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_r)^{n_r-1},$$

ce qui est l'assertion voulue. □

6.4. Le théorème de Plemelj

Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$, $U \neq \mathbb{P}^1$ un ouvert de Zariski, et ∇ une connexion sur $\mathscr{E}(U)$. On suppose que ∇ est à pôles simples en $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$ relativement à $\mathscr{E}$.

***Théorème 6.4.1* (Plemelj).** *S'il existe $z^o \in \mathbb{P}^1 \smallsetminus U$ tel que la connexion ∇ satisfasse à la condition de Plemelj en z^o relativement à $\mathscr{E}$, alors il existe un fibré trivial $\mathscr{E}'$ relativement auquel ∇ n'a que des pôles simples.*

Commençons par expliquer la condition de Plemelj en z^o. Avant de la définir, il est bon de retenir qu'une partie de la condition est que le résidu $\mathrm{Rés}_{z^o}(\nabla, \mathscr{E})$ est un endomorphisme diagonalisable du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{E}_{z^o}$. Mais en général cette condition sur le résidu est insuffisante pour obtenir le théorème de Plemelj, et on introduit la condition plus forte que voici.

Supposons par exemple que $z^o \in U_0$. Choisissons une base $\boldsymbol{e}$ de $\mathscr{E}(U_0)$ et notons $A^{\boldsymbol{e}}$ la matrice de la dérivation ∇_{∂_z} dans cette base. Par hypothèse, cette matrice est à pôles simples (au pire) en tous les points de $U_0 \smallsetminus U \cap U_0$. Posons $\zeta = z - z^o$. La matrice de $A^{\boldsymbol{e}}$ est aussi la matrice de la dérivation relative à ζ dans la base $\boldsymbol{e}$. On peut écrire, au voisinage de $\zeta = 0$, $A^{\boldsymbol{e}}(\zeta) = \frac{1}{\zeta}(A_0 + \zeta A_1 + \cdots)$, où A_0 est la matrice de $\mathrm{Rés}_{z^o}(\nabla, \mathscr{E})$ dans la base $\boldsymbol{e}^o$ de $\mathscr{E}_{z^o}$ induite par $\boldsymbol{e}$. Le théorème 2.2.5 donne un changement de base $\mathcal{P}(\zeta)$, holomorphe au voisinage de $\zeta = 0$, tel que la matrice $B(\zeta)$ dans la nouvelle base soit de la forme $\frac{1}{\zeta}(A_0 + \zeta B_1 + \cdots + \zeta^\delta B_\delta)$ avec certains propriétés.

***Définition 6.4.2* (condition de Plemelj).** On dit que la connexion ∇ satisfait à la condition de Plemelj en z^o relativement à $\mathscr{E}$ si, avec les notations ci-dessus, la matrice A_0 est diagonalisable et si, *de plus*, on peut trouver un changement de base $\mathcal{P}(\zeta)$ au voisinage de $\zeta = 0$ dans lequel la matrice $B(\zeta)$ soit *égale* à A_0/ζ

Nous allons d'abord montrer :

Proposition 6.4.3. *Sous les conditions du théorème de Plemelj, soit $\delta(\mathscr{E})$ le défaut de $\mathscr{E}$. Si $\delta(\mathscr{E})>0$, il existe un fibré vectoriel $\mathscr{E}'$ tel que*

(1) $\delta(\mathscr{E}')=\delta(\mathscr{E})-1$,

(2) ∇ *est à pôles simples relativement à* $\mathscr{E}'$,

(3) ∇ *satisfait à la condition de Plemelj en* z^o *relativement à* $\mathscr{E}'$.

Démonstration. Soit z^o comme dans le théorème 6.4.1. Nous allons d'abord voir qu'il existe une décomposition $\mathscr{E}=\bigoplus_{i=1}^r \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_i)^{n_i}$ de $\mathscr{E}$ (on a $r\geqslant 2$ puisqu'on suppose $\delta(\mathscr{E})>0$) telle que, si $\mathscr{E}_{z^o}=\bigoplus_{i=1}^r \mathscr{E}_{z^o}^{(i)}$ est la décomposition de $\mathscr{E}_{z^o}$ induite par celle-ci, l'endomorphisme $\mathrm{Rés}_{z^o}(\nabla,\mathscr{E})$ ait un vecteur propre dans le facteur $\mathscr{E}_{z^o}^{(r)}$.

Puisque $\mathrm{Rés}_{z^o}(\nabla,\mathscr{E})$ est supposé diagonalisable, il existe un vecteur propre e^o dont la composante sur $\mathscr{E}_{z^o}^{(r)}$ n'est pas nulle (sinon, l'espace engendré par les vecteurs propres serait contenu dans $\mathscr{E}_{z^o}^{(1)}\oplus\cdots\oplus\mathscr{E}_{z^o}^{(r-1)}$). On note L^o la droite engendrée par e^o dans $\mathscr{E}_{z^o}$ et on applique alors la proposition 6.3.1. Puisque $\delta(\mathscr{E})>0$, le défaut du fibré $\mathscr{E}(L^o\cdot z^o)$ est égal à $\delta(\mathscr{E})-1$.

Nous allons maintenant vérifier que ∇ est encore à pôles simples relativement à $\mathscr{E}(L^o\cdot z^o)$ et vérifier que la condition de Plemelj en z^o est aussi satisfaite par ∇ relativement à $\mathscr{E}(L^o\cdot z^o)$. Encore une fois, supposons pour simplifier que $z^o\in\mathbb{C}^*$.

Exercice 6.4.4. Adapter la démonstration aux autres cas.

Partant d'une base $\boldsymbol{e}_0$ de $\mathscr{E}(U_0)$, on peut trouver un changement de base constant tel que, dans la nouvelle base, la matrice $\mathrm{Rés}_{z^o}(\nabla,\mathscr{E})$ soit diagonale (puisqu'il suffit de diagonaliser un endomorphisme diagonalisable de $\mathscr{E}_{z^o}$), et on la note A_0. Notons encore $\boldsymbol{e}_0$ une telle base de $\mathscr{E}(U_0)$, et numérotons-la de sorte que $e_{0,n}$ induise le vecteur propre e^o considéré plus haut dans $\mathscr{E}_{z^o}$. Faisons de même avec une base $\boldsymbol{e}_\infty$ de $\mathscr{E}(U_\infty)$. Alors $\mathscr{E}$ a la présentation $(\mathbb{C}[z]^n,\mathbb{C}[z']^n,\Psi)$, et $\mathscr{E}(L^o\cdot z^o)$ a la présentation

$$\Big(\mathbb{C}[z]^{n-1}\oplus\frac{1}{z-z^o}\mathbb{C}[z],\mathbb{C}[z']^{n-1}\oplus\frac{1}{z'-z'^o}\mathbb{C}[z'],\Psi\Big).$$

Si $A^{\boldsymbol{e}_0}$ est la matrice de ∇_{∂_z} dans la base $\boldsymbol{e}_0$, sa matrice dans la base $\boldsymbol{e}'_0=(e_{0,1},\dots,e_{0,n-1},e_{0,n}/(z-z^o))$ est (voir proposition 5.1.2(4))

$$A^{\boldsymbol{e}'_0}=\mathcal{Q}^{-1}A^{\boldsymbol{e}_0}\mathcal{Q}+\mathcal{Q}^{-1}\frac{d\mathcal{Q}}{dz},\qquad \mathcal{Q}=\mathrm{diag}\big(1,\dots,1,1/(z-z^o)\big),$$

puisque $\boldsymbol{e}'_0=\boldsymbol{e}_0\cdot\mathcal{Q}$. Ceci montre déjà que $A^{\boldsymbol{e}'_0}$ est encore à pôle simple en tout point de $U_0\smallsetminus(U\cap U_0)$ autre que z^o.

Regardons de plus près le comportement en z^o. Le terme $\mathcal{Q}^{-1}d\mathcal{Q}/dz$ est encore de la forme $C/(z-z^o)$ avec C diagonale (plus précisément $C=\mathrm{diag}(0,\dots,0,-1)$) et ne pose pas de problème. La matrice $\mathcal{Q}^{-1}A^{\boldsymbol{e}_0}\mathcal{Q}$ est obtenue en multipliant la dernière colonne de $A^{\boldsymbol{e}_0}$ par $1/(z-z^o)$ et la dernière ligne par $(z-z^o)$. En particulier, le terme diagonal (n,n) est inchangé. D'autre part, par le choix de la base $\boldsymbol{e}_0$, le résidu en z^o de la matrice $A^{\boldsymbol{e}_0}$ est diagonal, de sorte que la dernière colonne de $\mathcal{Q}^{-1}A^{\boldsymbol{e}_0}\mathcal{Q}$ n'a pas de pôle double, et finalement est à pôle simple en z^o, comme voulu. Mais...

Mais il n'est pas clair que le résidu de la matrice $A^{\boldsymbol{e}'_0}$ en z^o reste diagonalisable. En effet, l'opération précédente a ajouté des termes sur la dernière colonne de la matrice résidu, qui reste ainsi triangulaire supérieure, certes, mais peut-être pas diagonalisable. Et alors, il n'est pas clair que l'on puisse itérer le procédé pour diminuer le défaut, et arriver à un défaut nul, ce qui est le but de la manip.

C'est ici que la condition plus forte (condition de Plemelj) intervient. En effet, soit $\widetilde{\boldsymbol{e}}_0 = \boldsymbol{e}_0 \cdot \mathcal{P}$, avec $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \zeta\mathcal{P}_1 + \cdots$, un changement de base holomorphe qui, lorsqu'appliqué à la matrice $A^{\boldsymbol{e}_0}$ de la connexion, produit la nouvelle matrice de connexion A_0/ζ qui est diagonale. L'image du vecteur propre e^o par $\mathcal{P}_0$ est un vecteur propre de même valeur propre, aussi quitte à conjuguer $\mathcal{P}_0$ par une matrice constante, on peut supposer que cette image est égale à e^o. Par conséquent, on peut supposer que la dernière colonne de $\mathcal{P}_0$ (sauf le terme (n,n)) est nulle.

Par ailleurs, en appliquant le changement de base $\widetilde{\boldsymbol{e}}'_0 = \widetilde{\boldsymbol{e}}_0 \cdot \mathcal{Q}$ à la matrice de connexion A_0/ζ, le « mais... » de plus haut n'a plus lieu d'être, puisque la dernière colonne sauf le terme (n,n) de A_0/ζ est nulle, et on obtient encore une matrice de la forme $\widetilde{A}_0/\zeta$ avec $\widetilde{A}_0$ diagonale (si $A_0 = \mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, alors $\widetilde{A}_0 = \mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_n-1)$). Appliquant alors le changement de base $\widetilde{\boldsymbol{e}}'_0 = \boldsymbol{e}'_0 \cdot \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{Q}$ à $A^{\boldsymbol{e}'_0}$, c'est-à-dire le changement de base $\widetilde{\boldsymbol{e}}'_0 = \boldsymbol{e}_0\mathcal{P}\mathcal{Q}$ à la matrice $A^{\boldsymbol{e}_0}$, c'est-à-dire le changement de base $\widetilde{\boldsymbol{e}}'_0 = \widetilde{\boldsymbol{e}}_0\mathcal{Q}$ à A_0/ζ, on obtient donc la matrice $\widetilde{A}_0/\zeta$ qui est du type voulu. Il reste à vérifier que $\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{Q}$ est holomorphe au voisinage de $\zeta = 0$ pour montrer que la condition de Plemelj est satisfaite par $A^{\boldsymbol{e}'_0}$. Mais grâce à la première réduction ci-dessus, la dernière colonne de $\mathcal{P}$, sauf le terme (n,n), est divisible par ζ, et ici encore, le « mais... » disparaît. $\square$

Démonstration du théorème 6.4.1. On peut raisonner par récurrence descendante sur le défaut. La proposition précédente permet donc d'obtenir un fibré vectoriel de défaut nul relativement auquel la connexion ∇ est à pôles simples. On oublie maintenant la condition de Plemelj (qui n'est désormais plus utile à ce stade), et il suffit de vérifier que si ∇ est à pôles simples relativement à un fibré $\mathscr{E}$, elle est à pôles simples relativement à $\mathscr{E}(\ell)$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$. On applique pour cela, suivant les cas, la même méthode que dans les exercices 6.1.1 et 6.1.2. $\square$

LEÇON 7

12 MARS 2010

Résumé. On revient d'abord sur la condition de Plemelj, en faisant intervenir le défaut du fibré. On introduit la condition d'irréductibilité, qui permet de donner une majoration du défaut de tout fibré vectoriel relativement auquel la connexion est à pôles simples. Enfin on analyse plus en détail cette condition d'irréductibilité en la mettant en relation avec l'irréductibilité d'opérateurs différentiels.

7.1. Raffinement du théorème de Plemelj

Si on regarde de plus près la démonstration du théorème de Plemelj, et plus précisément de la proposition 6.4.3, on s'aperçoit que la condition de Plemelj peut être un peu affaiblie. En effet, partant d'un fibré $\mathscr{E}$ de défaut $\delta(E)$, nous avons effectué une récurrence en $\delta(E)$ étapes pour arriver à un fibré de défaut nul. À chaque étape, il a fallu nous assurer que le changement de base produit une matrice résidu diagonale, et c'est la dernière colonne de la matrice $A^{\boldsymbol{e}_0}$ (sauf l'élément (n,n)) qui peut poser problème. Par conséquent, si on fait seulement l'hypothèse que la dernière colonne de $A^{\boldsymbol{e}_0}$ (sauf l'élément (n,n)) s'annule à l'ordre $\delta(\mathscr{E})+1$ en z^o, le « mais » après le changement de base $\mathcal{Q}$ n'a pas lieu d'être pendant toute la récurrence, et la proposition se démontre sans passer par les changements de base $\mathcal{P}$. Mettons ceci en forme.

Soit ∇ une connexion à pôles simples relativement à un fibré vectoriel $\mathscr{E} = (\mathscr{E}(U_0), \mathscr{E}(U_\infty), \Psi_{0\infty})$ de rang $n \geqslant 2$. Fixons des bases $\boldsymbol{e}_0$ de $\mathscr{E}(U_0)$ et $\boldsymbol{e}_\infty$ de $\mathscr{E}(U_\infty)$. Les matrices de la connexion sont $A^{\boldsymbol{e}_0}$ et $A'^{\boldsymbol{e}_\infty}$. Soit $z^o \in \mathbb{P}^1 \smallsetminus U$. On supposera pour fixer les idées que $z^o \in \mathbb{C}^*$. On note $\zeta = z - z^o$.

***Définition 7.1.1* (condition de Plemelj à l'ordre N).** Si N est un entier $\geqslant 0$, on dira que ∇ satisfait à la condition de Plemelj à l'ordre N relativement à $\mathscr{E}$ en z^o s'il existe une matrice $\mathcal{P}(\zeta)$ holomorphe ainsi que son inverse au voisinage de $\zeta = 0$ de sorte que dans la base $\widetilde{\boldsymbol{e}}_0 = \boldsymbol{e}_0 \cdot \mathcal{P}(\zeta)$, la matrice de la connexion puisse s'écrire sous la forme $(A_0 + \zeta^N B(\zeta))/\zeta$, avec A_0 diagonalisabe et $B(\zeta)$ holomorphe au voisinage de $\zeta = 0$.

Cette condition implique aussi que le résidu $\mathrm{Rés}_{z^o}(\nabla, \mathscr{E})$ est diagonalisable, cette dernière étant équivalente, par le théorème de Levelt, à condition de Plemelj à l'ordre 1.

***Théorème 7.1.2* (de Plemelj raffiné).** *Supposons qu'il existe $z^o \in \mathbb{P}^1 \smallsetminus U$ tel que la connexion ∇ satisfasse à la condition de Plemelj relativement à $\mathscr{E}$ à l'ordre $\delta(\mathscr{E}) + 1$ en z^o. Il existe alors un fibré trivial $\mathscr{E}'$ relativement auquel ∇ est à pôles simples.*

Démonstration. On procède comme dans la démonstration du théorème de Plemelj (plus précisément la proposition 6.4.3). Au départ, la connexion satisfait à la condition de Plemelj à l'ordre $\delta(\mathscr{E}) + 1$. Après le changement de base $\boldsymbol{e}'_0 = \boldsymbol{e}_0 \cdot \mathcal{Q}$, la condition de Plemelj est satisfaite à l'ordre $\delta(\mathscr{E}) = \delta(\mathscr{E}') + 1$ relativement au fibré $\mathscr{E}'$. On peut donc itérer le processus de la proposition 6.4.3 pour arriver à un fibré de défaut nul relativement auquel la connexion est à pôles simples. On conclut alors comme dans le théorème de Plemelj. $\square$

L'inconvénient de la condition ci-dessus est qu'elle est difficilement vérifiable. La condition de Plemelj porte uniquement sur la connexion, alors que la condition ci-dessus porte sur la connexion et le fibré.

Nous allons maintenant introduire une autre condition sur la connexion, condition qui n'est pas localisée en un point z^o comme la condition de Plemelj, et qui permet de majorer *a priori* le défaut de *tout* fibré $\mathscr{E}$ par rapport auquel la connexion et à pôles simples.

7.2. La condition d'irréductibilité et le défaut

Soit $U \neq \mathbb{P}^1$ un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^1$ et soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel $(\mathscr{E}(U \cap U_0), \mathscr{E}(U \cap U_\infty), \Psi_{0\infty})$ de rang n sur U.

***Définition 7.2.1* (irréductibilité d'une connexion).** On dit que la connexion ∇ sur $\mathscr{E}(U)$ est *irréductible* si on ne peut pas trouver de base $\boldsymbol{e}_0 = (\boldsymbol{e}'_0, \boldsymbol{e}''_0)$ de $\mathscr{E}(U \cap U_0)$ et $\boldsymbol{e}_\infty = (\boldsymbol{e}'_\infty, \boldsymbol{e}''_\infty)$ de $\mathscr{E}(U \cap U_\infty)$ (avec dans les deux cas $n = n' + n''$) telles que les matrices Ψ, $A^{\boldsymbol{e}_0}$ et $A'^{\boldsymbol{e}_\infty}$ soient triangulaires supérieures par blocs (n', n'').

Remarquons d'abord qu'il suffit d'imposer la condition sur les matrices Ψ et $A^{\boldsymbol{e}_0}$. En effet, si Ψ et $A^{\boldsymbol{e}_0}$ sont simultanément triangulaires supérieures par blocs (n', n''), alors, sur $U \cap U_0 \cap U_\infty$, la matrice $A'^{\boldsymbol{e}_\infty}$ donnée par la formule de la proposition 5.2.2 est encore triangulaire supérieure par blocs (n', n''). Son bloc inférieur gauche, qui est une matrice $n'' \times n'$ à coefficients dans $\mathscr{O}(U \cap U_\infty)$ est nul quand on le considère comme à coefficients dans $\mathscr{O}(U \cap U_0 \cap U_\infty)$. Il est donc nul.

Soit maintenant ∇ une connexion sur un fibré $\mathscr{E}(U)$. Notons m le cardinal de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$ (nombre de pôles possibles de ∇, qu'on suppose $\geqslant 1$) et posons

$$R = \frac{n(n-1)(m-2)}{2}.$$

Proposition 7.2.2. *Dans ces conditions, si ∇ est irréductible, alors le défaut $\delta(\mathscr{E})$ de tout fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{P}^1$ relativement auquel ∇ est à pôles simples satisfait à l'inégalité*

$$\delta(\mathscr{E}) \leqslant R.$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que $n \geqslant 2$, sinon les deux membres de l'inégalité sont nuls et il n'y a rien à démontrer. Nous allons montrer la contraposée de l'assertion voulue, à savoir que, si $\delta(\mathscr{E}) > R$ pour un certain fibré $\mathscr{E}$, alors on peut trouver une base $\boldsymbol{e}_0$ dans laquelle Ψ et $A^{\boldsymbol{e}_0}$ sont triangulaires supérieures par blocs de taille non nulle.

Soit donc $\mathscr{E}$ satisfaisant à $\delta(\mathscr{E}) > R$ et soit $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_n)$ une décomposition de Birkhoff-Grothendieck de $\mathscr{E}$. Il existe alors k^o tel que $a_{k^o} - a_{k^o+1} > m-2$. Sinon, pour tout $k = 1, \dots, n-1$, on aurait $a_k - a_{k+1} \leqslant m-2$, et

$$\delta(\mathscr{E}) = \sum_{i=1}^{n}(a_1 - a_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(a_j - a_{j+1}) \leqslant (m-2)\sum_{i=1}^{n}(i-1) = R,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\delta(\mathscr{E}) > R$. Fixons donc k^o tel que $a_{k^o} - a_{k^o+1} > m-2$. Alors pour tout $i \leqslant k^o$ et tout $j \geqslant k^o+1$, on a aussi $a_i - a_j > m-2$, puisque $a_i \geqslant a_{k^o}$ et $a_j \leqslant a_{k^o+1}$.

Soit $z^o \in \mathbb{P}^1 \smallsetminus U$ un pôle possible de ∇. Supposons pour simplifier que $z^o \in U_0$. On munit chaque fibré $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ d'une connexion $\widetilde{\nabla}_i$ à pôle en z^o uniquement, celui-ci étant simple. Dans la présentation $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i) = (\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[z'], z^{-a_i})$, cette connexion est donnée par un couple de matrices 1×1, qu'on note $(\widetilde{A}_i^{\boldsymbol{e}_0}, \widetilde{A}_i^{\boldsymbol{e}_\infty})$ (ce sont simplement des fractions rationnelles), avec (voir l'exercice 6.1.2)

$$\widetilde{A}_i^{\boldsymbol{e}_0} = -\frac{a_i}{z - z^o}, \quad \widetilde{A}_i^{\boldsymbol{e}_\infty} = \frac{a_i z^2}{z - z^o} - a_i z.$$

Dans la présentation de $\mathscr{E}$ induite par la décomposition, c'est-à-dire $\big(\mathbb{C}[z]^n, \mathbb{C}[z']^n, \Psi = \operatorname{diag}(z^{-a_1}, \dots, z^{-a_n})\big)$ dans les bases $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_\infty$, on obtient une connexion $\widetilde{\nabla}$ à pôle simple en z^o uniquement, de matrices $\widetilde{A}^{\boldsymbol{e}_0} = \operatorname{diag}(\widetilde{A}_1^{\boldsymbol{e}_0}, \dots, \widetilde{A}_n^{\boldsymbol{e}_0})$ et $\widetilde{A}'^{\boldsymbol{e}_\infty} = \operatorname{diag}(\widetilde{A}_1'^{\boldsymbol{e}_\infty}, \dots, \widetilde{A}_n'^{\boldsymbol{e}_\infty})$.

Considérons la différence $\nabla - \widetilde{\nabla}$. Les deux matrices $C^{\boldsymbol{e}_0} \overset{\text{déf}}{=} A^{\boldsymbol{e}_0} - \widetilde{A}^{\boldsymbol{e}_0}$ et $C'^{\boldsymbol{e}_\infty} \overset{\text{déf}}{=} A'^{\boldsymbol{e}_\infty} - \widetilde{A}'^{\boldsymbol{e}_\infty}$ sont reliées par

$$C'^{\boldsymbol{e}_\infty} = -z^2 \Psi C^{\boldsymbol{e}_0} \Psi^{-1},$$

puisque le terme $z^2 \frac{d\Psi}{dz}\Psi^{-1}$ de la proposition 5.2.2 disparaît par soustraction. Notons maintenant $0, z_1, \dots, z_r, \infty$ les pôles de ∇ et $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_r, \nu_\infty$ leur multiplicité, qui vaut 1 (pôle simple) ou 0 (pas de pôle). On a $\nu_0 + \cdots + \nu_\infty = m$. On posera aussi $z_i' = 1/z_i$ pour $i = 1, \dots, r$. Alors $F_0 = z^{\nu_0}\prod_{i=1}^r (z - z_i)^{\nu_i} C^{\boldsymbol{e}_0}$ n'a plus de pôle, de même que $F_\infty = z'^{\nu_\infty}\prod_{i=1}^r (z' - z_i')^{\nu_i} C'^{\boldsymbol{e}_\infty}$, et on a

$$F_\infty = -z'^{\nu_\infty}\prod_{i=1}^r (z' - z_i')^{\nu_i} z^2 z^{-\nu_0} \prod_{i=1}^r (z - z_i)^{-\nu_i} \Psi F_0 \Psi^{-1},$$

c'est-à-dire

$$F_\infty = c z^{2-m} \Psi F_0 \Psi^{-1}$$

pour une certaine constante $c \neq 0$. Ceci exprime que (F_0, F_∞) est un homomorphisme F du fibré $\mathscr{E}$ (matrice Ψ) dans le fibré $\mathscr{E}(m-2)$ (matrice $z^{2-m}\Psi$, ou aussi $cz^{2-m}\Psi$). Notons F_{ij} la composante $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_j+m-2)$. On sait que $F_{ij}=0$ si $a_i > a_j+m-2$. Reprenant la définition de k^o, on voit que $F_{ij}=0$ dès que $i \leqslant k^o$ et $j \geqslant k^o+1$. Par conséquent, les matrices F_0 et F_∞ sont simultanément triangulaires supérieures par blocs $(k^o, n-k^o)$. Il en est de même de $C^{\boldsymbol{e}_0}$ et $C'^{\boldsymbol{e}_\infty}$, puis de $A^{\boldsymbol{e}_0}$ et $A'^{\boldsymbol{e}_\infty}$ puisque $\widetilde{A}^{\boldsymbol{e}_0}$ et $\widetilde{A}'^{\boldsymbol{e}_\infty}$ sont diagonales. □

Remarque 7.2.3. On voit en particulier que si ∇ est une connexion irréductible à pôles simples relativement à un fibré $\mathscr{E}$ de rang $n \geqslant 2$, alors pour que le défaut de ce fibré ne soit pas trivial il est nécessaire que le nombre de pôles m soit $\geqslant 3$.

7.3. Comment comprendre la condition d'irréductibilité

Nous allons montrer plusieurs facettes de la condition d'irréductibilité, et donner des exemples de systèmes différentiels irréductibles. Dans un premier temps, nous allons revenir au cas des systèmes différentiels à coefficients dans le corps $\mathbb{C}(z)$ des fractions rationnelles en z, ou de manière équivalentes aux dérivations sur les $\mathbb{C}(z)$-espaces vectoriels de dimension finie. En remplaçant l'anneau $\mathscr{O}(U)$ par le corps $\mathbb{C}(z)$ on ne précise plus les pôles des changements de base possibles, et on se permet d'introduire des « singularités apparentes » dans les systèmes différentiels. Nous verrons qu'en ce qui concerne la condition d'irréductibilité, ceci est inoffensif (par contre, pour le problème de Riemann-Hilbert, ça ne l'est pas du tout).

7.3.a. Le lemme du vecteur cyclique. On appelle $\mathbb{C}(z)$-*espace vectoriel différentiel* tout $\mathbb{C}(z)$-espace vectoriel E de dimension finie[(1)] muni d'une dérivation ∇_{∂_z} (même définition qu'en 5.1.1). Il sera utile d'introduire une notation plus algébrique.

Pour simplifier, on notera K le corps $\mathbb{C}(z)$. On considère l'anneau *non commutatif* $K\langle\partial\rangle$ formé des polynômes en ∂ (nom donné à la nouvelle variable) à coefficients dans K, muni du produit pour lequel $\partial \cdot f = f \cdot \partial + df/dz$ pour tout $f \in K$ (comparer avec l'exercice 1.2.4(1)). C'est l'anneau des *opérateurs différentiels d'une variable à coefficients dans K*. C'est un anneau *non commutatif*, et nous allons nous intéresser à certains $K\langle\partial\rangle$-modules à gauche.

Exercice 7.3.1. Montrer que tout élément $P \in K\langle\partial\rangle$ s'écrit *de manière unique* sous la forme
$$P = a_n\partial^n + \cdots + a_1\partial + a_0, \quad a_i \in K,\ a_n \neq 0.$$
Montrer que P peut aussi s'écrire de manière unique sous la forme $P = \partial^m b_m + \cdots + b_1\partial + b_0$ avec $b_i \in K$ et $b_m \neq 0$, et que, en comparant les deux écritures, on a $m=n$ et $a_n = b_n$. On note $n = \deg_\partial P$.

Montrer sur un exemple ($\deg_\partial P = 1$) qu'en général $a_i \neq b_i$ pour $i < n$.

(1) On supposera toujours dans la suite cette propriété de dimension finie, et on ne la mentionnera plus.

Montrer que si $P = P_1P_2$, on a $\deg_\partial P = \deg_\partial P_1 + \deg_\partial P_2$. En déduire que si $P_1P_2 = 0$, alors P_1 ou P_2 est nul.

Soit E un K-espace vectoriel différentiel. Alors E est un $K\langle\partial\rangle$-module à gauche, en faisant agir le produit de deux opérateurs sur E par la composition de ceux-ci, et en précisant que l'action de K est l'action naturelle de K-espace vectoriel, et celle de ∂ se fait par ∇_{∂_z}. Par composition, on obtient l'action de tout polynôme de $K\langle\partial\rangle$.

***Exemple 7.3.2*.** Soit $P \neq 0$ un opérateur différentiel dans $K\langle\partial\rangle$. On note (P) l'ensemble de tous les produits QP pour Q dans $K\langle\partial\rangle$. Autrement dit, (P) est l'idéal à gauche de $K\langle\partial\rangle$ engendré par P. Le quotient $E = K\langle\partial\rangle/(P)$ est encore un module à gauche sur $K\langle\partial\rangle$.

C'est aussi un K-espace vectoriel de dimension finie. En effet, tout opérateur P s'écrit sous la forme $a_n\partial^n + \cdots + a_0$ avec $a_n \neq 0$ dans K. Puisque K est un corps, on peut diviser les coefficients par a_n et écrire $P = a_n \cdot P'$. Toujours parce que a_n est inversible dans K, l'idéal à gauche (P) est égal à l'idéal à gauche (P') (en utilisant que tout $Q \in K\langle\partial\rangle$ peut être divisé *à droite* par a_n). On peut donc supposer dès le début que $a_n = 1$.

Alors je dis que les classes de $1, \partial, \dots, \partial^{n-1}$ forment une K-base de E. Il s'agit de voir que, pour tout $k \geqslant n$, on peut écrire

$$(*)_k \qquad \partial^k = \alpha_0^{(k)} + \alpha_1^{(k)}\partial + \cdots + \alpha_{n-1}^{(k)}\partial^{n-1} + Q_kP$$

pour certains $\alpha_i^{(k)} \in K$ et $Q_k \in K\langle\partial\rangle$.

Pour $k = n$, on écrit $\partial^n = -(a_0 + \cdots + a_{n-1}\partial^{n-1}) + P$. Si on a montré $(*)_k$, on montre $(*)_{k+1}$ en écrivant (on pose $\alpha' = d\alpha/dz$ pour simplifier)

$$\begin{aligned}
\partial^{k+1} &= \partial\partial^k = \partial(\alpha_0^{(k)} + \alpha_1^{(k)}\partial + \cdots + \alpha_{n-1}^{(k)}\partial^{n-1}) + \partial Q_kP\\
&= \big(\alpha_0^{(k)} + \alpha_1^{(k)}\partial + \cdots + \alpha_{n-1}^{(k)}\partial^{n-1}\big)\partial + \big(\alpha_0'^{(k)} + \alpha_1'^{(k)}\partial + \cdots + \alpha_{n-1}'^{(k)}\partial^{n-1}\big) + \partial Q_kP\\
&= \alpha_0'^{(k)} + (\alpha_0^{(k)} + \alpha_1'^{(k)})\partial + \cdots + (\alpha_{n-2}^{(k)} + \alpha_{n-1}'^{(k)})\partial^{n-1} + \alpha_{n-1}^{(k)}\partial^n + \partial Q_kP\\
&= (\alpha_0'^{(k)} - \alpha_{n-1}^{(k)}a_0) + \cdots + (\alpha_{n-2}^{(k)} + \alpha_{n-1}'^{(k)} - \alpha_{n-1}^{(k)}a_{n-1})\partial^{n-1} + (\alpha_{n-1}^{(k)} + \partial Q)P,
\end{aligned}$$

qui est de la forme voulue.

Nous allons montrer une réciproque.

***Proposition 7.3.3* (lemme du vecteur cyclique).** *Soit E un K-espace vectoriel différentiel de dimension n, c'est-à-dire un $K\langle\partial\rangle$-module à gauche qui est aussi de dimension finie n comme K-espace vectoriel. Il existe alors un élément $e \in E$ tel que $e, \partial e, \dots, \partial^{n-1}e$ forment une base de E sur K.*

On dit alors que e est un *vecteur cyclique* de E. On a vu dans l'exemple précédent que la classe de 1 dans $K\langle\partial\rangle/(P)$ est un vecteur cyclique. Réciproquement, si E admet un vecteur cyclique e, alors, en écrivant $\partial^n e = -(a_0 + \cdots + a_{n-1}\partial^{n-1})e$, on trouve une relation $Pe = 0$. On en déduit une application K-linéaire

$$K\langle\partial\rangle/(P) \longrightarrow E, \qquad [1] \longmapsto e$$

entre deux K-espaces vectoriels qui ont même dimension. Elle est clairement surjective (elle envoie la K-base $[1], \dots, [\partial^{n-1}]$ sur la K-base $e, \dots, \partial^{n-1}e$) donc bijective. On voit ainsi qu'à tout K-espace vectoriel différentiel est associé un opérateur (peut-être pas de manière unique, le vecteur cyclique n'étant pas unique a priori).

Démonstration de la proposition 7.3.3. Soit $e_1, \dots, e_n$ une K-base de E. Pour $s \in \mathbb{C}$ qu'on va déterminer plus tard (on le considère pour le moment comme une indéterminée), on pose, pour $i = 1, \dots, n$,

$$\widetilde{e}_i = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(s-z)^k}{k!}\, \partial^k e_i.$$

Les $\widetilde{e}_i$ sont des éléments de E. Cette expression est construite de façon que, par télescopage,

$$\partial \widetilde{e}_i = \frac{(s-z)^n}{n!}\, \partial^n e_i,$$

donc $\partial^k \widetilde{e}_i$ est multiple de $(z-s)$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Posons ensuite

$$\widetilde{e} = \widetilde{e}_1 + (z-s)\widetilde{e}_2 + \cdots + \frac{(z-s)^{n-1}}{(n-1)!}\, \widetilde{e}_n.$$

Modulo $(s-z)$, on a $\widetilde{e} = e_1, \dots, \partial^{n-1}\widetilde{e} = e_n$. Le déterminant de la matrice P telle que $(\widetilde{e}, \dots, \partial^{n-1}\widetilde{e}) = (e_1, \dots, e_n) \cdot P$ est un polynôme en s à coefficients dans K. Il n'est pas identiquement nul, puisqu'en l'évaluant en $s = z$ on obtient la valeur 1. Il a au plus un nombre fini de racines dans $\mathbb{C}$. On choisit maintenant $s_o \in \mathbb{C}$ qui n'est pas une racine. Alors $\det P(s_o) \in K \smallsetminus \{0\}$, donc $P(s_o) \in \mathrm{GL}_n(K)$ et $(\widetilde{e}, \dots, \partial^{n-1}\widetilde{e})$ est une base de E, comme voulu. $\square$

7.3.b. Irréductibilité et factorisation d'opérateurs. Soit E un K-système différentiel, c'est-à-dire un $K\langle\partial\rangle$-module à gauche qui est aussi un K-espace vectoriel de dimension finie. On appelle sous-système différentiel un sous-$K\langle\partial\rangle$-module à gauche F qui est aussi un K-espace vectoriel de dimension finie. Dit autrement, F est un sous-K-espace vectoriel de E qui satisfait à $\partial(F) \subset F$.

Définition 7.3.4.

(1) On dit qu'un K-système différentiel E est *irréductible* s'il n'admet pas de sous-K-système différentiel F de dimension > 0 et distinct de E.

(2) On dit qu'un opérateur différentiel $P \in K\langle\partial\rangle$ est *irréductible* si on ne peut pas le décomposer en produit $P = P_1P_2$ où P_1 et P_2 sont de degrés > 0 par rapport à ∂.

Théorème 7.3.5. *Soit E un K-espace vectoriel différentiel mis sous la forme $K\langle\partial\rangle/(P)$ à l'aide d'un vecteur cyclique. Alors E est irréductible si et seulement si P est irréductible.*

Ce théorème montre que la notion d'irréductibilité d'un K-espace vectoriel différentiel se ramène à la notion plus classique d'irréductibilité d'un polynôme (dans un cadre non commutatif cependant).

Démonstration. Montrons l'implication $\Rightarrow$ en raisonnant par contraposée. Si $P = P_1P_2$ avec $\deg_\partial P_1 = n_1 > 0$ et $\deg_\partial P_2 = n_2 > 0$, nous allons montrer que $E = K\langle\partial\rangle/(P)$ a un sous-K-espace vectoriel différentiel de rang n_1.

Soit ε la classe de P_2 dans E. Alors $\varepsilon \neq 0$, c'est-à-dire $P_2 \notin (P)$. En effet, si on avait $P_2 = QP$ avec $Q \in K\langle\partial\rangle$, on en déduirait $\deg_\partial P_2 = \deg_\partial Q + \deg_\partial P \geqslant \deg_\partial P$, alors que $\deg_\partial P_2 = \deg_\partial P - \deg_\partial P_1 < \deg_\partial P$. On a d'autre part $P_1\varepsilon = 0$ puisque $P_1P_2 \in (P)$. De plus, il n'existe pas de relation $Q\varepsilon = 0$ avec $\deg_\partial Q < \deg_\partial P_1$, sinon on aurait $QP_2 \in (P)$, et encore une fois une contradiction en considérant les degrés. Ceci implique que le $K\langle\partial\rangle$-module différentiel engendré par ε est un K-espace vectoriel de dimension n_1, de base $\varepsilon, \partial\varepsilon, \dots, \partial^{n_1-1}\varepsilon$.

Montrons maintenant $\Leftarrow$, encore une fois par contraposée. Commençons par remarquer que, dans un K-espace vectoriel différentiel F de dimension m, tout élément est annulé par un opérateur différentiel non nul de degré $\leqslant m$. En effet, soit $f \in F$. Le sous-espace vectoriel engendré par la famille $f, \partial f, \dots, \partial^k f, \dots$ est de dimension finie, disons p, et $p \leqslant m$. Toute famille à $p+1$ éléments satisfait une relation linéaire sur K, donc il existe une relation $(a_p\partial^p + \cdot + a_0)f = 0$ avec au moins un des a_i non nuls.

Supposons maintenant que E admette un sous-K-espace vectoriel différentiel E_1 de rang n_1, avec $0 < n_1 < n$. Alors E/E_1 est un K-espace vectoriel différentiel de rang $n_2 = n - n_1$. Soit $[1]$ la classe de 1 dans E. Son image dans E/E_1 satisfait une équation différentielle de degré $\leqslant n_2$, ce qui signifie qu'il existe P_2 non nul de degré $\leqslant n_2$ tel que $P_2[1] \in E_1$. Il existe maintenant P_1 non nul de degré $\leqslant n_1$ tel que $P_1(P_2[1]) = 0$ dans E, ce qui signfie que $P_1P_2 = QP$ pour un certain $Q \in K\langle\partial\rangle$. On a donc

$$n = n_1 + n_2 \geqslant \deg_\partial P_1 + \deg_\partial P_2 = \deg_\partial Q + \deg_\partial P = \deg_\partial Q + n$$

et ceci implique que $\deg_\partial Q = 0$, c'est-à-dire $Q \in K$, et $\deg_\partial P_1 = n_1$, $\deg_\partial P_2 = n_2$. Puisque P_1 et P_2 sont non nuls, il en est de même de P_1P_2 (*cf.* exercice 7.3.1). On peut donc écrire $P = P_1'P_2$, avec $P_1' = (1/Q)P_1$ de degré n_1 et P_2 de degré $n_2 = n - n_1$. $\square$

Exercice 7.3.6. On considère l'équation hypergéométrique de l'exemple 1.1.9, et on suppose que les nombres $a, b, c-a, c-b$ ne sont pas entiers. Montrer que dans ce cas l'opérateur hypergéométrique est irréductible.

LEÇON 8

19 MARS 2010

Résumé. On compare d'abord les notions d'irréductibilité pour les connexions et pour les $\mathbb{C}(z)$-espaces vectoriels différentiels. On donne ensuite la démonstration du théorème de Bolibroukh et Kostov, qui donne une réponse positive au problème de Riemann-Hilbert lorsque la connexion est à singularités régulières et irréductible.

8.1. Comparaison de diverses notion d'irréductibilité

Soit $U \neq \mathbb{P}^1$ un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^1$ et ∇ une connexion sur un fibré $\mathscr{E}(U)$. Nous avons introduit la notion d'irréductibilité de la connexion (définition 7.2.1).

Si ∇ est une connexion sur $\mathscr{E}(U)$, alors ∇ est déterminée par les deux dérivations ∇_{∂_z} (sur $\mathscr{E}(U \cap U_0)$) et $\nabla_{\partial_{z'}}$ (sur $\mathscr{E}(U \cap U_\infty)$). Considérons maintenant le K-espace vectoriel E formé de toutes les combinaisons à coefficients dans $K = \mathbb{C}(z)$ d'éléments de $\mathscr{E}(U \cap U_0)$. Si $\boldsymbol{e}_0$ est une base de $\mathscr{E}(U \cap U_0)$ sur $\mathscr{O}(U \cap U_0)$, E est simplement le $\mathbb{C}(z)$-espace vectoriel de base $\boldsymbol{e}_0$. Il est muni d'une dérivation ∇_{∂_z}, qui est simplement la dérivation de matrice égale à la matrice $A^{\boldsymbol{e}_0}$ de ∇_{∂_z} dans la base $\boldsymbol{e}_0$ de $\mathscr{E}(U \cap U_0)$. Ainsi, considérer E avec cette dérivation consiste à « oublier » que $A^{\boldsymbol{e}_0}$ est à pôles précisément dans $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$. En conséquence, E est un K-espace vectoriel différentiel, c'est-à-dire un $K\langle\partial\rangle$-module à gauche qui est de dimension finie comme K-espace vectoriel.

Proposition 8.1.1. *Dans ces conditions, la connexion ∇ est irréductible si et seulement si E est un K-espace vectoriel différentiel irréductible.*

Cette proposition nous dit donc que l'irréductibilité d'une connexion définie sur un ouvert U peut se tester en prenant des coefficients dans K, situation dans laquelle on peut utiliser le lemme du vecteur cyclique et le théorème 7.3.5 (ce qu'on ne pourrait pas faire sur $U \cap U_0$, en général), et travailler avec un opérateur différentiel. Ceci permet de fournir un algorithme pour tester l'irréductibilité d'une connexion :

(1) trouver un vecteur cyclique de E,
(2) calculer l'opérateur minimal $P \in K\langle\partial\rangle$ qui l'annule,
(3) tester la divisibilité de P par un opérateur de degré strictement plus petit.

Démonstration de la proposition 8.1.1. Considérons la présentation standard $\mathscr{E}(U) = (\mathscr{E}(U\cap U_0), \mathscr{E}(U\cap U_\infty), \mathrm{Id})$, soient $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_\infty$ des bases des deux termes et soient $A^{\boldsymbol{e}_0}, A'^{\boldsymbol{e}_\infty}$ les matrices des dérivations $\nabla_{\partial_z}, \nabla_{\partial_{z'}}$ dans ces bases. On sait que $A'^{\boldsymbol{e}_\infty} = -z^2 A^{\boldsymbol{e}_0}$ (proposition 5.2.2). On voit ainsi que la connexion ∇ est irréductible si et seulement si $A^{\boldsymbol{e}_0}$ n'est pas équivalente à une matrice triangulaire supérieure par blocs de taille non nulle (voir aussi ce qui suit la définition 7.2.1).

Nous allons raisonner par contraposée. Tout d'abord, il est clair que, si $A^{\boldsymbol{e}_0}$ devient triangulaire supérieure par blocs par un changement de base $\mathcal{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathscr{O}(U \cap U_0))$, alors $A^{\boldsymbol{e}_0}$ devient triangulaire supérieure par blocs par un changement de base dans $\mathrm{GL}_n(K)$, puisque $\mathrm{GL}_n(\mathscr{O}(U \cap U_0)) \subset \mathrm{GL}_n(K)$. C'est la réciproque qui est moins claire.

Supposons que $A^{\boldsymbol{e}_0}$ devienne triangulaire supérieure par blocs par un changement de base dans $\mathcal{P} \in \mathrm{GL}_n(K)$. Alors il existe un ouvert de Zariski V sur lequel $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^{-1}$ n'ont pas de pôle, et on peut supposer, quitte à rétrécir V, que $V \subset U\cap U_0$. Donc $A^{\boldsymbol{e}_0}$ devient triangulaire supérieure par blocs par un changement de base $\mathcal{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathscr{O}(V))$.

Si $\mathscr{E}'(V)$ est le $\mathscr{O}(V)$-module engendré par les premiers vecteurs de la nouvelle base, la dérivation ∇_{∂_z} envoie donc $\mathscr{E}'(V)$ dans lui-même. Il suffit alors de montrer :

Lemme 8.1.2. *Soit $\mathscr{E}(U)$ un fibré vectoriel sur $U \subsetneqq \mathbb{P}^1$, et soit $V \subset U$ un ouvert de Zariski. Soit $\mathscr{E}(V)$ la restriction de $\mathscr{E}(U)$ à V, formée des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathscr{O}(V)$ des éléments de $\mathscr{E}(U)$ (on a $\mathscr{E}(U) \subset \mathscr{E}(V)$ car $\mathscr{O}(U) \subset \mathscr{O}(V)$).*

Alors, si $\mathscr{E}'(V)$ est un sous-fibré vectoriel de V, le $\mathscr{O}(U)$-module $\mathscr{E}''(U) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{E}'(V) \cap \mathscr{E}(U)$ (intersection prise dans $\mathscr{E}(V)$) est libre de rang égal au rang de $\mathscr{E}'(V)$ sur $\mathscr{O}(V)$, et toute base de $\mathscr{E}''(U)$ induit une base de $\mathscr{E}'(V)$ par restriction, autrement dit, il est raisonnable d'écrire $\mathscr{E}''(U) = \mathscr{E}'(U)$.

Admettons ce lemme (qui ne fait pas intervenir de connexion) un instant et terminons la preuve de la proposition. On a $\nabla_{\partial_z}\mathscr{E}(U \cap U_0) \subset \mathscr{E}(U \cap U_0)$ (par définition) et $\nabla_{\partial_z}\mathscr{E}'(V) \subset \mathscr{E}'(V)$ (par hypothèse de réductibilité sur V). On en déduit, en posant $\mathscr{E}'(U \cap U_0) = \mathscr{E}'(V) \cap \mathscr{E}(U \cap U_0)$ (intersection dans $\mathscr{E}(V)$), que $\nabla_{\partial_z}\mathscr{E}'(U \cap U_0) \subset \mathscr{E}'(U \cap U_0)$. Le lemme nous dit que $\mathscr{E}'(U \cap U_0)$ est un sous-fibré de $\mathscr{E}(U \cap U_0)$ de même rang que $\mathscr{E}'(V)$, c'est-à-dire strictement compris entre 0 et n. On en déduit que ∇_{∂_z} est réductible sur $U \cap U_0$, si on interprète la définition d'irréductibilité en disant que $\mathscr{E}(U \cap U_0)$ n'a pas de sous-fibré de rang strictement compris entre 0 et n, qui soit stable par ∇_{∂_z}. □

Démonstration du lemme 8.1.2. Considérons $\mathscr{E}''(U) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{E}'(V) \cap \mathscr{E}(U)$, où l'intersection est prise dans $\mathscr{E}(V)$. C'est clairement un sous-$\mathscr{O}(U)$-module de $\mathscr{E}(U)$. Il s'agit de voir qu'il est libre de rang égal à celui de $\mathscr{E}'(V)$ comme $\mathscr{O}(V)$-module.

Voyons d'abord que $\mathscr{E}''(U)$ est un $\mathscr{O}(U)$-module libre de rang inférieur ou égal à celui de $\mathscr{E}(U)$. On peut pour cela utiliser le lemme 3.3.3 si on sait que l'anneau $\mathscr{O}(U)$ est principal. Nous allons le montrer lorsque $U \subset U_0$, en laissant le cas général en exercice (dans la preuve de la proposition ci-dessus, on travaille avec l"ouvert $U \cap U_0$, de sorte que cette démonstration nous suffit). On sait que l'anneau $\mathbb{C}[z] = \mathscr{O}(U_0)$ est principal. Soit alors $(f_1, \ldots, f_p)$ un idéal de $\mathscr{O}(U)$. On écrit $f_i = p_i/q_i$, avec

$p_i, q_i \in \mathbb{C}[z]$ et $q_i \not\equiv 0$ ne s'annule pas sur U, donc q_i et $1/q_i$ sont dans $\mathscr{O}(U)$. Soit $q = \prod_{i=1}^p q_i$. On écrit $f_i = g_i/q$, avec $g_i \in \mathbb{C}[z]$. Puisque $\mathbb{C}[z]$ est principal, l'idéal $(g_1, \ldots, g_p)$ est engendré par un élément $g \in \mathbb{C}[z]$. On en déduit que $(f_1, \ldots, f_p)$ est engendré par $f \overset{\text{déf}}{=} g/q$.

Montrons maintenant que le rang de $\mathscr{E}''(U)$ est égal à celui de $\mathscr{E}'(V)$. Nous allons montrer que la restriction $\mathscr{E}''(V)$ coïncide avec $\mathscr{E}'(V)$. Que l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathscr{O}(V)$ des éléments de $\mathscr{E}''(U)$ soit contenu dans $\mathscr{E}'(V)$ est évident par définition. Réciproquement, soit $\boldsymbol{e}'$ une base de $\mathscr{E}'(V)$. Exprimée sur une base $\boldsymbol{e}$ de $\mathscr{E}(U)$, ses coefficients sont dans $\mathscr{O}(V)$. Il existe alors un polynôme $p(z)$ qui s'annule au plus sur $U \smallsetminus V$, tel que $p(z)\boldsymbol{e}' \subset \mathscr{E}(U)$, donc $p(z)\boldsymbol{e}' \subset \mathscr{E}''(U)$. En inversant $p(z)$, on obtient $\boldsymbol{e}' \subset \mathscr{E}''(V)$, et par suite $\mathscr{E}'(V) \subset \mathscr{E}''(V)$. On a donc $\mathscr{E}'(V) = \mathscr{E}''(V)$, d'où l'égalité des rangs. $\square$

8.2. Retour au problème de Riemann-Hilbert

Rappelons les diverses formulations équivalentes du problème de Riemann-Hilbert. Soit $U \subsetneqq \mathbb{P}^1$ un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^1$ et soit ∇ une connexion sur un fibré $\mathscr{E}(U)$. On pose l'une des questions équivalentes suivantes (problème de Riemann-Hilbert), et une condition nécessaire pour que que la réponse soit positive est que ∇ soit à *singularités régulières* aux points de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$. Nous verrons qu'elle n'est pas suffisante.

(1) Existe-t-il une base $\boldsymbol{e}$ de $\mathscr{E}(U)$ telle que la matrice de la dérivation ∇_{∂_z} dans la base correspondante de $\mathscr{E}(U \cap U_0)$ soit à pôle simples sur $U_0 \smallsetminus U_0 \cap U$ et celle de $\nabla_{\partial_{z'}}$ dans la base correspondante de $\mathscr{E}(U \cap U_\infty)$ soit à pôle simples sur $U_\infty \smallsetminus U_\infty \cap U$?

(2) Existe-t-il une base $\boldsymbol{e}$ de $\mathscr{E}(U)$ telle que la matrice de la dérivation ∇_{∂_z} dans la base correspondante de $\mathscr{E}(U \cap U_0)$ puisse s'écrire sous la forme

$$\sum_{j=1}^r \frac{A_j}{z - z_j}$$

pour certaines matrices constantes A_j (voir lemme 2.3.2) ?

(3) Existe-t-il un *fibré trivial* $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{P}^1$ relativement auquel la connexion ∇ soit à pôles simples ?

Le fait que (1) $\Leftrightarrow$ (2) a été vu au lemme 2.3.2. En effet, notons $\boldsymbol{e}_0$ et $\boldsymbol{e}_\infty$ des bases de $\mathscr{E}(U \cap U_0)$ et $\mathscr{E}(U \cap U_\infty)$, qui sont induites par la même base $\boldsymbol{e}$ de $\mathscr{E}(U)$ (de sorte que la matrice Ψ associée à $\mathscr{E}(U)$ dans ces bases est l'identité). Dans les deux cas, l'hypothèse implique que $A^{\boldsymbol{e}_0}$ n'a que des pôles simples sur $U_0 \smallsetminus U \cap U_0$. Dans le premier cas, on demande aussi que $A'^{\boldsymbol{e}_\infty}$ n'ait que des pôles simples sur $U_\infty \smallsetminus U_\infty \cap U$, et dans le second que le pôle de $-z^2 A^{\boldsymbol{e}_0}$ à l'infini soit au plus simple. Puisque par définition $A'^{\boldsymbol{e}_\infty} = -z^2 A^{\boldsymbol{e}_0}$ (la matrice Ψ du fibré $\mathscr{E}(U)$ dans les bases choisies étant l'identité), on obtient bien l'équivalence des deux propriétés.

Voyons que (1) $\Leftrightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (1). Choisissons la présentation standard $(\mathbb{C}[z]^n, \mathbb{C}[z']^n, \mathrm{Id})$ du fibré trivial. La condition (3) est celle de pôle simple sur les matrices $A^{\boldsymbol{e}_0}$ et $A'^{\boldsymbol{e}_\infty}$, et ce sont celles considérées ci-dessus pour la condition (1).

(1) ⇒ (3). Partant de la base $\boldsymbol{e}$ de $\mathscr{E}(U)$, on définit le fibré trivial $\mathscr{E}$ par la présentation standard correspondante, et les matrices sont $A^{\boldsymbol{e}_0}$ et $-z^2A^{\boldsymbol{e}_0}$, qui sont à pôles simples sur $U_0 \smallsetminus U \cap U_0$ et $U_\infty \cap U_\infty$ par hypothèse. □

8.3. Le théorème de Bolibroukh et Kostov

Ce théorème donne une réponse positive au problème de Riemann-Hilbert lorsque ∇ *est irréductible* (et à singularités régulières sur $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$, bien sûr). Bolibroukh a par ailleurs donné des contre-exemples au problème de Riemann-Hilbert lorsqu'on ne fait pas l'hypothèse d'irréductibilité.

Théorème 8.3.1. *Soit $U \subsetneqq \mathbb{P}^1$ un ouvert de Zariski, et soit ∇ une connexion sur un fibré $\mathscr{E}(U)$. On suppose que ∇ est à singularités régulières en tous les points de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$ et qu'elle est irréductible. Alors il existe un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{P}^1$ qui est trivial et relativement auquel la connexion est à pôles simples.*

Indiquons les étapes de la démonstration.

(1) On montre d'abord l'existence d'un fibré $\mathscr{E}$ relativement auquel la connexion n'a que des pôles simples. On utilise ici la condition de singularité régulière.

(2) On choisit un pôle z^o et on construit un nouveau fibré $\mathscr{E}'$ relativement auquel la connexion n'a que des pôles simples et de plus satisfait la condition de Plemelj à l'ordre $R+1$ (*cf.* définition 7.1.1), avec $R = n(n-1)(m-2)/2$ et $m = \operatorname{card}(\mathbb{P}^1 \smallsetminus U)$.

(3) On utilise enfin la condition d'irréductibilité : puisque la connexion est irréductible et à pôles simples relativement à $\mathscr{E}'$, on a $\delta(\mathscr{E}') \leqslant R$ (proposition 7.2.2). Ainsi, $\mathscr{E}'$ satisfait aussi la condition de Plemelj à l'ordre $\delta(E')+1$, et on peut appliquer le théorème de Plemelj raffiné 7.1.2 pour conclure.

Il s'agit donc d'expliciter les deux premières étapes.

8.3.a. Construction de fibrés vectoriels et première étape. La condition de singularité régulière d'un système différentiel ou d'une connexion se lit bien après un changement de base holomorphe au voisinage du pôle du système ou de la connexion : on peut trouver un tel changement de base après lequel la matrice du système ou de la connexion est à pôles simples. Ceci nous conduit à construire des fibrés à partir de données holomorphes locales.

Si $z^o \in U_0$, on note $\zeta = z - z^o$. On note aussi $\zeta = z'$ au voisinage de ∞.

Théorème 8.3.2. *Soit $U \subsetneqq \mathbb{P}^1$ un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^1$ et, pour tout point z_i de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$, soit ζ une coordonnée locale en ce point. Soit $\mathscr{E}(U)$ un fibré vectoriel sur U et pour tout point z_i de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$, soit $\Psi_i(\zeta)$ une matrice méromorphe inversible au voisinage de $\zeta = 0$, à pôle en $\zeta = 0$ au plus ainsi que son inverse (c'est-à-dire $\Psi_i(\zeta) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}\{\zeta\}[\zeta^{-1}])$. Soit enfin $\boldsymbol{e}$ une base de $\mathscr{E}(U)$ comme $\mathscr{O}(U)$-module libre.*

Il existe alors un unique fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{P}^1$ dont la restriction à U est $\mathscr{E}(U)$ et des uniques bases $\widetilde{\boldsymbol{e}}_0$ de $\mathscr{E}(U_0)$ et $\widetilde{\boldsymbol{e}}_\infty$ de $\mathscr{E}(U_\infty)$ telles que, au voisinage de chaque $z_i \in \mathbb{P}^1 \smallsetminus U$, on ait $\widetilde{\boldsymbol{e}}_0 = \boldsymbol{e} \cdot \Psi_i$ (si $z_i \in U_0$) ou $\widetilde{\boldsymbol{e}}_\infty = \boldsymbol{e} \cdot \Psi_i$ (si $z_i = \infty$).

Nous admettrons ce théorème, qui nécessite l'introduction et l'étude des fibrés vectoriels *holomorphes* sur $\mathbb{P}^1$ (nous n'avons considéré jusqu'ici que les fibrés vectoriels algébriques).

Corollaire 8.3.3. *Soit ∇ une connexion sur $\mathscr{E}(U)$ qui est à singularités régulières en tout point de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$. Il existe alors un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{P}^1$ relativement auquel ∇ est à pôles simples.*

Démonstration. Soient $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_\infty$ les bases de $\mathscr{E}(U \cap U_0)$ et $\mathscr{E}(U \cap U_\infty)$ induites par une base $\boldsymbol{e}$ de $\mathscr{E}(U)$ et soient $A^{\boldsymbol{e}_0}$ et $A'^{\boldsymbol{e}_\infty}$ les matrices de la connexion dans ces bases. On note $A_i(\zeta)$ la matrice de la dérivation ∇_{∂_ζ} dans la base $\boldsymbol{e}$ au voisinage de z_i. Si $z_i \in U_0$, c'est $A^{\boldsymbol{e}_0}(\zeta + z_i)$, et si $z_i = \infty$, c'est $A'^{\boldsymbol{e}_\infty}(\zeta)$. Par hypothèse de singularité régulière (*cf.* définition 1.4.1), il existe une matrice $\mathcal{P}_i(\zeta) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}\{\zeta\}[\zeta^{-1}])$ telle que la matrice transformée $\widetilde{A}_i(\zeta)$ par $\mathcal{P}_i(\zeta)$ soit à pôles simples. Les matrices $\mathcal{P}_i$ permettent de définir un fibré $\mathscr{E}$ d'après le théorème précédent (en prenant $\Psi_i = \mathcal{P}_i$), et dans les bases $(\widetilde{\boldsymbol{e}}_0, \widetilde{\boldsymbol{e}}_\infty)$ données par ce théorème, la matrice de la connexion est à pôles simples. $\square$

8.3.b. Condition de Plemelj à l'ordre R. Passons à la deuxième étape de la démonstration. Fixons un point z^o de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$. Nous le supposerons dans U_0, pour fixer les idées. Nous allons maintenant modifier la construction précédente au point z^o et changer le choix de la matrice $\mathcal{P}^o$ en ce point. La question est purement locale en z^o.

Lemme 8.3.4. *Soit $A(\zeta)$ une matrice dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}\{\zeta\}[\zeta^{-1}])$ à pôle simple en $\zeta = 0$. Soit N un entier $\geqslant 0$. Il existe un changement de base $\mathcal{Q}(\zeta)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}\{\zeta\}[\zeta^{-1}])$ tel que la nouvelle matrice $B(\zeta)$ ait la forme $(D + \zeta^{N+1}C(\zeta))/\zeta$, où D est une matrice diagonale constante et $C(\zeta)$ une matrice holomorphe au voisinage de $\zeta = 0$.*

Démonstration. On peut supposer au départ que $A(\zeta) = A_0/\zeta$, pour une certaine matrice A_0 constante, d'après la proposition 1.4.8. On peut de plus supposer que A_0 est sous forme de Jordan, ce qu'on réalise par un changement de base constant. Les blocs de Jordan ont la forme

$$\lambda_i \operatorname{Id} + M_i, \qquad M_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où λ_i est la valeur propre du i-ième bloc et M_i la partie nilpotente correspondante, de taille m_i. Pour tout i, choisissons une suite d'entiers $N_{i,j}$ $(j = 1, \ldots, m_i)$ telle que $N_{i,j} \geqslant N_{i,j-1} + N + 1$ pour tout $j = 1, \ldots, m_i$. Soit $\mathcal{P}^o(\zeta)$ la matrice diagonale par blocs $\mathcal{P}^o_i(\zeta) = \mathrm{diag}(\zeta^{N_{i,1}}, \ldots, \zeta^{N_{i,m_i}})$. Nous allons voir que le changement de base de matrice $\mathcal{P}^o$ convient.

On a (voir le lemme 1.3.1) $B(\zeta) = \mathcal{P}^o(\zeta) A_0 \mathcal{P}^o(\zeta)^{-1}/\zeta + (d\mathcal{P}^o/d\zeta)\mathcal{P}^o(\zeta)^{-1}$. Le second terme est clairement diagonal à pôle simple, et ne pose pas de problème. De plus, comme les matrices A_0 et $\mathcal{P}^o$ sont diagonales par blocs simultanément, il en est de même de $B(\zeta)$, et il s'agit d'en calculer les blocs. Le i-ième bloc s'écrit $\lambda_i \operatorname{Id} + \mathcal{P}^o M_i \mathcal{P}^{o-1}$ et la matrice $\mathcal{P}^o M_i \mathcal{P}^{o-1}$ est sous-diagonale, avec pour termes sous-diagonaux successifs : $\zeta^{N_{i,2}-N_{i,1}}, \dots, \zeta^{N_{i,n}-N_{i,n-1}}$. Ainsi, la perturbation non diagonale ainsi obtenue est au moins d'ordre $N+1$, comme voulu.

On choisit finalement comme changement de base $\mathcal{Q}$ le composé de $\mathcal{P}^o$ avec les changements de base qui ont amené la matrice $A(\zeta)$ à la forme de Jordan. $\square$

Revenons maintenant à la deuxième étape. On reprend la première étape en modifiant simplement la matrice $\mathcal{P}_i$ au point z^o fixé. On choisit en ce point une matrice $\mathcal{Q}_i$ composée de $\mathcal{P}_i$ (pour obtenir un pôle simple) et d'une matrice telle que $\mathcal{Q}$ donnée par le lemme avec $N = R$. On obtient la condition de Plemelj à l'ordre R en ce point. $\square$

EXAMEN FINAL

26 MARS 2010

Durée : 3h.
Tous les documents sont autorisés.
On pourra utiliser les énoncés donnés dans les notes, ainsi que les résultats du problème et des exercices, en y référant de manière précise.

E.1. Soient $k, \ell \in \mathbb{Z}$ deux entiers *distincts*.

(1) Quel est le type du fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ présenté par

$$\big(\mathbb{C}[z]^2, \mathbb{C}[{}'z]^2, \Psi\big), \quad \text{avec } \Psi = \begin{pmatrix} z^{-k} & 0 \\ 0 & z^{-\ell} \end{pmatrix}.$$

(2) Soit $\psi \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Montrer que le type du fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ présenté par

$$\big(\mathbb{C}[z]^2, \mathbb{C}[{}'z]^2, \Psi\big), \quad \text{avec } \Psi = \begin{pmatrix} z^{-k} & \psi \\ 0 & z^{-\ell} \end{pmatrix}$$

ne dépend pas de ψ si $k \geqslant \ell - 1$.

(3) Donner un exemple d'entiers k, ℓ tels que $k \leqslant \ell - 2$ pour lesquels le type dépend de ψ.

(4) Soit m un entier. Montrer une relation entre les types des fibrés vectoriels $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ de matrices respectives

$$\Psi = \begin{pmatrix} z^{-k} & \psi \\ 0 & z^{-\ell} \end{pmatrix}, \quad \Psi_m = \begin{pmatrix} z^{-k-m} & z^{-m}\psi \\ 0 & z^{-\ell-m} \end{pmatrix}.$$

(5) Donner, *pour tout couple d'entiers* (k, ℓ) *tels que* $k \leqslant \ell - 2$, un exemple de ψ pour lequel le type n'est pas celui pour $\psi = 0$.

E.2. Soit λ un nombre complexe. On considère les trois matrices

$$A_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ -2 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad A_\infty(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner une condition nécessaire sur λ pour qu'il existe un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ de rang 2 sur $\mathbb{P}^1$, une connexion ∇ sur $\mathscr{E}(\mathbb{P}^1 \smallsetminus \{0, 1, \infty\})$ à pôles simples relativement à $\mathscr{E}$, tels que les endomorphismes $\text{Rés}_\alpha(\nabla, \mathscr{E})$, pour $\alpha = 0, 1, \infty$, aient pour matrice $A_\alpha(\lambda)$ dans une base convenable de la fibre $\mathscr{E}_\alpha$?

(2) Pour $\lambda = -1$, donner un exemple de tels $\mathscr{E}, \nabla$.

E.3. Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$, $U \subsetneq \mathbb{P}^1$ un ouvert de Zariski et ∇ une connexion sur $\mathscr{E}(U)$ de rang n, qui est à pôles simples relativement à $\mathscr{E}$. Soit $z^o \in U$ et $U' = U \smallsetminus \{z^o\}$. Alors ∇ définit une connexion ∇' sur $\mathscr{E}(U')$.

(1) Indiquer pourquoi ∇' est encore à pôles simples relativement à $\mathscr{E}$.

(2) On suppose pour fixer les idées que $z^o \in U_0$ et on pose $\zeta = z - z^o$. Soit $\boldsymbol{e}_0$ une base de $\mathscr{E}(U_0)$. Montrer qu'il il existe une matrice $\mathcal{Q}(\zeta) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}\{\zeta\})$ telle qu'après le changement de base de matrice $\mathcal{Q}(\zeta)$, la matrice de la connexion soit nulle.

(3) Montrer qu'il existe un fibré *trivial* $\mathscr{E}'$ relativement auquel ∇' est à pôles simples.

E.4.

(1) On considère le système différentiel
$$\frac{du}{dz} = a(z)u(z), \quad a(z) \in \mathbb{C}(z).$$
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a(z)$ pour que ce système soit à singularités régulières en tout pôle (à distance finie) de $a(z)$ et à l'infini.

(2) Si cette condition est satisfaite, donner une écriture simple de ce système, si $z_1, \dots, z_r$ sont les pôles (à distance finie) de $a(z)$.

(3) Si Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \dots, z_r\}$, décrire explicitement l'espace vectoriel des solutions de l'équation sur Ω.

(4) Soit $P \in \mathbb{C}(z)\langle\partial\rangle$ un opérateur différentiel de degré 2 qu'on écrit sous la forme $P = \partial^2 + a_1(z)\partial + a_0$ avec $a_0, a_1 \in \mathbb{C}(z)$ (et $\partial = d/dz$). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P soit à singularités régulières en tous les pôles de a_0, a_1 et à l'infini.

(5) On suppose que $P \in \mathbb{C}(z)\langle\partial\rangle$ est écrit sous la forme $P = (\partial + \alpha)(\partial + \beta)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}(z)$. Montrer que tout pôle de α qui n'est pas dans l'ensemble des pôles de a_0 et a_1 (qu'on appellera « singularité apparente » de la décomposition) est aussi un pôle de β et que c'est un pôle simple pour ces deux fractions. Calculer le résidu de α et β en ce pôle.

(6) Montrer que si P est à singularités régulières en tout ses pôles et à l'infini, alors les deux opérateurs $\partial + \alpha$ et $\partial + \beta$ aussi.

E.5. On considère l'opérateur hypergéométrique $P = \partial^2 + a_1\partial + a_0$, pour lequel
$$a_1 = \frac{c - (a+b+1)z}{z(1-z)} \quad \text{et} \quad a_0 = -\frac{ab}{z(1-z)}\,.$$

(1) Montrer que la connexion associée est à pôles simples relativement au fibré trivial de rang 2.

(2) Diviser P par $(\partial - b/(1-z))$ sous la forme
$$P = Q\Big(\partial - \frac{b}{(1-z)}\Big) + R$$
avec $Q \in \mathbb{C}(z)\langle\partial\rangle$ et $R \in \mathbb{C}(z)$ et en déduire que, si $c = a$, P est divisible par $(\partial - b/(1-z))$. (Comme a et b jouent un rôle symétrique dans P, le même résultat vaut en échangeant a et b.)

(3) Quelle est la fonction dont le développement en série dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 est la série ${}_2F_1(a, b, a; z)$.