Programme d'approfondissement de Mathématiques 2009-2010

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Programme d'approfondissement de Mathématiques 2009-2010

Responsable : *Claude Viterbo*
e.mail : `claude.viterbo@math.polytechnique.fr`

Les mathématiques jouent depuis deux siècles un rôle fondamental dans le développement des sciences. L'une des spécificités de l'École Polytechnique a d'ailleurs été, dès le début du XIX[e] siècle, la place centrale attribuée aux mathématiques.
Les mathématiques ne sont pas seulement le langage universel des sciences, mais elles jouent un rôle central dans un nombre croissant d'entre elles. La chimie, la biologie, l'économie ne peuvent se passer de bases mathématiques solides. Parallèlement les élèves sont appréciés, en France comme à l'étranger, pour la solidité et la largeur du spectre de leurs connaissances mathématiques.

Les cours proposés dans le programme d'approfondissement de Mathématiques couvrent des domaines divers de l'analyse, de l'algèbre et de la géométrie. Avec leur mélange de théories fondamentales et d'applications d'une très grande actualité, ils constituent une formation qui sera hautement appréciée par le plus grand nombre des écoles qui assurent la formation d'ingénieur en convention avec l'École Polytechnique tout en étant indispensable à ceux qui envisagent une carrière de recherche en mathématiques. Les sujets des cours ont été choisis à la fois pour leur importance théorique et pour leur ouverture aux applications de pointe, telles la cryptographie *(Algèbre, arithmétique et codes)*, ou la robotique *(Systèmes dynamiques)*.
Le cours *Analyse Nonlinéaire* illustre la puissance des méthodes d'analyse pour l'étude des phénomènes d'écoulement des fluides. Le cours *Équations de Schrödinger et théorie spectrale et le cours d'Équations de Schrödinger non linéaires : des condensats de Bose Einstein aux supersolides* montrent à la fois l'importance mathématique et physique de ces équations. Dans *Groupes* et *Représentations* apparaîtra l'importance fondamentale des méthodes de théorie des groupes en mécanique analytique et en physique quantique.
Afin de permettre une ouverture vers d'autres enseignements, une harmonisation des horaires permet de choisir l'un des modules du Programme d'Approfondissement de Mathématiques parmi ceux offerts par le Département de Mathématiques appliquées.
Ainsi par exemple, au choix du module *Systèmes dynamiques* pourra s'ajouter celui du module MAP561 *Automatique : Concepts généraux et application en ingéniérie* du Département de Mathématiques appliquées. Le Programme d'Approfondissement est constitué pour le premier semestre de 3 modules à choisir parmi les 5 modules de 9 blocs (1 heure et demie de cours suivies de deux heures de petite classe) et de trois modules à choisir parmi les 6 modules de 9 blocs du 2[e] trimestre.

S'y ajoutent pour chacun des semestres, un module d'approfondissement consistant en un travail personnel effectué sous la direction de l'un des enseignants de l'un des modules choisi et la participation au Séminaire des élèves.

Prérequis

Certains cours présupposent de maîtriser le contenu d'une ou deux des parties du cours de MAT 431.

- partie "Systèmes dynamiques" nécessaire pour suivre MAT551.
- partie "Distribution et Analyse de Fourier" nécessaire pour suivre MAT554 et MAT564.

Le cours de Topologie Différentielle s'étend sur les deux semestres (MAT553-Topologie Différentielle 1 et MAT563-Topologie Différentielle 2). Il est cependant possible de se limiter au MAT553. Aucun prérequis n'est nécessaire pour suivre MAT553. Pour suivre MAT563, il est nécessaire de maîtriser le contenu du cours de MAT553.

Pour le cours *Transport et Diffusion* (MAT567/MAP567) : il est nécessaire d'avoir validé l'un des 4 cours suivants MAP 411 Modélisation mathématique, MAP431 Analyse numérique et optimisation, MAT 431 Distributions, Analyse de Fourier et Systèmes dynamiques et MAT 432 Analyse de Fourier et Théorie spectrale.

Liste des modules du Programme d'approfondissement du Département de Mathématiques :

Premier semestre :

- MAT551 : Systèmes dynamiques (R. Krikorian et J. Buzzi)
- MAT552 : Algèbre, arithmétique et codes (J-F. Mestre)
- MAT553 : Topologie Différentielle I (J. Barge)
- MAT554 : Analyse nonlinéaire (R. Danchin)
- MAT556 : Groupes et représentations (D. Renard)
- EA575 : Groupe de symétrie en physique subatomique (D. Renard, Y. Laszlo, D. Bernard)

Deuxième semestre :

- MAT560 : Équation de Schrödinger nonlinéaire : des condensats de Bose Einstein aux supersolides (A. Aftalion, C. Josserand, J. Dalibard)
- MAT563 : Topologie Différentielle II (J. Lannes)
- MAT564 : Equation de Schrödinger et Théorie spectrale (F. Klopp)
- MAT565 : Théorème de Fermat, courbes elliptiques et formes modulaires (J. Tilouine)
- MAT567 : Transport et Diffusion (F. Golse, G. Allaire)
- MAT 568 : Relativité Générale (J.-P. Bourguignon)

Approfondissements

Un enseignement d'approfondissement est constitué de deux volets :
- un travail personnel (en général la lecture d'un article scientifique) en liaison avec l'un des cours suivis dans le trimestre (sauf exception motivée, parmi ceux auxquels l'élève était inscrit) que l'élève devra exposer en montrant qu'il en a maîtrisé le contenu. Exceptionnellement, la partie physique du cours PHY575 : *Groupe de symétrie en physique subatomique* (D. Renard, Y. Laszlo, D. Bernard) du PA "Des particules aux étoiles : Interactions fondamentales et constituants élémentaires" peut constituer un approfondissement du cours MAT556.

- La participation au séminaire des élèves qui a lieu les lundis à 18h30. Pour valider cette partie de l'EA, l'élève devra avoir fait un exposé. Pour les élèves inscrits aux deux trimestres de PA de mathématiques, un seul exposé est exigé, mais la participation au séminaire doit avoir lieu durant les deux trimestres.

Compatibilité avec les autres Parcours d'approfondissement du M1 de l'École Polytechnique.

Le cas des élèves inscrits au Programme d'approfondissement de Mathématiques et désirant choisir un module dans une autre discipline pourra être examiné.

Mathématiques appliquées

Un élève s'inscrivant au Programme d'approfondissement de Mathématiques pourra choisir un des modules parmi ceux offerts par le Département de Mathématiques appliquées et réciproquement, un élève s'inscrivant au Programme d'approfondissement de Mathématiques appliquées pourra choisir un des modules parmi ceux proposés ci-dessus. Le module *Transport et Diffusion* est un module commun au PA de Mathématiques Appliquées.

Informatique

Le module *Algèbre, arithmétique et codes* est un module commun aux Programmes d'approfondissement de Mathématiques et d'Informatique du premier trimestre. Le cas des élèves inscrits au Programme d'approfondissement de Mathématiques et désirant choisir un module du Programme d'approfondissement d'Informatique du premier trimestre pourra être examiné.

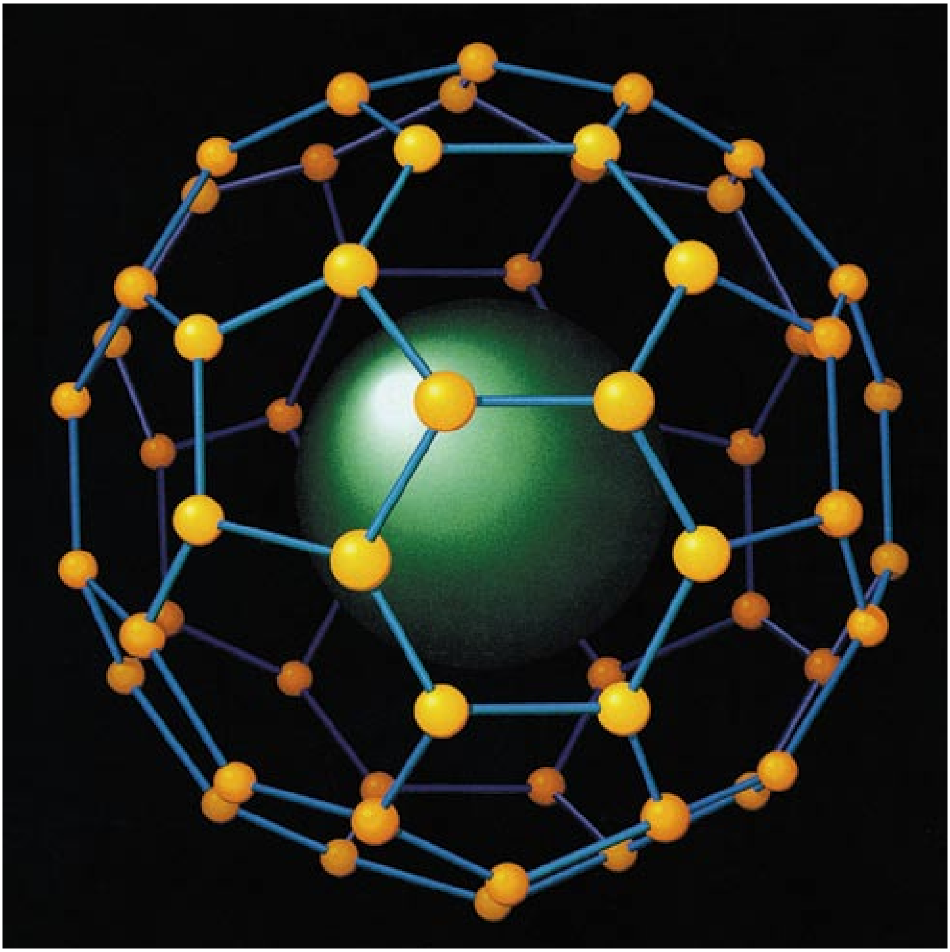
Physique

Le module *Relativité Générale* est un module commun au Programme d'Approfondissement du 2^{e} trimestre de Physique.

Physique - Mécanique

Le module *Équation de Schrödinger nonlinéaire : des condensats de Bose Einstein aux supersolides* est un module commun au Programme d'Approfondissement du 2e trimestre de Physique et Mécanique.

Programmes des modules



Modèle d'une molécule de fullerène (icosaèdre tronqué).
Elle possède un groupe de symétrie à 120 éléments, non isomorphe à S_5.

Systèmes dynamiques (MAT551)

Raphaël Krikorian et Jérôme Buzzi

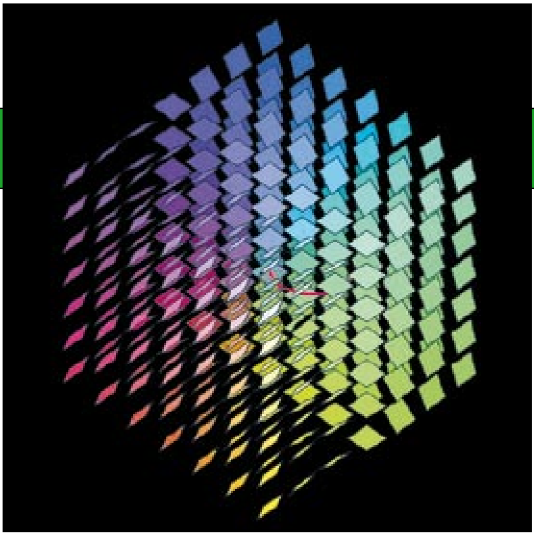
« Il faut étudier les équations différentielles »:
telle était en substance la devise secrète de Newton.

Les équations différentielles ordinaires permettent de modéliser de nombreux phénomènes, en physique, en mécanique ou dans d'autres domaines. Le premier exemple de modélisation écologique, pour expliquer les variations de populations de poissons dans l'Adriatique, fut l'équation de Lotka-Volterra. Depuis, bien d'autres phénomènes en chimie, biologie, écologie, épidémiologie ont été étudiés grâce à des systèmes dynamiques : réactions chimiques oscillantes, influx nerveux, etc ...

L'étude d'une équation différentielle est d'abord comprise comme le calcul exact de solutions individuelles jusqu'à ce qu'Henri Poincaré découvre l'impossibilité de réaliser ce programme pour de nombreux systèmes. Il invente alors un nouveau point de vue. Il propose de comprendre la structure de « l'ensemble » des solutions en posant d'abord des questions « qualitatives » (par exemple l'existence ou la diversité des orbites périodiques) : c'est la naissance de la théorie des systèmes dynamiques.

Le cours donnera un certain nombre d'outils simples de cette théorie et en montrera quelques applications. On commencera par l'étude de problèmes linéaires, puis on étudiera la dynamique non-linéaire, et ses aspects géométriques et topologiques. On essaiera de mettre en évidence les phénomènes les plus simples : orbites périodiques, moyennisation, attracteurs, chaos, stabilité structurelle... et leur importance pour la modélisation.

- Équations différentielles linéaires et non-linéaires. Rappels.
- Notions de dynamique hyperbolique/elliptique
- Crochets de Lie, théorème de Frobenius et Chow.
- Linéarisation autour de points fixes et de cycles périodiques. Théorie de Floquet.
- Théorème de Hartman-Grobman et Théorème de la variété stable.
- Formes normales. Quasipériodicité. Mouvement du solide.
- Calcul des variations élémentaire, équations d'Euler Lagrange.
- Formalisme Lagrangien-Hamiltonien, quantités conservées, équation d'Hamilton-Jacobi.
- Méthodes géométriques et analytiques. Fers à cheval chaotiques. Orbites périodiques minimisantes.



Champ de plans non intégrable et courbe tangente à ce champ de plans.

Bibliographie

- Arnold, V.I., Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires, Ed. Mir 1980
- Arnold, V.I., Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique, Ed. Mir, 1976.
- Hirsch, M. W., et Smale, S., Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Pure and Applied Mathematics, Vol. 60, Academic Press, 1974.
- Lefschetz, S., Differential Equations: Geometric Theory, Dover, 1977.
- Moser, J., Zehnder, E., Notes on dynamical systems, Courant Lecture Notes, AMS, 2005.
- Fathi, A., Systèmes dynamiques, Cours de l'École Polytechnique.
- Shub, M., Stabilité globale des systèmes dynamiques, Astérisque, SMF, 1987.

Prérequis

MAT431 : Le contenu de la partie « Systèmes Dynamiques » du cours long de MAT431 « Distributions, Analyse de Fourier et Systèmes Dynamiques » est nécessaire pour suivre ce module.

Approfondissements

Des approfondissements en liaison avec le module Systèmes dynamiques seront proposés. Leur structure sera souple, le travail personnel sur documents jouera un rôle prépondérant, éventuellement précédé de quelques cours d'introduction. Ils conduiront à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

Outre un certain nombre d'approfondissements communs avec le cours de contrôle – option robotique – du programme d'approfondissement de Mathématiques appliquées, on propose les sujets suivants :
- Étude de l'équation de Schrödinger unidimensionelle et propagation des ondes dans les cristaux.
- Neurones et Difféomorphismes du cercle.
- Stabilité et Instabilité dans les systèmes hamiltoniens : Théorie KAM et Diffusion d'Arnold.
- Modélisation de dynamiques de population.
- Étude de systèmes intégrables.
- Théorie ergodique.
- Théorie des feuilletages

Algèbre, arithmétique et codes (MAT552)

Jean-François Mestre

Depuis quelques années, l'informatique et son utilisation dans la transmission de données de toutes sortes (télécommunications, télévision numérique, Internet, etc.) sont devenues des champs d'étude de plus en plus féconds pour les mathématiciens.

La théorie de l'information, créée par Shannon au milieu du siècle dernier, utilise de façon essentielle aussi bien le calcul des probabilités que l'analyse numérique, la géométrie algébrique et l'arithmétique. De même en cryptographie, qui n'est plus l'apanage des seuls militaires, et qui est désormais indispensable pour assurer la sécurité des transferts d'information, les meilleurs cryptosystèmes s'appuient sur de l'arithmétique certes élémentaire, mais posent en même temps des problèmes parmi les plus difficiles des mathématiques d'aujourd'hui.

Le but de ce cours est de montrer l'interaction entre cette discipline protéiforme et récente qu'est la théorie de l'information et certaines des branches les plus anciennes des mathématiques, l'algèbre, l'arithmétique et la géométrie. Les problèmes nouveaux y sont nombreux et souvent fascinants.

De plus, ces développements ont à peine quelques années, d'où l'avantage de pouvoir entrer de plain-pied dans certaines des recherches les plus pointues du domaine, en quelques heures et sans avoir à acquérir par trop de connaissances nouvelles.

- Cryptosystèmes à clé publique ; algorithme RSA ; signatures sécurisées ; preuve sans apport d'information.
- Deux premières méthodes de factorisation : la méthode rho, le crible. Quelques tests de primalité.
- Courbes elliptiques ; méthode ECM de factorisation.
- Logarithme discret. Application au problème des signatures sécuritées. Résolution sous-exponentielle dans le cas de groupes cycliques.
- Corps finis. Factorisation de polynômes.
- Codes correcteurs : la théorie de Shannon.
- Codes cycliques. Codes classiques : Hamming, Golay, Reed-Solomon, Reed-Muller, BCH.
- Transformation de Fourier discrète. Transformation de Fourier rapide.

La transmission d'images astronomiques (ici Mars) utilise des codes correcteurs d'erreurs, notamment le code de Reed-Muller $R_{1,5}$.

Bibliographie

- Van Lint, J. H., *Introduction to Coding Theory*, 3e éd., Springer-Verlag, 1999 (Graduate Texts in Mathematics 86).
- Demazure, M., *Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes*, Cassini, 1997.
- Koblitz, N., *A Course in Number Theory and Cryptogr-+aphy*, 2e éd., Springer-Verlag, 1994.
- Zémor, G., *Cours de cryptographie*, Cassini, 2000.

Approfondissements

Les thèmes *d'approfondissements* suivants peuvent donner lieu à des développements aussi bien de nature théorique que plus tournés vers la programmation, avec éventuellement des résultats inédits.

- Codes de Goppa (théorie des courbes algébriques, théorème de Riemann-Roch, courbes modulaires, théorie de Manin-Drinfeld-Vladut).
- Propriétés des courbes elliptiques sur les corps finis : théorème de Hasse-Weil, modules de Tate.
- Nombre de points sur les courbes algébriques sur les corps finis.
- Codes arithmétiques, codes de convolution.
- Méthode de factorisation du crible quadratique et programmation de la méthode.

* * *

Topologie différentielle (MAT553 - MAT563)

Jean Barge, Jean Lannes

La topologie algébrique associe à chaque espace topologique des « invariants algébriques » (nombres, groupes, espaces vectoriels etc ...) dans le but de les distinguer, voire de les classifier (à homéomorphismes près).

1ère partie du cours de topologie differentielle (1er trimestre)

Le cours illustrera cette démarche dans le cadre des variétés différentiables (objets fondamentaux et incontournables dans presque toutes les branches des mathématiques) pour lesquelles on construira de tels invariants qui seront des espaces vectoriels réels : La cohomologie de De Rham.

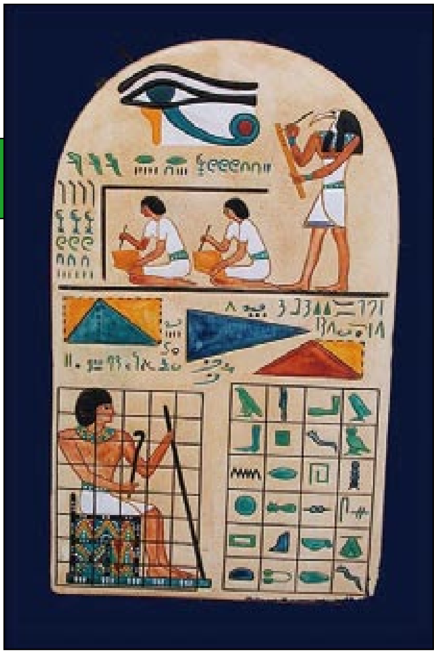
On récoltera alors très élégamment les fruits de cette construction. Théorème du point fixe de Brouwer, non existence de champs de vecteurs sur les sphères de dimension paire, invariance de la dimension par homéomorphisme etc...

Prérequis

Aucun prérequis n'est nécessaire pour suivre cette première partie de cours.

Bibliographie

- Bott et Tu : Differential forms in algebraic topology



2^{e} partie du cours de topologie differentielle (2^{e} trimestre)

Le cours de Topologie Différentielle (II) traitera de concepts plus avancés : Fibres, vectoriels, K-theorie, classes caractéristiques, cobordisme, ...

Prérequis

Le contenu du cours de Topologie Différentielle (I)

Bibliographie

- Bott et Tu : Differential forms in algebraic topology, Springer-Verlag
- Milnor : Characteristic classes, Princeton Univ. Press.

Approfondissement

Des approfondissements en liaison avec chacun des modules précédents seront proposés. Leur structure sera souple, le travail personnel sur documents jouera un rôle prépondérant, éventuellement précédé de quelques cours d'introduction. Ils conduiront à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

Analyse Nonlinéaire (MAT554)

Raphaël Danchin

Les équations décrivant des phénomènes physiques (en mécanique des fluides, en élasticité, en optique...) sont le plus souvent non linéaires, et l'objectif de ce cours est de présenter diverses méthodes mathématiques permettant de « résoudre » de telles équations d'évolution non linéaires, c'est-à-dire de démontrer l'existence de solutions et d'étudier leur comportement, unicité, stabilité, explosion éventuelle.

L'un des aspects de la théorie consiste à comprendre comment un outil « linéaire » comme la transformée de Fourier (outil de base de résolution de problèmes linéaires) peut être utilisé dans un cadre non linéaire. Des réponses satisfaisantes sont apportées par des techniques d'analyse harmonique (comprendre comment les fréquences de différentes fonctions peuvent interagir) et fonctionnelle.

Ces méthodes seront mises en oeuvre pour étudier l'un des systèmes principaux de la mécanique des fluides : le système de Navier-Stokes, dont l'étude est l'un des enjeux mathématiques fondamentaux du XXI[e] siècle. Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaire d'apparence simple mais qui présente des difficultés telles que l'existence même de solutions régulières pour tout temps est une question ouverte. Ce cours présente diverses méthodes d'étude d'un tel système, depuis l'approche de J. Leray des années 1930 jusqu'aux techniques de calcul paradifférentiel introduites par J.-M. Bony dans les années 1980.

Table des matières

- Analyse fonctionnelle
- Transformée de Fourier et espaces de Sobolev
- Le problème de Stokes
- Existence globale de solutions faibles
- Solutions fortes des équations de Navier-Stokes en dimension trois
- Théorie de Littlewood-Paley

Bibliographie

- G. Allaire et P.-L. Lions : Analyse numérique et optimisation, cours de l'École Polytechnique.
- J.-M. Bony : Intégration et analyse hilbertienne, cours de l'École Polytechnique.
- J.-M. Bony et C. Viterbo : Distributions, analyse de Fourier et systèmes dynamiques,

Tourbillons vus par Hiroshige.

cours de l'École Polytechnique.
- H. Brézis : Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, Masson.
- J.-Y. Chemin : Fluides parfaits incompressibles, Astérisque, 230 (1995).
- J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher et E. Grenier : Mathematical geophysics. An introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 32. The Clarendon Press, 2006.
- R. Danchin : Notes de cours d'analyse fonctionnelle, téléchargeable sur http : //persomath.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/.
- R. Danchin : Fourier Analysis Methods for PDEs, téléchargeable sur HYPERLINK «http://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/recherche.html/»
- J. Dixmier: Cours de topologie générale, Presses Universitaires de France.
- P. Huerre: Cours de mécanique des fluides, École Polytechnique.
- M. Schechter : Principles of Functional Analysis, second edition, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society.

Prérequis

Le contenu de la partie «Distributions et Analyse de Fourier» du cours long de MAT431 «Distributions, Analyse de Fourier et Systèmes Dynamiques» est nécessaire pour suivre ce module.

Approfondissements

Des approfondissements prolongeant ce cours seront proposés. Leur structure sera souple, le travail personnel sur documents jouera un rôle prépondérant, éventuellement précédé de quelques cours d'introduction. Ils conduiront à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

- L'équation d'Euler incompressible.
- Solitons et équation de Camassa-Holm.
- Étude des poches de tourbillons et théorème de J.-Y. Chemin.
- Espaces de Besov et théorèmes de type Kato pour les équations de Navier-Stokes.
- Fluides faiblement compressibles.
- Fluides en rotation rapide.
- Équation de Navier-Stokes à viscosité petite ; équations de Prandtl et couches limites.

Groupes et représentations (MAT556)

David Renard

Ce cours introduit les notions fondamentales de groupe et d'action de groupe, qui formalisent l'idée de symétrie d'un objet ou d'un système. Les actions de groupes les plus importantes sont les actions linéaires sur des espaces vectoriels, aussi appelées représentations.

Nous commençons par l'étude des groupes finis et de leurs représentations, cas le plus simple mais où les idées importantes de la théorie générale apparaissent déjà, et qui présente de nombreuses applications (chimie, cristallographie, combinatoire). Nous expliquons comment la théorie des représentations constitue un analogue non commutatif de la transformation de Fourier sur les réels ou sur le cercle. Nous passons ensuite à l'étude de groupes continus -les groupes de Lie. Pour ces groupes, on se ramène à l'étude des représentations de leurs algèbres de Lie, constituée par les générateurs infinitésimaux des sous-groupes à un paramètre. Ces groupes apparaissent naturellement comme groupes de symétries, ou groupes de jauge, en mécanique quantique, physique des particules, etc.

De nouveaux résultats théoriques en théorie des représentations, utilisant algèbre, géométrie différentielle et analyse, sont publiés chaque jour, et le domaine de leurs applications s'étend constamment.

Plan du cours

- Groupes, actions de groupes : exemples.
- Représentations des groupes finis, représentations irréductibles, lemme de Schur, transformation de Fourier, théorème de Peter-Weyl, caractères.
- Groupes compacts : mesure de Haar, théorème de Peter-Weyl.
- Groupes linéaires et algèbres de Lie. Correspondance de Lie.
  Différentielle d'une représentation de groupe linéaire.
- Les groupes SO(3) et SU(2), leurs représentations irréductibles.
- Représentations de SU(3) et les quarks.

Boîte en laque à symétrie S_3
(Chine, 16[e] siècle, musée de Münster).

Bibliographie

Poly. du cours Groupes et représentations, Davis Renard.

Approfondissements

- Poids et racines, représentations des groupes de Lie compacts.
- Applications de la théorie des groupes et algèbres de Lie aux systèmes intégrables, réseaux de Toda.
- Diagrammes de Young, représentations des groupes symétriques, principe de Pauli.
- Algèbres de Kac-Moody.
- Introduction aux groupes quantiques.
- Symétries cachées de l'atome d'hydrogène.
- Fullerènes et théorie des groupes.

* * *

Groupe de symétrie en physique subatomique

David Renard, Y. Laszlo, D. Bernard

Bases de la théorie des représentations des groupes de Lie, des algèbres de Lie ainsi que des groupes finis, illustrées par de nombreux exemples.

Applications en physique subatomique : symétries en mécanique quantique ; permutations, principe de Pauli ; groupe de Lorentz, spin et équation de Dirac ; groupes et algèbres de Lie en physique des particules : modèle des quarks et théories de jauge.

- Intro : théorème de Noether et applications, version quantiques (Phy)
- Généralités sur les groupes et représentations de SU(2) (Math)
- SU(3) et quarks (Phy)
- Groupes compacts linéaires (Math)
- Algèbres de Lies semi-simples complexes et représentations (Math)
- Groupe de Poincaré-Lorentz et équation de Dirac (Phy)
- Heisenberg et Virasoro (Math)
- Physique derrière Heisenberg et Virasoro (bosons-fermions) (Phy)
- Théorie de Jauge

(MAT575 - PHY575)

Equation de Schrödinger nonlinéaire :

des condensats de Bose Einstein aux supersolides

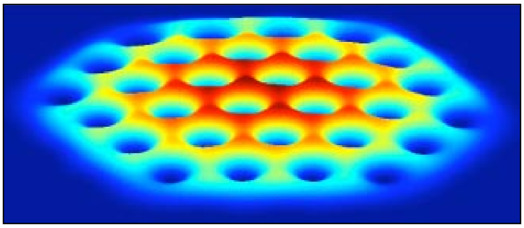
Amandine Aftalion, Christophe Josserand, Jean Dalibard

Ce cours présentera comment à partir d'une équation aux dérivées partielles, l'équation de Schrödinger non linéaire, on peut décrire des problèmes physiques et mécaniques variés et introduira des outils mathématiques pour aborder ces questions. La double approche, mathématique et physique, sera présente tout au long du cours.

On s'intéressera tout particulièrement aux condensats de Bose Einstein, pour lesquels on présentera les expériences récentes, et les observations sur les tourbillons. On abordera également un modèle de solide quantique pour lequel on décrira les propriétés mécaniques. On verra comment des estimations d'ordre de grandeur et d'énergie permettent de donner des informations physiquement pertinentes. La partie mathématique abordera des questions de calcul des variations, d'existence et d'unicité de solutions et introduira des fonctions holomorphes pour décrire des structures périodiques.

(MAT560 - MEC560 - PHY560)

Réseau de vortex dans un condensat de Bose Einstein



Bibliographie

- Analyse fonctionnelle: Théorie et applications, Haim Brezis, Dunod 1994.
- Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases, Franco Dalfovo, Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii, and Sandro Stringari, Rev. Mod. Phys. 71, 463 (1999)
- Shock Waves and Reaction-diffusion equations, Joel Smoller, Springer-Verlag, 1994.
- Bose Einstein condensation in dilute gases, C. J. Pethick, H. Smith, Cambridge University Press, 2004.
- Bose Einstein condensation, Lev. P. Pitaevskii , Sandro Stringari, Oxford University Press, 2004.

Pour aller plus loin

- «Vortices in Bose-Einstein condensates» Amandine Aftalion, Birkhauser, 2006.
- Bose-Einstein condensates in atomic gases: simple theoretical results, Cours de l'École des Houches d'Yvan Castin, in 'Coherent atomic matter waves', Lecture Notes of Les Houches Summer School, p.1-136, edited by R. Kaiser, C. Westbrook, and F. David, EDP Sciences and Springer-Verlag (2001), cond-mat/0105058.
- Vortices in nonlinear fields, L.M.Pismen, Oxford Science Publications, 1999.
- Einstein aujourd'hui, EDP sciences, CNRS editions.
- Topological solitons, N.Manton, P.Sutcliffe, Cambridge University Press, 2004.

Approfondissements

Chaque séance pourra donner lieu à des approfondissements soit côté mathématiques, soit côté physique.

Leur structure sera souple, le travail personnel sur documents jouera un rôle prépondérant, éventuellement précédé de quelques cours d'introduction. Ils conduiront à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

Equation de Schrödinger et Théorie Spectrale

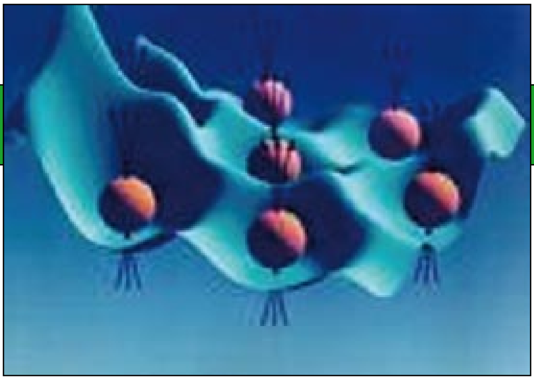
Frédéric Klopp

L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la physique quantique. Les mathématiciens s'en sont très rapidement emparés pour en faire l'une des plus étudiées en analyse.

Ce cours se propose d'introduire certains des outils d'analyse mathématique qui en permettent l'étude, en particulier, l'analyse fonctionnelle générale, la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints, la théorie des perturbations des opérateurs linéaires.

Muni de ces outils, on étudiera différentes classes d'opérateurs de Schrödinger en particulier ceux issus de la physique de la matière condensée comme les opérateurs périodiques, quasi-périodiques et aléatoires.

(MAT564)



Picture stolen
from Tom Duff,
Bells Labs picture gallery.

Bibliographie

- H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon. Schr¨odinger Operators. Springer Verlag, Berlin, 1987.
- B. Davies. Spectral theory and differential operators. Cambridge Univeristy Press, Cambridge (U.K), 1995.
- T. Kato. Perturbation Theory for Linear Operators. Springer Verlag, Berlin, 1980.
- M. Reed and B. Simon. Methods of modern mathematical physics. I. Academic Press Inc., New York, second edition, 1980. Functional analysis.
- M. Reed and B. Simon. Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness. Academic Press, New York, 1975.
- M. Reed and B. Simon. Methods of modern mathematical physics. III. Academic Press, New York, 1979. Scattering theory.
- M. Reed and B. Simon. Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators. Academic Press, New York, 1978.
- P. Stollmann. Caught by disorder, volume 20 of Progress in Mathematical Physics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001. Bound states in random media.

Prérequis

La partie Distributions et analyse de Fourier (théorie des distributions, analyse de Fourier, introduction aux équations aux dérivées partielles) du cours MAT 431.

Approfondissements

Selon les souhaits de l'auditoire, il pourra être consacré à quelques résultats plus ou moins récents en lien avec le cours, par exemple :
- localisation spectrale des opérateurs aléatoires.
- équation de Schrödinger dans le régime semi-classique et approximation WKB.
- théorie spectrale inverse pour des opérateurs de Schrödinger périodiques.
- théorie des résonances.

Théorème de Fermat, courbes elliptiques et formes

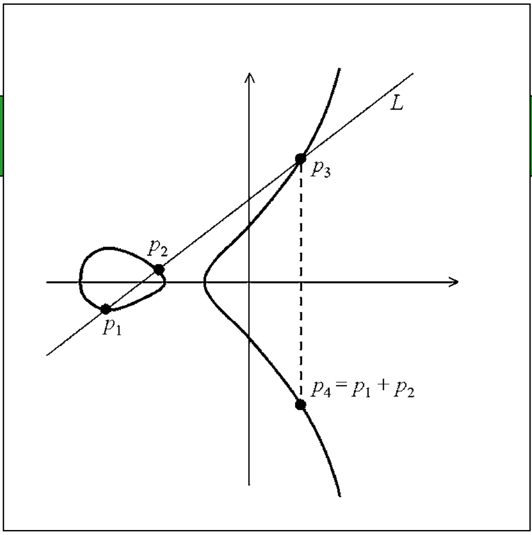
Jacques Tilouine

Le problème appelé « Grand Théorème de Fermat » consiste à montrer que pour p premier supérieur à 3, si x,y,z sont trois entiers tels que xp + yp = zp, on a xyz = 0

Il a représenté un moteur pour la théorie des Nombres pendant plus de 350 ans, jusqu'à sa résolution par A. Wiles en 1994.

Au XIX[e] siècle, Kummer a fait une contribution décisive à ce problème, en le résolvant pour de très nombreux exposants p, par une méthode qui a fondé la Théorie Algébrique des Nombres.

Nous présentons une partie de ses travaux puis nous introduisons les fonctions elliptiques et les formes modulaires dont nous étudions quelques propriétés arithmétiques.
Ce sont ces objets qui sont à la clé de la démonstration de Wiles.



Bibliographie

- Cyclotomic Fields, L. Washington, Springer Verlag.
- Elliptic Functions, Serge Lang, Addison Wesley.
- Théorie Algébrique des Nombres, Pierre Samuel, Hermann.
- Théorie Algébrique des Nombres, Borevich, I. Shafarevich, Gauthier-Villars.

Approfondissements

- Second cas de Fermat, fonctions zeta de Dedekind, fonctions L de Dirichlet.

Transport et diffusion (MAT567 – MAP567)

François Golse, Grégoire Allaire

Le but de ce cours est de présenter des modèles de transport et de diffusion de particules que l'on retrouve dans de nombreux domaines d'applications pertinents sur le plan énergétique. Par exemple, le mécanisme de réaction en chaîne dans les réacteurs nucléaires, l'effet de serre en climatologie, le transfert radiatif en thermique ou en astrophysique, certains modèles de dynamique des populations structurées en biologie relevant de cette thématique. Après une présentation mathématique de ces modèles, on montrera que la diffusion est la limite du transport dans un régime fortement collisionnel, et on expliquera la notion de masse ou de taille critique. On introduira des méthodes de résolution numérique de type differences finies et Monte-Carlo.

Plan du cours

- Introduction et modèles
- Théorie du transport linéaire
- Théorie de l'équation de Boltzmann linéaire
- Limite de diffusion en transport
- Méthodes numériques
- Méthodes numériques
- Criticité et problème spectral
- Calcul critique et sensibilité
- Homogénéisation

Bibliographie

- Dautray R., Méthodes probabilistes pour les équations de la physique, Eyrolles, Paris (1989)
- Dautray R., Lions J.-L., Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Masson, Paris (1988)
- Perthame B., Transport equations in biology, Birkhäuser, Bâle (2007)
- Planchard J., Méthodes mathématiques en neutronique, Collection de la Direction des Études et Recherches d'EDF, Eyrolles (1995)
- Pomraning G., The equations of radiation hydrodynamics, Pergamon Press, Oxford, New York (1973)

Assemblage combustible

Prérequis

Connaissance élémentaires d'intégration et d'analyse de Fourier. Il est conseillé – mais pas indispensable - d'avoir suivi l'un des trois cours de mathématiques suivants de 2e année : MAT431, MAT432, MAP411, MAP431

Approfondissements

Des approfondissements en liaison avec le module Transport et Diffusion seront proposés. Leur structure sera souple, le travail personnel sur documents jouera un rôle prépondérant, éventuellement précédé de quelques cours d'introduction. Ils conduiront à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

- Optimisation de formes et application à un problème de l'énergie nucléaire. Le but de ce projet est l'étude d'une méthode d'optimisation de formes pour un problème de rechargement du combustible dans un réacteur nucléaire. Il s'agit de positionner différents types de combustible nucléaire en quantité fixée pour optimiser le fonctionnement du réacteur. L'originalité de l'approche proposée ici est d'utiliser une méthode d'optimisation de formes basée sur la théorie de l'homogénéisation. Grosso modo, on suppose que les différents types de combustible peuvent se «mélanger» et on optimise leur proportion en tout point. Les calculs (en théorie de la diffusion) seront réalisés avec le logiciel FreeFem++.
- Homogénéisation d'un modèle de diffusion. Le but de ce projet est l'homogénéisation, c'est-à-dire la moyennisation, d'un modèle de diffusion dans un milieu périodique. On étudiera d'abord la stratégie de factorisation dans un milieu purement périodique (en 1-d avec Scilab, éventuellement en 2-d avec FreeFem++), puis on fera des expériences numériques sur le cas, beaucoup plus délicat, de la juxtaposition de deux milieux périodiques. Une application typique est le calcul de criticité d'un réacteur nucléaire.

Relativité générale (MAT568)

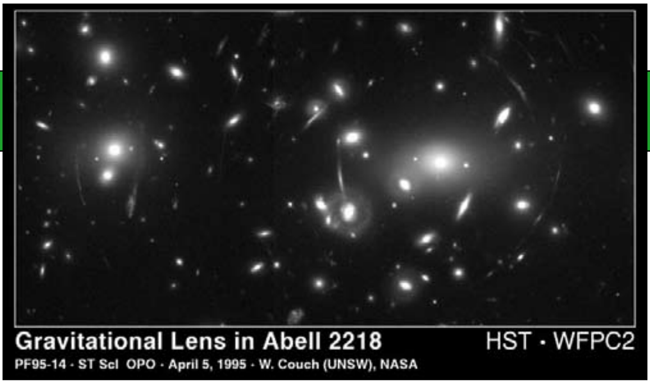
Jean-Pierre Bourguignon

La Relativité générale est une des grandes théories physiques développées au cours du XXe siècle à l'instigation d'Albert Einstein. Elle propose une révision radicale de la conception newtonnienne de la gravitation en assimilant les effets de cette interaction à des conséquences de la présence de courbure dans l'espace-temps, dont la géométrie est modifiée par les masses. C'est à ce titre qu'elle est exemplaire de l'apport de théories mathématiques élaborées aux problématiques de la physique théorique.

Cette théorie fondamentalement non-linéaire permet une présentation assez complète des outils de la géométrie différentielle moderne avec de spectaculaires et substantielles applications. Comme, sans nuire à la compréhension, il est possible de développer parallèlement les géométries riemannienne et lorentzienne (avec sa signature (-+++) modélisant les cônes de lumière, c'est elle qui sert de cadre à la théorie d'Einstein), ce cours peut attirer des élèves intéressés tant par les mathématiques que par la physique.

Les outils fondamentaux dont l'introduction est l'objet du cours sont les champs de tenseurs, les notions de dérivation covariante, de courbure et de courbes géodésiques. Leur étude est menée et illustrée particulièrement sur les modèles physiques de la théorie de la Relativité Générale comme la métrique de Schwarzschild ou les trous noirs. Le système des équations d'Einstein, qui régit la théorie physique, a son pendant en géométrie riemannienne. Une étude systématique de ces systèmes d'équations aux dérivées partielles n'est pas encore disponible mais des progrès récents très importants viennent d'être acquis, permettant de disposer des premiers résultats globaux les concernant.

Cet enseignement a été conçu comme un enseignement intégré de mathématiques et de physique. Un de ses objectifs est de faire percevoir l'unité des méthodes mais aussi de temps en temps la différence des préoccupations entre mathématiciens et physiciens.



Bibliographie

- M.V. Berry, Principles of Cosmology and Gravitation, Adam Hilger, 1989.
- Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick, Analysis, Manifolds and Physics, North-Holland, 1977; volume 2 : 1990.
- S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, Riemannian Geometry, Springer-Verlag Universitext, 2004 (3e édition).
- S. Hawking, G. Ellis, The large scale structure of space-time, Cambridge Univ. Press, 1973.
- C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, Gravitation, Freeman, 1973.
- W. Pauli, Theory of Relativity, 1958, Dover, 1981.
- S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley, 1972.

Approfondissements

Ce cours offre plusieurs possibilités d'approfondissement. Le plus naturel et le plus recommandé est évidemment de suivre le cours de physique qui se déroulera strictement en parallèle avec ce cours. D'autres possibilités d'approfondissement existent dans un cadre purement mathématique sous forme de lectures guidées et indépendantes sur des thèmes comme espaces symétriques, champs de spineurs et opérateurs de Dirac, géométrie conforme.

Département de Mathématiques
École Polytechnique
91128 Palaiseau cedex

Tél. : 01 69 33 49 59 ou 49 99
e.mail : secret@math.polytechnique.fr

ÉCOLE POLYTECHNIQUE • Centre Poly-Média • 2009