

Ⓘ L'hypothèse de Riemann.

th. Soit $f: X_0 \rightarrow Y_0 / \mathbb{F}_q$ ~~projective~~ lisse.

Si $y \in |Y|$, $(R^k f_* \mathcal{O}_X)_y \cong H^k(X_y, \mathcal{O}_y)$ dans le lissage est équivalent à
 cdb ~~propre~~

" Soit X_0 / \mathbb{F}_q ~~projective~~ lisse. Alors les h^k de $F^* G^* H^k(X, \mathcal{O}_X)$,
 copies avec multiplicité, ne dépendent pas de l "

II Réductions

① On suppose X projective.

Pour le lemme de Chow + algorithmes de de Saz, $\exists X'_0 \xrightarrow{\pi} X_0$
 et $H^k(X, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^k(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0})$.
 (où X'_0 est projectif géométriquement fini)
 (où X'_0 est lisse)

② On peut remplacer \mathbb{F}_q par \mathbb{F}_{q^m} .

En effet, F est remplacé par $(F_{\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_{q^m}})^{om}$, donc ses vp. sont dans \mathbb{F}_{q^m} .

③ On peut supposer X géométriquement intègre, de dimension d (par ②).

④ On peut supposer $k \leq d$

$$H^k(X, \mathcal{O}_X) \times H^{2d-k}(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^{2d}(X, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X(-d)$$

Ainsi si (α_i) vp de F^* sur H^k , $(\frac{q^d}{\alpha_i})$ vp de F^* sur H^{2d-k} .
 \uparrow F^* agit par $\deg(F) = q^d$.

⑤ On pose $k = d$.

Soit $Y_0 \subseteq X_0$ l'intersection de $d-k$ hyp. planes généraux.
 $\dim Y_0 = k$

III Picard de Lefschetz

A° Géométrie

X_0/\mathbb{F}_q proj. lisse g.l.t. de dim d paire. Récence sur d ($d=0$ Ok).

On choisit un picard de Lefschetz sur X_0 : soit H/X_0 assez ample, $F, G \in H^0(X_0, H^2)$ généraux tq $\{F=G=0\} \subseteq X_0$ lisse de codim. 2, avec éclat $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$, et tq \tilde{X}_0 ait fibres lisses au-dessus d'un unique point double adhérent

Précisément, $U \in U_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \ni p_1, \dots, p_k = \text{fibres singulières}$

• Pour calcul de la cohomologie d'un éclat, $H^k(X, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^k(\tilde{X}, \mathbb{Q})$

• Pour le cas, $E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{P}^1, R^q \mathcal{F}_* \mathbb{Q}) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{Q})$.

Il suffit donc d'obtenir les up de F^* sur $E_2^{0,d}$, $E_2^{1,d-1}$ et $E_2^{2,d-2}$

Etude locale
 (B) ~~les faisceaux $R^q f_* \mathcal{O}_E$~~

$$p \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_q), \quad \tilde{X}_p \xleftarrow{i} \tilde{X}_T \xleftarrow{j} \tilde{X}_{\eta}^2$$

$$\downarrow$$

$$T = G_{\mathbb{P}^1, p}^{\text{sh}} \leftarrow \text{de point géométrique } \eta$$

Sur \tilde{X}_p , $\mathcal{O}_E \xrightarrow{sp} i^* R_{j_*}^1 \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathbb{I} := \text{Coker}(sp) \xrightarrow{+1}$

} clo

$$\dots \rightarrow H^k(\tilde{X}_p, \mathcal{O}_E) \rightarrow H^k(\tilde{X}_T, i^* R_{j_*}^1 \mathcal{O}_E) \rightarrow H^k(\tilde{X}_p, \mathbb{I}) \rightarrow \dots$$

|| cd propre

$$H^k(\tilde{X}_T, R_{j_*}^1 \mathcal{O}_E)$$

$$H^k(\tilde{X}_{\eta}^2, \mathcal{O}_E) \quad ||$$

Hypothèse [cas général, le plus difficile] : $\delta_i \neq 0$.

$$\text{Alors } 0 \rightarrow H^{d-1}(\tilde{X}_x, \mathcal{O}_e) \rightarrow H^{d-1}(\tilde{X}_T, \mathcal{O}_e) \rightarrow \mathcal{O}_e(-\frac{d}{2}) \rightarrow 0$$

$$H^k(\tilde{X}_x, \mathcal{O}_e) \xrightarrow{\sim} H^k(\tilde{X}_T, \mathcal{O}_e) \text{ constant.}$$

Ainsi, $R^{d-2}f_* \mathcal{O}_e$ et $R^d f_* \mathcal{O}_e$ sont localement constants sur \mathbb{P}^1 , donc constants sur \mathbb{P}^1 d'après le lemme.

$$\bullet E_2^{0,d} = H^0(\mathbb{P}^1, R^d f_* \mathcal{O}_e)$$

$$\stackrel{\text{const}}{=} H^d(X_0, \mathcal{O}_e)$$

$$\underbrace{H^{d-2}(Y, \mathcal{O}_e(1))}_{\substack{\uparrow \text{localement constante} \\ \text{par HDR } \text{car } \text{up de } F^* \text{ ici} \\ \text{sur algébriques avec } q^{d/2-1/2} \leq |x| \leq q^{d/2+1/2}}}$$

dim. $d-2$

$Y \hookrightarrow X_0$ section hyperplane lisse

par HDR car up de F^* ici
sur algébriques avec $q^{d/2-1/2} \leq |x| \leq q^{d/2+1/2}$.

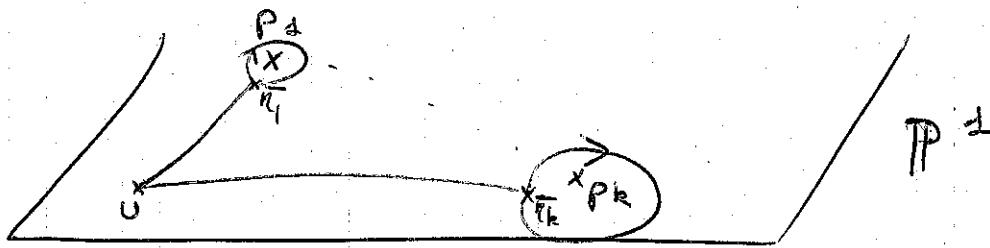
$$\bullet E_2^{2,d-2} = H^2(\mathbb{P}^1, R^{d-2} f_* \mathcal{O}_e)$$

$$\stackrel{\text{const} + \text{dualité}}{=} H^{d-2}(X_0, \mathcal{O}_e(-1))$$

$$\int \text{localement constante}$$

$$\underbrace{H^{d-2}(Y, \mathcal{O}_e(-1))}_{\text{idem.}}$$

② Cycles évanescents



$$\delta_i \in H^{d-1}(X_{\bar{\eta}_i}, \mathbb{Q}_\ell(\frac{d}{2}-1)) \xrightarrow{\text{choix}} H^{d-1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell)$$

$$\uparrow$$

$$z \in \text{Gal}(\bar{\eta}_i/\eta_i) \xrightarrow{\text{pe}} z \in \mathbb{Z}$$

Picard-Lefschetz:
$$z(\alpha) = \alpha \pm \text{pe}(\sigma) (\alpha, \delta_i) \delta_i \quad \left. \vphantom{z(\alpha)} \right\} \text{transformations}$$

\uparrow dépend de d \uparrow cup-produit.

En particulier $\pi_1(U, u) \subset H^{d-1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell)$ est nodale et surfice.

Pour cohomologie à \mathbb{C} , $\pi_1(U, u)$ nodale et exercée par les ~~éléments~~ $\text{Gal}(\bar{\eta}_i/\eta_i)$

Ainsi, l'action de $\pi_1(U, u) \subset H^{d-1}(X_u)$ est exercée par les transformations ci-dessus.

Soit $E := \langle \delta_i \rangle \subseteq H^{d-1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell)$. E est stable sous la nodale (sur $\pi_1(U, u)$) des correspond à un système local $E \hookrightarrow R^{d-1} \mathbb{Q}$ sur U .
 Cas d et canonique, il est stable sous $\pi_1(U, u)$, des correspond à $E_0 \hookrightarrow R^{d-1} \mathbb{Q}$ sur U_0 .

Hypothèse [SGAVI, 5.6.10] [Weil II, 4.1] : (\cdot, \cdot) est non dégénérée sur E .
 sinon : classe $0 \rightarrow E \rightarrow E/E \rightarrow 0$

Alors $R^{d-1} \mathbb{Q} \big|_u = E \oplus E^\perp$
 \uparrow ici, action triviale de $\pi_1(U, u)$.

$$R^{d-1} \mathbb{Q} = j_* (R^{d-1} \mathbb{Q} \big|_u) = j_* (E \oplus E^\perp) \text{ constant sur } \mathbb{P}^1$$

$$E_{\pm}^{d-1, d-1} = H^{\pm}(\mathbb{P}^1, R^{d-1} \mathbb{Q}) = H^{\pm}(\mathbb{P}^1, j_* E)$$

IV) Etude du faisceau des cycles évanescents

$u \in U_0 \xrightarrow{\delta_0} \mathbb{P}^1$ \mathcal{E}_0 / U_0 le système local des cycles évanescents

- $\mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{E}_0 \xrightarrow[\text{parfait}]{\text{cup } (\cdot, \cdot)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d+1)$
- $\pi_1(U, u) \xrightarrow{\text{Picard-Lefschetz}} \mathcal{E}_u = E = \langle \delta_1, \dots, \delta_k \rangle$
- th les δ_i sont conjugués sous $\pi_1(U, u)$.

But = up de $F^* G H^{\pm}(\mathbb{P}^1, j_* \mathcal{E})$.

Étapes = (i) $\text{Im} [\pi_1(U, u) \xrightarrow{\rho} \mathcal{S}_p(E, (\cdot, \cdot))] \text{ est ouverte (par la topologie l-adique)}$
 [groupe monodromie] [Kazhdan-Rangulis].

(ii) $\forall x \in |U_0|$, $\det(1 - F_x^* t, E)$ est à coefficients rationnels
 [localité locale]

(iii) $\forall x \in |U_0|$, les up de F_x^* sur E sont des nb algébriques
 [valeurs propres locales] \det les conjugués ex ont $|\cdot| = q^{d/2 - 1/2}$

(iv) les up de $F^* G H^{\pm}(\mathbb{P}^1, j_* \mathcal{E})$ sont
 $q^{d/2 - 1/2} \leq |\cdot| \leq q^{d/2 + 1/2}$

Preuves = (i) théorie de Picard-Lefschetz

(ii) lien avec $Z(\tilde{X}_x, t)$ qui est à coeffs rationnels + utilisation de Čebotarev

(iii) & (iv) seule des traces

Preuve de (i)

$G = \text{Im}(\rho) \subseteq \mathfrak{sp}(E)$ est caractérisé par un g-lie \mathfrak{g} -adique
 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{sp}(E)$ son algèbre de Lie.

- Par Picard-Lefschetz, \mathfrak{g} est engendré par $\left[e \mapsto (e, \delta_i) \delta_i \right]_{1 \leq i \leq k}$
 \uparrow
 $T(\delta_i)(e)$

Par ailleurs $\mathfrak{sp}(E)$ est engendré par $\mathbb{C} T(\delta) : e \mapsto (e, \delta) \delta$

Notons $\Delta = \{ \delta \in E \mid T(\delta) \in \mathfrak{g} \}$

- $\hookrightarrow \delta_i \in \Delta$
 $\hookrightarrow \Delta$ stable par translation
 \hookrightarrow si $\delta, \delta' \in \Delta$, $[T(\delta), T(\delta')] : e \mapsto (\delta, \delta') \delta$
 \uparrow
 \mathfrak{g}

Ainsi, si $\delta, \delta' \in \Delta$ non orthogonaux, $\mathbb{C} \delta \oplus \mathbb{C} \delta' \subseteq \Delta$

On déduit $\Delta = \bigcup \Delta_j$
 \uparrow ss-espaces linéaires $\mathbb{C} \delta$ $\mathbb{C} \delta'$ orthogonaux

Mais chaque Δ_j est stable par $\mathbb{C} T(\delta_i)$ donc par \mathfrak{g} .

Or $\mathfrak{g} \subsetneq \mathfrak{sp}(E)$ est irréductible $\rightarrow \Delta_j = \Delta = E \rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(E)$

Preuve de (ii)

• $x \in |U_0|$ $Z(\tilde{X}_x, t) = \prod_i \det(1 - F_x^* t | R^i p_* \mathcal{O}_x) \stackrel{G-11^{c+1}}{=} \prod_{i \neq d-1} \det(1 - F_x^* t | \mathcal{E}_x^i) \times \det(1 - F_x^* t | \mathcal{E}_x)$

tan ces termes sont associés à des faisceaux
 localement constants sur U_0 , constants sur U , donc
 associés à une rep. de $\hat{Z} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$

\Rightarrow il existe des unités l -adiques $\alpha_i \neq \beta_j \in \overline{\mathbb{Q}_l}$ tq $\forall x \in |U_0|$

$\mathcal{Q}(t) \ni Z(\tilde{X}_x, t) = \frac{\prod (1 - \alpha_i \text{deg } x t)}{\prod (1 - \beta_j \text{deg } x t)} \det(1 - F_x^* t | \mathcal{E}_x)$

• Maintenant (β_j) défini sur \mathbb{Q} .

$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ il existe un nb fini d'éléments } * \in K \text{ tq } \exists k \times n, k \in k, \\ (1 - \beta_j \text{deg } x t) \nmid (1 - \alpha_i \text{deg } x t) \\ * \text{ il existe un ensemble fini } L \text{ de } x \text{ de degré } 1 \text{ tq} \\ \forall x \in L, (1 - \beta_j \text{deg } x t) \nmid \det(1 - F_x^* t | \mathcal{E}_x) \quad [\text{Cebotarev}] \end{array} \right.$

$\exists k \subseteq \mathbb{N}_{\geq 2}$ fini assez grand, $L \subseteq |U_0|$ assez petit, des
 de degré 0

$\prod (1 - \beta_j \text{deg } x t) = \text{dénominateur de } Z(\tilde{X}_x, t) \text{ pour } \begin{cases} x \notin L \\ \text{de } k \times \text{deg } x \end{cases}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mais il existe un unique famille } (\beta_j) \text{ d'éléments de } \mathbb{Q} \text{ vérifiant cela, donc} \\ \text{elle est stable dans } \text{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}) \text{ donc définie sur } \mathbb{Q}. \\ \text{en effet, si } (\beta_j) \text{ et } (\gamma_j), \text{ alors que } \forall j, \beta_j \neq \gamma_j. \text{ Alors soit } x \in L \\ \text{tq } k \times \text{deg } x \text{ } n_j \times \text{deg } x \text{ non absolue! } \Rightarrow \exists j \exists p, \text{ et a } \text{ la suite d'un successeur.} \end{array} \right.$

• Partes (a.) définies en \mathbb{Q}

$$\text{Soit } P(t) = \prod (1 - \alpha_i \text{deg } x t) \det(1 - F_x^* t | E_x) \in \mathbb{Q}[t]$$

Si (S_0) est tq $\frac{P(t)}{\prod (1 - \beta_e \text{deg } x t)}$ polynôme $\forall x$ | hors de L assez grand
unites ℓ -adéliques. le grand β_e par $k \in K$ assez grand

Rapport ci-dessus vaut $\prod (1 - \beta_e \text{deg } x t) / \prod (1 - \alpha_i \text{deg } x t)$.

Ainsi, la collection de S_e de \mathbb{Q} peut être considérée comme unique : (α_i) , des sites sur $\text{Adic}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

$$\boxed{\text{Ce btaou}} : \pi_1(U, u) \longrightarrow Sp(E)$$

$$\pi_1(U_0, u) \xrightarrow{p_0} \text{~~...~~ } GSp(E)$$

~~...~~

$$\pi_1(U_0, u) \xrightarrow{(p_0, \rho_0)} \mathbb{Z} \times GSp(E)$$

$$\xrightarrow{\sim p_0} H := \{(m, g) \mid p(g) = q^{-m}\}$$

C'est $\mathbb{Z} \rightarrow Sp(E) \rightarrow H \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$, + pas de ρ_0 ,
 on voit bien qu'il y a un lien entre H et \mathbb{Z} le noyau est des $I_m \rho_0^u$

Si $\beta_e \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ une ℓ -adique, $H = \{(m, g) \in H \mid \beta_e^m \text{ up de } g\}$
 a mesure (de Haar) nulle [ligne à ligne par \rightarrow ordonné + Fubini]

Alors pour presque tout x , $\rho_0(F_x) \notin H$, i.e.

$$\left(1 - \beta_e t^{\text{deg } x}\right) \nmid \det(1 - F_x^* t | E_x)$$

Preuve de (iii)

Fix $k \geq 1$

$$\prod_{x \in |U_0|} \det(1 - F_x^* t^{\deg x} | \mathbb{E}_{\bar{x}}^{\otimes 2k})^{-1} = Z(U_0, \mathbb{E}_0^{\otimes 2k}, t) \stackrel{\text{fonct. des tores}}{=} \prod_i \det(1 - F^* t | H_c^i(U, \mathbb{E}^{\otimes 2k}))$$

$$\begin{aligned} H_c^0(U, \mathbb{E}^{\otimes 2k}) &= 0 \quad (\text{évident}) \\ H_c^2(U, \mathbb{E}^{\otimes 2k}) &= H^0(U, \mathbb{E}^{\otimes 2k}(\pm))^\vee \\ &= ((E^{\vee \otimes 2k}(\pm))^{H_1(U, 0)})^\vee \\ &= [E^{\otimes 2k}(-1)]_{\pi_1(U, 0)} \leftarrow \text{convoit} \\ &\stackrel{\text{grose nouvelle}}{=} [E^{\otimes 2k}(-1)]_{Sp(E)} \end{aligned}$$

Mais Weyl calcule ces convoits : $\alpha: \{1, \dots, 2k\} = \{a_1, b_1\} \cup \dots \cup \{a_b, b_b\}$

$$\begin{aligned} E^{\otimes 2k}(-1) &\longrightarrow \mathbb{Q}(-k(d-1) - 1) \\ x_{a_i} \otimes \dots \otimes x_{b_k} &\longrightarrow \prod_i (x_{a_i}, x_{b_i}) \\ \text{or } H_c^2(U, \mathbb{E}^{\otimes 2k}) &= \mathbb{Q}(-k(d-1) - 1) \quad N \leftarrow \text{valeurs de telles permutations} \end{aligned}$$

$$\prod_{x \in |U_0|} \det(1 - F_x^* t^{\deg x} | \mathbb{E}_{\bar{x}}^{\otimes 2k})^{-1} = \frac{\det(1 - F^* t | H_c^1(U, \mathbb{E}^{\otimes 2k}))}{(1 - q^{k(d-1)+1} t)^N}$$

par (ii), chaque tore est à coeffs $\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$

Car le produit est par $|t| < \frac{1}{q^{k(d-1)+1}}$,

c'est le cas de chaque tore individuel.

Si α ν_p de F_x^* sur $\mathbb{E}_{\bar{x}}$, α^{2k} ν_p de F_x^* sur $\mathbb{E}_{\bar{x}}^{\otimes 2k}$, donc $\frac{1}{|\alpha|^{2k}} \geq \frac{1}{q^{k(d-1)+1}}$

$\xrightarrow{k \rightarrow \infty} |\alpha| \leq q^{\frac{d-1}{2}}$

la dualité parfaite $\mathbb{E}_{\bar{x}} \otimes \mathbb{E}_{\bar{x}} \rightarrow \mathbb{Q}(-d+1)$ fait la restriction $|\alpha| \geq q^{\frac{d-1}{2}}$

Preuve de (iv)

$$\bullet \quad 0 \rightarrow j_! \mathcal{E} \rightarrow j_* \mathcal{E} \rightarrow j_* \mathcal{E} / j_! \mathcal{E} \rightarrow 0$$

$\cong H^\pm$

au vu noter que
le up de F^* est sans
dg et rajoute des ψ .

$$\left\{ \begin{array}{l} H_c^\pm(U, \mathcal{E}) \rightarrow H^\pm(\mathbb{P}^1, j_* \mathcal{E}) \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

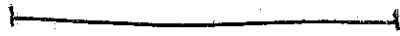
$$\bullet \quad 0 \rightarrow H^\pm(\mathbb{P}^1, j_* \mathcal{E}) \xrightarrow{\text{long}} H^\pm(U, \mathcal{E})$$

$\} \text{ ded}$

de note, au rajout
le up de F^* est :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_c^\pm(U, \mathcal{E}^\vee(\pm)) \rightarrow H^\pm(\mathbb{P}^1, j_* \mathcal{E})^\vee \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

On note que le premier point (le second analogue)



$$\prod_{x \in |U_0|} \det(1 - F_x^* t^{dg_x} | \mathcal{E}_x^{-1}) =: Z(U_0, \mathcal{E}_0, t) \stackrel{\text{formule des traces}}{=} \prod_i \det(1 - F^* t | H_c^i(U, \mathcal{E}))^{(-1)^{i+1}}$$

$$\left[\begin{array}{l} H_c^0(U, \mathcal{E}) = 0 \text{ (civlet)} \\ H_c^2(U, \mathcal{E})^\vee = H^0(U, \mathcal{E}^\vee(\pm)) \\ = (E_0^\vee)^{\pi_1(U, 0)} \\ = (E^\vee(1))^{\mathbb{P}^1(\mathbb{F})} = 0 \end{array} \right.$$

$\} \text{ presque nulle}$

$\in \mathbb{Q}[[t]]$ par (ii)

$$= \det(1 - F^* t | H_c^1(U, \mathcal{E}))$$

$\in \mathbb{Q}_\ell[[t]]$

$\rightarrow \in \mathbb{Q}[[t]]$.

Soit α un up de F^* sur $H_c^1(U, \mathcal{E}) \Rightarrow \frac{1}{\alpha}$ racine de $\det \alpha$ algébrique.

Par notre que $|\alpha| \leq q^{\frac{d+1}{2}}$, il suffit de voir que

$$\prod_{x \in |U_0|} \det(1 - F_x^* t^{dg_x} | \mathcal{E}_x) \text{ converge absolument pour } |t| < q^{-\frac{d-1}{2}}$$

$$\prod_{x \in |U_0|} \prod_{i=1}^r (1 - \alpha_{x,i} t^{dg_x}), \quad |\alpha_{x,i}| = q_x^{\frac{d-1}{2}} \text{ par (iii).}$$

Satz $U_0 \xrightarrow{\delta: \pm} \mathbb{A}^{\pm}$: d y a $\leq \delta q^m$ parts de degré m dans U_0 .

$$\sum_{m=0}^{\infty} |d_{q^m}| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \delta q^m \binom{d-1}{m} L^m \approx \frac{d+1}{2}$$