Analyse réelle élémentaire et équations différentielles

1 Analyse réelle élémentaire

1.1 Limites et continuité d'une fonction

Dans toute la suite, f désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$ où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ de bornes a et b avec $a \leqslant b$ avec éventuellement $a = -\infty$ et $b = +\infty$. Si $I = [a, b]$ ou $I =]-\infty, b]$ ou encore $I = [a, +\infty[$, on dit que I est fermé. Si $I =]a, b[$, on dit que I est ouvert. On note $\overline{I}$ le plus petit intervalle fermé contenant I. Par exemple, si $I =]2, +\infty[$, $\overline{I} = [2, +\infty[$ et on note $\tilde{I} = \overline{I} \cup \{+\infty\}$ si I est infini à droite (de la forme $\cdots, +\infty[$), $\tilde{I} = \overline{I} \cup \{-\infty\}$ si I est infini à gauche (de la forme $]-\infty, \cdots)$ et $\tilde{I} = \overline{I}$ sinon.

Pour simplifier l'exposé, on va introduire la notion de voisinage d'un point.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $c \in \overline{I}$ un réel. On appelle voisinage de c dans I tout sous ensemble V de I tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\cap I \subset V.$$

On notera dans la suite $V \in \mathcal{V}_I(c)$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ infini à droite. On appelle voisinage de $+\infty$ dans I (et on note $V \in \mathcal{V}_I(+\infty)$) tout sous ensemble V de I tel qu'il existe $A > 0$ vérifiant

$$]A, +\infty[\cap I \subset V.$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ infini à gauche. On appelle voisinage de $-\infty$ dans I (et on note $V \in \mathcal{V}_I(-\infty)$) tout sous ensemble V de I tel qu'il existe $A < 0$ vérifiant

$$]-\infty, A[\cap I \subset V.$$

Exemple. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $c \in \mathbb{R}$, $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ est un voisinage de a dans $\mathbb{R}$. Pour tout $M > 0$, $[M, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$.

Définition. Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (éventuellement infini), $c \in \tilde{I}$ et $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$. On dit que f admet ℓ comme limite en c si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\ell)$, il existe une voisinage $W \in \mathcal{V}_I(c)$ tel que $f(W) \subset V$.

Remarque. La définition ci-dessus est théorique. Il faut avoir en tête les cas pratiques qu'on peut rencontrer.

- Limite finie.Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f admet ℓ comme limite en x_0, et on écrit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

si
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \eta$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. En plus court, on écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \left(|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\right).$$

– Limite infinie. On dit de même que f admet $+\infty$ comme limite en x_0 si pour tout $A > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - x_0| < \eta$, on a $f(x) > A$.

Exemple. La fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ admet $\ell = 4$ comme limite en $x_0 = 2$. Pour montrer ce fait, on va utiliser directement la définition. Soit alors $\varepsilon > 0$. Notre objectif est de trouver $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I,\ \left(|x - 2| < \eta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon\right).$$

Remarquons que $|x^2 - 4| = |x-2| \cdot |x+2|$. Alors on veut η tel que $|x-2| \cdot |x+2| \leqslant \eta \cdot (\eta + 4)$ soit inférieur à ε. Il suffit de choisir η tel que $\eta \cdot (\eta + 4) \leqslant \varepsilon$. On peut par exemple choisir $\eta = \varepsilon/4$.

Exercice 1. *Montrer en utilisant la définition que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet 1 comme limite en $x_0 = 1$. Montrer de même que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ admet $+\infty$ comme limite en 0.*

Proposition. Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f admet une limite α en a et g une limite β en a, alors les fonctions $f + g$ et fg peuvent admettre une limite en a, selon le tableau suivant

$+$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha = +\infty$	$\alpha = -\infty$
$\beta \in \mathbb{R}$	$\alpha + \beta$	$+\infty$	$-\infty$
$\beta = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$\beta = -\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

$\times$	$\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$	$\alpha \in \mathbb{R}^{-*}$	$\alpha = 0$	$\alpha = +\infty$	$\alpha = -\infty$
$\beta \in \mathbb{R}^{+*}$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\beta \in \mathbb{R}^{-*}$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\beta = 0$	0	0	0	?	?
$\beta = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$\beta = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

De même, si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, si f admet $\alpha \in J$ comme limite en x_0 et g admet β comme limite en α, alors $g \circ f$ admet β comme limite en x_0.

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $c \in I$. On dit que f est continue en c si f admet une limite en c et que cette limite vaut $f(c)$, c'est-à-dire si

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in I}} f(x) = f(c).$$

Exemple. Les fonctions polynômes, exponentielle, logarithme… sont continues sur leur ensemble de définition. La fonction partie entière est discontinue en tous les $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2. *Montrer que la fonction*

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 \textit{ si } x = 0 \\ x \ln x \textit{ sinon} \end{cases}$$

est continue sur son ensemble de définition.

1.2 Dérivabilité, classe $\mathcal{C}^k$

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I =]a, b[$ un intervalle ouvert (éventuellement infini), et soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si la fonction

$$\varphi : x \neq x_0 \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite quand x tend vers x_0. Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ cette limite et on l'appelle nombre dérivé de f en x_0.

Si f est dérivable en tout point x_0 de I, on dit que que f est dérivable sur I et la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f en x_0.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en $x_0 = 1$ de dérivée $f'(1) = 2$. Pour montrer ce fait, calculons pour $x \neq 1$

$$\varphi(x) = \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = x + 1.$$

La fonction φ admet bien une limite quand $x \to 1$, qui vaut 2. Ainsi, on a montré que $f'(1)$ existe et vaut 2.

Exercice 3. *Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en $x_0 = 2$, de dérivée $-1/4$. Montrer que $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.*

Proposition. Dès que toutes les quantités existent, on a les formules suivantes. $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = fg' + fg'$, $(1/f)' = -f'/f^2$, $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g \ldots$

Définition. On dit qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si f est continue sur I. On dit qu'elle est de classe C^1 si elle est dérivable et que f' est continue. On dit qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si elle est de classe C^{k-1} et si $f^{(k-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (où $f^{(n)}$ est définie par récurrence comme $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Enfin, on dit que f est de classe $\mathcal{D}^1$ sur I si elle est dérivable sur I. On dit qu'elle est de classe $\mathcal{D}^k$, pour $k \geqslant 2$, si elle est de classe $\mathcal{D}^{k-1}$ et que $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I.

1.3 Relations de comparaison

Définition. Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]\alpha, \beta[$ et soit $a \in [\alpha, \beta]$. On dit que

- f est négligeable devant g au voisinage de a et on note $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|.$$

  Si g ne s'annule pas au voisinage de a, cette condition se lit $\frac{f}{g} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$
- f est équivalente à g au voisinage de a et on note $f \sim g$ si $f - g(x) = \underset{x \to a}{o}(f(x))$ (on peut écrire aussi, de manière équivalente $f - g(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$).

  Si g ne s'annule pas au voisinage de a, cette condition se lit $\frac{f}{g} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$.

Si I est infini (par exemple à droite), on peut prendre $a = +\infty$ et les définitions se récrivent[1].

[1] Ces deux définitions sont aussi valables pour des suites. Par exemple, la première se lit : (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note $u_n = o(v_n)$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall n > N,\ |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|.$$

- f est négligeable devant g au voisinage de $+\infty$ et on note $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(g(x))$ si
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall x \in I, x > M \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|.$$
Si g ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$, cette condition se lit $\frac{f}{g} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- f est équivalente à g au voisinage de $+\infty$ et on note $f \sim g$ si $f - g(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(f(x))$ (on peut écrire aussi, de manière équivalente $f - g(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(g(x))$).
Si g ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$, cette condition se lit $\frac{f}{g} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exemple. Au voisinage de zéro, on a $\sin x \sim \tan x$, $e^x \sim 1$. Au voisinage de $+\infty$, on a $x^2 + x \sim x^2$. En effet, comme x^2 ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$, on vérifie qu'on a
$$\frac{x^2 + x}{x^2} = 1 + \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Exercice 4. *Montrer que x^4+x^2 est négligeable devant x^5 au voisinage de $+\infty$. Montrer que $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$ au voisinage de $+\infty$.*

1.4 Développements limités

Définition. Soit $I =]\alpha, \beta[$ avec $\alpha < \beta$ éventuellement infinis, soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre k en a s'il existe des réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ tels que
$$f(x) = f(a) + \lambda_1(x - a) + \cdots + \lambda_k(x - a)^k + o[(x - a)^k].$$

Dans la suite, on notera, pour simplifier « f admet un $DL_k(a)$ ».

Exemple. Tout polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ admet un développement limité à l'ordre k en 0, pour tout k. En effet, si $n \leqslant k$, on a
$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \underbrace{0}_{=o(x-a)^k},$$
et si $k \leqslant n$, on a
$$P(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} a_i x^i}_{=\underset{x\to 0}{o}(x^k)}.$$

Exercice 5. *Montrer que $f : x \mapsto 2 + x^2 - 5x^3\sqrt{x}$ admet un développement limité d'ordre 3 en zéro.*

1.4.1 Formule de Taylor-Young et développements limités usuels

Si $f : I =]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ est une fonction n fois dérivables, alors f admet un DL à l'ordre n en tout point a de I donné par
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2 f'(a)}{2!} + \cdots + \frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n.$$

Cette formule est utile à connaître, mais dans les exercices, on essaiera au maximum de s'en passer (il y a presque toujours mieux à faire).

En utilisant cette formule, on peut obtenir les développements limités usuels, au voisinage de $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n), (\alpha \in \mathbb{R}), \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}), \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}), \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}), \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}), \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}), \\
\operatorname{argth} x &= x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}), \\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}), \\
\operatorname{argsh} x &= x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}), \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \underset{x\to 0}{o}(x^7).
\end{aligned}$$

Attention : ces développements sont valables au voisinage de zéro uniquement. Pour des DL au voisinage d'un autre point, il faut trouver un moyen de se ramener à un autre point (en général 0). Voir l'exemple suivant.

Exemple. Déterminons le $DL_3(1)$ de $x \mapsto \exp(x)$. On cherche donc des réels (a, b, c) tels que

$$\exp(x) = \exp(1) + a(x-1) + b(x-1)^2 + c(x-1)^3 + \underset{x\to 1}{o}(x-a)^3.$$

En écrivant $y = x - 1$, cela revient à chercher a, b, c tels que

$$\exp(y+1) = \exp(1) + ay + by^2 + cy^3 + \underset{y\to 0}{o}(y^3).$$

Comme on connaît le DL de $y \mapsto e^y$ en zéro, il suffit d'écrire

$$e^{1+y} = e^1 \cdot e^y = e(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \underset{y\to 0}{o}(y^3)) = e + ey + \frac{e}{2}y^2 + \frac{e}{6}y^3 + \underset{y\to 0}{o}(y^3),$$

ce qui est exactement le DL recherché.

Exercice 6. *Calculer, en utilisant les développements usuels, les DL suivants.*

$$\begin{array}{ll} DL_4(0)de & x \mapsto \dfrac{1}{2+x} \\ DL_3(1)de & x \mapsto \dfrac{1}{1+x} \\ DL_5(4)de & x \mapsto \sqrt{x} \\ DL_{10}(\pi/3)de & x \mapsto \sin(x) \\ DL_6(0)de & x \mapsto \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$$

1.4.2 Opérations avec les développements limités

Proposition (Addition). Soient f et g deux fonctions définies $I =]\alpha, \beta[$ et qui admettent toutes deux un développement limité d'ordre k en $a \in I$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i (x-a)^i + o(x-a)^k \; g(x) = \sum_{i=0}^{k} \mu_i (x-a)^i + \underset{x \to a}{o}(x-a)^k.$$

Alors, $f+g$ admet aussi un développement limité d'ordre k en a, et de plus, ce DL est la somme des DL de f et g :

$$(f+g)(x) = \sum_{i=0}^{k} (\lambda_i + \mu_i)(x-a)^i + o(x-a)^k.$$

Proposition (Multiplication). Avec les mêmes f et g, le produit fg admet lui-aussi un DL_k en a. De plus, on obtient le DL de fg en multipliant les DL_k de f et g et en supprimant les termes de degré $\geqslant k+1$.

Exemple. Le DL_3 en zéro de $f : x \mapsto \cos x \exp x$ s'obtient de la façon suivante.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Le polynôme obtenu en multipliant ces deux DL_3 est

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{12}. \end{aligned}$$

Il suffit alors, pour obtenir le DL_3 de f en zéro, de supprimer les termes de degré supérieur à 4. On obtient donc

$$\cos x \exp x = 1 + x - \frac{x^3}{3} + \underset{x \to 0}{o}(x^3).$$

Exercice 7. *Calculer les développement limités suivants au voisinage de zéro.*

$$f(x) = \sin x \cdot \ln(1+x) \text{ à l'ordre 3}$$
$$g(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{1-x} \text{ à l'ordre 3}$$
$$h(x) = \tan x \cdot \operatorname{argsh} x \text{ à l'ordre 4}$$
$$u(x) = \cosh(x)\left(e^x + \frac{4}{1-x}\right) \text{ à l'ordre 3}$$

Proposition (Composition). Soit $f : I =]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ et $g : J =]\gamma, \delta[\to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$. Si f admet un $DL_k(a)$ et g admet un $DL_k(f(a))$, alors $g \circ f$ admet un $DL_k(a)$ donné par la composition des développements limités.

Plus précisément, si $f(x) = P_k(x-a) + o(x-a)^k$ et $g(x) = Q_k(x - f(a)) + o(x - f(a))^k$ alors le $DL_k(f(a))$ de $g \circ f$ est obtenu en supprimant du polynôme composé $Q_k(P_k(x-a) - f(a))$ les terme de degré $\geqslant k+1$.

Exemple. Calculons le $DL_3(0)$ de $\ln(\cos x)$. On commence par déterminer les fonctions usuelles (dont on connaît les DL) présentes ici. Il s'agit de cos et de $x \mapsto \ln(1+x)$. Pour appliquer la proposition précédente, il faut écrire

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos x - 1)) \quad \text{où} \quad \lim_{x \to 0} \cos x - 1 = 0.$$

Alors,

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^3),$$
$$\ln(y+1) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$

On remplace alors y par $-\frac{x^2}{2}$ et on calcule

$$(-\frac{x^2}{2}) - \frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{2})^3}{3} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{24}.$$

Il suffit alors de supprimer les termes de degré supérieur à 4 pour obtenir

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Exercice 8. *Calculer les développements limités suivants.*

$$DL_5(0) \quad \text{de} \quad x \mapsto \tan(3x)$$
$$DL_3(0) \quad \text{de} \quad x \mapsto \sqrt{\frac{1}{1-x}}$$
$$DL_4(0) \quad \text{de} \quad x \mapsto \frac{1}{\cos x}$$
$$DL_2(2) \quad \text{de} \quad x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$$
$$Dl_4(0) \quad \text{de} \quad x \mapsto \ln(1 + \cos x)$$
$$DL_5(0) \quad \text{de} \quad x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$$
$$DL_4(0) \quad \text{de} \quad x \mapsto (1 + \sin x)^{\cos x}$$

Exercice 9. *En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes*
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$
$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{x-1}$

Remarque. L'utilisation des développements limités peut aussi permettre de calculer des limites en $+\infty$ ou $-\infty$.
Exemple. Calculons

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right).$$

Lorsque $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ donc on peut faire un développement limité de

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Ainsi,

$$\sqrt{x}\left(\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\left(\frac{1}{3x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}(x^{-3})\right) = \frac{1}{3x^{5/2}} + \underset{x\to\infty}{o}(x^{-5/2}).$$

Exercice 10. *Calculer*

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(x+1) - x\ln x.$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^x - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\right].$$

2 Équations différentielles linéaires

Dans toute cette section, sauf mention contraire, les fonctions seront à valeurs réelles.

2.1 Remarques générales

Définition. On appelle équation différentielle linéaire d'ordre k une équation fonctionnelle ayant pour inconnue une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de la forme

$$a_k(x)y^{(k)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x). \tag{1}$$

Si $a_k(x) \equiv 1$ (c'est-à-dire pour tout x, $a_k(x) = 1$), on dit que (1) est *sous forme résolue.*
Si $b(x) \equiv 0$, on dit que l'équation est *homogène.* Ainsi, à toute équation de type (1) correspond une unique équation homogène obtenue en remplaçant b par la fonction nulle

$$a_k(x)y^{(k)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \tag{2}$$

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est une solution de (1) si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et si

$$\forall x \in I,\ a_k(x)f^{(k)}(x) + \cdots + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = b(x).$$

Proposition. Soient f et g deux solutions de (1). Alors $f - g$ est solution de (2). Ainsi, les solutions de (1) s'obtiennent en ajoutant toutes les solutions de (2) à une solution particulière (n'importe laquelle) de (1).

Examinons en détails les cas suivants.

2.2 Ordre 1

On s'intéresse ici aux équations linéaires d'ordre 1 de type résolu

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x). \tag{3}$$

Solution générale de l'équation homogène. Au vu de la proposition (2.1), il est légitime de s'intéresser en particulier à l'équation homogène

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0. \tag{4}$$

Proposition. Soit A une primitive de a sur I. Alors, l'ensemble des solutions de (4) est exactement

$$\{x \mapsto \lambda e^{-A(x)},\ |\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On appelle aussi cet ensemble de solutions la *solution générale* de (4).

Exemple. La solution générale de l'équation

$$y' + 2xy = 0$$

avec $y : I \to \mathbb{R}$ est

$$x \mapsto \lambda e^{-x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11. *Déterminer la solution générale des équations suivantes (sur un intervalle I qu'on précisera).*

$$\begin{aligned} &y' + 2y = 0 & &y' + 5xy = 0 \\ &y' - e^x y & &y' + 2xe^{x^2}y = 0 \\ &y' - 5\sqrt{x}y = 0 & &y' + x\ln xy = 0. \end{aligned}$$

Solution particulière de l'équation complète. Toujours grâce à la proposition 2.1, il suffit maintenant de trouver une solution particulière (n'importe laquelle) de l'équation complète. Pour ce faire, on peut utiliser la méthode de variation de la constante.

On a vu que $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ étaient les solutions de (3). On peut montrer qu'il est possible de chercher une solution de (4) sous la forme

$$x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}.$$

Pour simplifier l'exposé, nous allons traiter un exemple en détail.

Exemple. Trouver les solutions sur $\mathbb{R}^+$ de

$$y' + 2xy = x. \tag{5}$$

La solution générale de l'équation homogène associée ($y' + 2xy = 0$) est $x \mapsto \lambda e^{-x^2}$. On cherche donc une solution particulière de $y' + 2xy = x$ sous la forme $g(x) = \lambda(x)e^{-x^2}$.
Remarquons que $g'(x) = e^{-x^2}(\lambda'(x) - 2x\lambda(x))$. Alors, g est une solution de (5) si et seulement si $g'(x) + 2xg(x) = x$. C'est-à-dire, si et seulement si $e^{-x^2}(\lambda'(x) - 2x\lambda(x) + 2x\lambda(x)) = x$, c'est-à-dire

$$\lambda'(x) = xe^{x^2}$$

soit, par exemple (on n'a besoin ici que d'une solution)

$$\lambda(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

Une solution particulière est donc $\frac{1}{2}e^{x^2}e^{-x^2} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la solution générale de (5) est

$$x \mapsto \frac{1}{2} + \lambda e^{-x^2},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12. *Trouver les solutions des équations suivantes*

$$y' + \frac{x}{x^2+1}y = 5 \qquad y' + \frac{\cos x}{\sin x}y = 8\sin x$$

$$y' + xe^x y = 9xe^x \qquad y' + \frac{y}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}.$$

Quelques cas particuliers On va énoncer quelques propriétés utiles pour trouver une solution particulière sans utiliser la méthode de variation de la constante.

Proposition. On considère l'équation $y' + a(x)y = b(x) + c(x)$. Alors, si on connaît une solution f de $y' + a(x)y = b(x)$ et une solution g de $y' + a(x)y = c(x)$, $f + g$ est une solution de $y' + a(x)y = b(x) + c(x)$.

Exemple. Déterminons les solutions de $y' + 2xy = 4x^2 + 2 + x$. On a déjà vu que la solution générale de l'équation homogène associée était

$$x \mapsto \lambda e^{-x^2}$$

et qu'une solution particulière de $y' + 2xy = x$ était $\frac{1}{2}$. Une méthode de variation de la constante (ou un peu d'intuition !) donne une solution particulière de $y' + 2xy = 4x^2 + 2$: $x \mapsto 2x$. Alors, la solution de l'équation complète est :

$$x \mapsto \lambda e^{-x^2} + \frac{1}{2} + 2x.$$

Proposition. Soit une équation différentielle de la forme

$$y' + ay = P(x)e^{\lambda}x \tag{6}$$

avec $a, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors, une solution particulière de (6) peut être cherchée sous la forme

$$x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$$

avec Q, un polynôme qui vérifie

- $\deg Q = \deg P$ si $-\lambda \neq a$,
- $\deg Q = \deg P + 1$ si $-\lambda = a$.

Exemple. Une solution particulière de $y' + 2y = xe^x$ peut être cherchée sous la forme $g(x) = (\alpha x + \beta)e^x$ car $-\lambda = -1 \neq 2 = a$. Calculons alors $g'(x) + 2g(x) = (\alpha + \alpha x + \beta)e^x + 2(\alpha x + \beta)e^x = e^x(3\alpha x + \alpha + 3\beta)$. Il suffit donc de choisir $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = -\frac{1}{9}$ pour obtenir une solution particulière.

Exercice 13. *En utilisant les deux propriétés précédentes, résoudre les équations suivantes.*

$$y' + 5y = e^x + 5x + 4 \qquad y' - y = 5x^2e^{4x} - 4e^x$$
$$y' - 2y = x^2 - e^x \qquad y' + 2y = 2xe^{-2x}.$$

Exercice 14. *Résoudre (en utilisant une des méthodes présentées plus haut), les équations différentielles suivantes (sur un intervalle à préciser, et qu'on pourra, dans un second temps, chercher à rendre maximal).*

$$y' + y = \frac{1}{1+e^x} \qquad y' - 2y = \sinh x - 2x\cosh x$$
$$y' + y\cos x = -2\cos x \qquad y' - \frac{\cosh x}{\sinh x}y = -\frac{1}{\sinh x}$$
$$y' - y\tan x = -\cos^2 x \qquad y' - \frac{x}{x^2-1}y = 1$$

Remarque. Dans les problèmes concrets, on souhaite souvent des solutions qui vérifient des conditions initiales (par exemple $y(0) = 1$.) Cela permet de réduire l'espace des solutions.

Par exemple, on peut chercher à résoudre l'équation $y' + 2y = xe^x$ avec condition intiale $y(0) = 1$. On a vu que la solution générale de cette équation est $x \mapsto Ae^{-2x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)e^x$. La condition initiale s'écrit

$$1 = Ae^{-2\cdot 0} + \left(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{9}\right)e^0 = A - \frac{1}{9},$$

ce qui impose $A = \frac{10}{9}$.

Exercice 15. *Résoudre une seconde fois les équations de l'exercice précédent en ajoutant la condition initiale $y(0) = 8$.*

2.3 Ordre 2 à coefficients constants

On s'intéresse dans ce paragraphe aux équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, c'est-à-dire aux équations de la forme

$$y'' + ay' + by = c(x), \tag{7}$$

où a et b sont des éléments de $\mathbb{R}$ et c une fonction continue (éventuellement complexe) d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour résoudre (7), on utilise le même schéma qu'à la partie précédente.

Solution générale de l'équation homogène L'équation homogène s'écrit

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{8}$$

On introduit alors l'*équation caractéristique* de (8)[2]

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{9}$$

Cette équation est du second degré en λ, à coefficients réels. Il y a alors trois cas à distinguer.

- Soit (9) possède deux racines réelles disctinctes (discriminant strictement positif) λ_1 et λ_2. Alors, les solutions de (8) sont de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$ avec A et B réels.
- Soit (9) possède une unique racine réelle (double, discriminant nul) λ. Alors, les solutions de (8) sont de la forme $x \mapsto (A + Bx)e^{\lambda x}$ pour A et B deux réels.
- Soit (9) ne possède pas de racine réelle, et elle possède alors deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec α, β réels. Alors, les solutions de (8) sont de la forme $x \mapsto Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\sin\beta x$ pour A et B deux réels.

Exemple. Résolvons l'équation $y'' + 2y' + 5 = 0$. On introduit l'équation caractéristique $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Pour résoudre cette équation, on en calcule le discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 5 \times 1 = -16 < 0$. Ainsi, l'équation caractéristique a deux racines complexes non réelles $-1 + 2i$ et $-1 - 2i$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\left\{x \mapsto Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\sin 2x, \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 16. *Résoudre les équations homogènes suivantes.*

$$\begin{aligned} &y'' + y = 0 & y'' - 2y' - 5y = 0 \\ &y'' + 3y' + 9y = 0 & y'' - 5y' = 0 \\ &4y'' + y' - 5y = 0 & y'' + 6y' + 5y = 0 \end{aligned}$$

Recherche d'une solution particulière Pour trouver une solution particulière, comme à l'ordre 1, on peut utiliser une méthode de variation de la constante. Néanmoins, cette méthode est un peu plus compliquée à mettre en œuvre donc on va d'abord voir quelques cas particuliers utiles.

Proposition. Soit une équation de la forme

$$y'' + ay' + by = P(x)e^{\alpha x} \tag{10}$$

avec α un réel quelconque et $P(x) = \sum_{i=1}^{k} a_k x^k$ une fonction polynôme. Alors, il existe une solution de (10) de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$ où Q est un polynôme tel que $\deg Q = \deg P$ si α n'est pas une racine de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, $\deg Q = \deg P + 1$ si α est une racine *simple* de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ et $\deg Q = \deg P + 2$ si α est une racine double de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

[2] On peut se demander pourquoi. Voici une explication.
Par analogie avec ce qui a été fait au premier ordre, il peut être légitime de chercher des solutions sous la forme $x \mapsto e^{\lambda x}$. Or, une telle fonction est solution de (8) équivaut à (il suffit de calculer) : $(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$, et ce pour tout x dans I, ce qui équivaut à $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Exemple. Résolvons l'équation $y'' + 2y' + 5y = (2x+1)e^x$. On a déjà vu que la solution générale de l'équation homogène est de la forme $x \mapsto Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\sin 2x$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. En outre, le facteur de x dans l'exponentielle est 1 qui n'est pas une racine de l'équation $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ donc on peut chercher une solution de l'équation complète sous la forme $Q(x)e^x$ avec $\deg Q = 1$, c'est-à-dire de la forme
$$g(x) = (Cx + D)e^x.$$
Calculons donc $g'(x) = (C + Cx + D)e^x$, $g''(x) = (C + C + Cx + D)e^x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}&g''(x) + 2g'(x) + 5g(x)\\ &= (2C + D + Cx + 2C + 2D + 2Cx + 5Cx + 5D)e^x = ((8C)x + 4C + 8D)e^x.\end{aligned}$$

On doit donc trouver C et D tel que $8C = 2$ et $4C + 8D = 1$, ce qui donne $C = \frac{1}{4}$ et $D = 0$. Une solution particulière de l'équation est donc $x \mapsto \frac{1}{4}xe^x$ et la solution générale de l'équation est

$$x \mapsto Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\sin 2x + \frac{1}{4}xe^x.$$

Exercice 17. *Résoudre les équations suivantes.*

$$\begin{aligned}
&y'' - 2y' + y = xe^x && y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = (5x+1)e^{4x}\\
&y'' + 3y' + y = e^{\sqrt{5}x} && y'' + 4y' - 21y = (x+1)e^{3x}\\
&y'' + y' - 5y = (x^2 - 1)e^{-4x} && y'' - 6y' + 10y = (5x-2)e^{-x}.
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser le principe de superposition, vu à l'ordre 1, qui est toujours valable ici.

Proposition. On considère l'équation $y'' + ay + b = c(x) + d(x)$. Si l'on connaît une solution f de $y'' + ay + b = c(x)$ et une solution g de $y'' + ay + b = d(x)$, alors la fonction $f + g$ est solution de $y'' + ay + b = c(x) + d(x)$.

Exemple. Résoudre l'équation $y'' + 2y' + 5y = (2x+1)e^x - e^{-2x}$. On connaît la solution générale de l'équation homogène et une solution de $y'' + 2y' + 5y = (2x+1)e^x$. Il suffit donc de trouver une solution particulière de $y'' + 2y' + 5y = -e^{-2x}$.

La proposition 2.3 nous invite à en chercher une sous la forme $g(x) = Ce^{-2x}$ (-2 n'est pas solution de l'équation caractéristique). La dérivation conduit à $C(4 - 4 + 5)e^{-2x} = -e^{-2x}$ soit $C = -\frac{1}{5}$. La solution générale est donc

$$x \mapsto Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\sin 2x + \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{5}e^{-2x}$$

avec A et B réels.

Exercice 18.

$$\begin{aligned}
&y'' - 2y' + y = xe^x - 5x^2e^{-x} && y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = (5x+1)e^{4x} - e^x\\
&y'' + 3y' + y = e^{\sqrt{5}x} + x && y'' + 4y' - 21y = (x+1)e^{3x} - 4\\
&y'' + 2y' + 5y = (x^2 - 1)e^{-4x} + xe^{3x} && y'' - 6y' + 10y = (5x-2)e^{-x} - 2\\
&y'' + 2y' + 2y = x^2 + x + 1 && y'' + y' - 2y = xe^{-2x}.
\end{aligned}$$

***Remarque concernant les solutions complexes.** Dans cette partie, nous n'avons manipulé que des fonctions réelles. Il est néanmoins possible, pour le second membre $c(x)$, de considérer une fonction $c : I \to \mathbb{C}$ et donc des solutions de l'équation elles aussi à valeurs complexes (les coefficients restent eux réels). Voyons les modifications que cela entraîne.

On résout l'équation homogène de la même façon en introduisant l'équation caractéristique $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Néanmoins, on résout cette équation dans $\mathbb{C}$ et le troisième cas conduit à des solutions de même forme que le premier. Plus précisément, si l'équation caractéristique a deux racines complexes non réelles conjuguées $\alpha+i\beta$ et $\alpha-i\beta$, la solution générale *complexe* de l'équation homogène est

$$x \mapsto Ae^{\alpha x+i\beta x} + Be^{\alpha x-i\beta x}.$$

Pour un second membre de la forme $c(x) = P(x)e^{\gamma x+i\delta x}$, on peut appliquer encore la proposition 2.3 : une solution particulière est de la forme $Q(x)e^{\gamma x+i\delta x}$ avec $\deg Q = \deg P$ si $\gamma i\delta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, $\deg Q = \deg P+1$ si c'est une racine simple, $\deg Q = \deg P+2$ si c'est une racine double.

Chose fort utile, le principe de superposition (Proposition 2.3) permet alors de traiter des second membre $P(x)\cos(\alpha x)$ en remarquant que $\cos(\alpha x) = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}\right)$.

Exercice 19. *Résoudre les équations*

$$y'' - 2y' + y = \sin x y'' + y = \cos x$$
$$y'' + 6y' + 9y = xe^{-3x} + \sin x . y'' + 4y = \sin 2x.$$

***Méthode de variation de la constante à l'ordre 2.** Pour alléger l'exposé, on va traiter en détail un exemple.

On considère l'équation, définie sur

$$y'' + 6y' + 5y = f \tag{11}$$

Les solutions de l'équations homogène sont $x \mapsto Ae^{-5x} + Be^{-x}$.

Pour appliquer la méthode de variation de la constante, on écrit d'abord le système matriciellement. On introduit $Y = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$ (on a alors $Y' = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ -6y' - 5y - f \end{bmatrix}$) et on remarque que l'équation s'écrit

$$\begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}}_{:=M} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}}_{:=N}.$$

On a donc récrit l'équation (11) sous la forme d'une équation d'ordre 1 mais en dimension 2. Les solutions de l'équation homogène

$$Y' - MY = 0$$

sont de la forme $x \mapsto A\Gamma(x) + B\Lambda(x)$ avec

$$\Gamma(x) = \begin{bmatrix} e^{-5x} \\ -5e^{-5x} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda(x) = \begin{bmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{bmatrix}.$$

Comme à l'ordre 1, on fait une variation de la constante en cherchant une solution particulière de $Y' - MY = N$ sous la forme

$$G(x) = x \mapsto A(x)\Gamma(x) + B(x)\Lambda(x)$$

On calcule donc

$$G'(x) = A'(x)\Gamma(x) + A(x)\Gamma'(x) + B'(x)\Lambda(x) + B(x)\Lambda'(x).$$

Alors,

$$\begin{aligned} G'(x) - MG(x) &= A'(x)\Gamma(x) + B'(x)\Lambda(x) + A(x)\underbrace{(\Gamma'(x) - M\Gamma(x))}_{=0} + B(x)\underbrace{(\Lambda'(x) - M\Lambda(x))}_{=0} \\ &= A'(x)\begin{bmatrix} e^{-5x} \\ -5e^{-5x} \end{bmatrix} + B'(x)\begin{bmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour obtenir une solution de cette forme, il faut choisir A et B telles que

$$\begin{bmatrix} A'(x)e^{-5x} \\ -5A'(x)e^{-5x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B'(x)e^{-x} \\ -B'(x)e^{-x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire que $A'(x)$ et $B'(x)$ sont solutions d'un système linéaire à deux équations

$$\begin{cases} A'(x)e^{-5x} + B'(x)e^{-x} = 0 \\ -5A'(x)e^{-5x} - B'(x)e^{-x} = f(x) \end{cases}$$

ce qui conduit à $A'(x) = -\frac{1}{4}e^{5x}f(x)$ et $B'(x) = \frac{f(x)}{4}e^{x}$. Trouver une solution de (11) revient donc à un calcul de primitive (on ne saura donc le faire explicitement que pour des fonctions f particulières : polynômes, tanh, ...).

Exercice 20. *Résoudre en utilisant la méthode de variation de la constante, sur un intervalle qu'on précisera, l'équation $y'' + y = \tan x$.*

2.4 Étude d'un système linéaire.

Dans cette partie, on va voir sur un exemple simple comment, grâce à l'algèbre linéaire, on peut résoudre explicitement de petits systèmes (2×2 ou 3×3) linéaires à coefficients constants.

On considère un matériau anisotrope tridimensionnel dans lequel on suit le déplacement d'une particule de masse $m = 1$ kg lancée en 0 à la vitesse $\overrightarrow{v}^0 = (v_x^0, v_y^0, v_z^0)$. La particule est gênée dans son déplacement par le matériau : elle subit une force $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$ qui dépend de $\overrightarrow{v}$ (vitesse à l'instant t) de la façon suivante :

$$\begin{cases} F_x = 13v_x - 6v_y - 20v_z \\ F_y = 100v_x - 33v_y - 95v_z \\ F_z = 11v_x - 3v_y - 19v_z \end{cases}.$$

On se propose de déterminer la trajectoire de la particule. Pour cela, on commence par appliquer la seconde loi de Newton pour obtenir

$$\begin{cases} \dot{v_x} = 13v_x - 6v_y - 20v_z \\ \dot{v_y} = 100v_x - 33v_y - 95v_z \\ \dot{v_z} = 11v_x - 3v_y - 19v_z \end{cases}.$$

Ce système peut être récrit matriciellement en posant $X = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$:

$$\dot{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & -6 & -20 \\ 100 & -33 & -95 \\ 11 & -3 & -19 \end{bmatrix}}_{:=A} X.$$

Pour résoudre ce système, on va diagonaliser A (faites-le, c'est un bon exercice !). On obtient $A = PDP^{-1}$ avec

$$P := \begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{5}{4} \\ 7 & 5 & \frac{5}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} := \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -15 & 3 & 15 \\ 23 & -3 & -25 \\ -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient donc

$$\dot{Y} = DY = \begin{bmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} Y,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -18y_1 \\ \dot{y}_2 = -12y_2 \\ \dot{y}_3 = -9y_3 \end{cases}$$

qui est devenu un système totalement découplé (les lignes peuvent se résoudre indépendamment les unes des autres). En résolvant ligne par ligne, on obtient donc

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0)e^{-18t} \\ y_2(t) = y_2(0)e^{-12t} \\ y_3(t) = y_3(0)e^{-9t} \end{cases}.$$

Reste finalement à revenir dans les coordonnées initiales. On a

$$Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{bmatrix} -15v_x^0 + 3v_y^0 + 15v_z^0 \\ 23v_x^0(0) - 3v_y^0(0) - 25v_z^0 \\ -8v_x^0 + 16v_z^0 \end{bmatrix}$$

et $X = PY$ donc

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-15v_x^0 + 3v_y^0 + 15v_z^0)e^{-18t} + 2(23v_x^0 - 3v_y^0 - 25v_z^0)e^{-12t} + \frac{5}{4}(-8v_x^0 + 16v_z^0)e^{-9t} \\ 7(-15v_x^0 + 3v_y^0 + 15v_z^0)e^{-18t} + 5(23v_x^0 - 3v_y^0 - 25v_z^0)e^{-12t} + \frac{5}{4}(-8v_x^0 + 16v_z^0)e^{-9t} \\ (-15v_x^0 + 3v_y + 15v_z^0)e^{-18t} + (23v_x^0 - 3v_y^0 - 25v_z^0)e^{-12t} + (-8v_x^0 + 16v_z^0)e^{-9t} \end{bmatrix}.$$

On peut ensuite obtenir la trajectoire en intégrant.

Remarque. Physiquement, la base de diagonalisation correspond aux directions où le matériau ne dévie pas la particule.

3 Corrigés des exercices.

Exercice 1. On utilise donc la définition. Soit $\varepsilon > 0$. On veut trouver $\eta > 0$ tel que $|x-1| < \eta \Rightarrow |\sqrt{x}-1| < \varepsilon$.
Remarquons alors que $|\sqrt{x}-1| = \frac{|x-1|}{|\sqrt{x}+1|} \leqslant |x-1|$. Ainsi, choisir $\eta = \varepsilon$ convient.

Pour $\frac{1}{x^2}$, la limite demandée est $+\infty$. On se donne donc $A > 0$ et on cherche $\eta > 0$ tel que $|x-0| < \eta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > A$. Remarquons donc que

$$\frac{1}{x^2} > A \Rightarrow x^2 < \frac{1}{A} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Ainsi, $\eta = \frac{1}{\sqrt{A}}$ convient, et on a montré la limite demandée.

Exercice 2. Déjà, f est définie sur $\mathbb{R}^+$. Elle est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit de fonctions continues connues. De plus, les croissances comparées donnent

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0 = f(0)$$

donc f est bien continue en zéro. Finalement, f est continue sur tout $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3. Pour utiliser la définition, on introduit donc la fonction

$$\varphi(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} = \frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} = -\frac{1}{2x}.$$

Cette fonction a bien une limite en 2, qui vaut $-1/4$. C'est ce qui est attendu.

Pour montrer que $|\cdot|$ n'est pas dérivable en zéro, on introduit également

$$\phi(x) = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x}.$$

Cette fonction n'a pas de limite en zéro (elle vaut -1 si $x < 0$ et 1 si $x > 0$). Cela signifie exactement que la valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Exercice 4. Comme x^5 ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$, on peut calculer

$$\frac{x^4 + x^2}{x^5} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui est exactement dire que $x^4 + x^2 = \underset{x \to +\infty}{o}(x^5)$.

De même, comme $\sqrt{n}$ ne s'annule pas, on peut calculer

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Remarque. On peut aussi se passer du quotient en s'intéressant directement à

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = o(\sqrt{n}).$$

Exercice 5. Il suffit tout simplement de remarquer que $5x^3\sqrt{x} = \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. Ainsi, $f(x) = 2 + x^2 - 5x^3\sqrt{x} = 2 + x^2 + o(x^3)$, ce qui est exactement dire que f admet un développement limité d'ordre 3 en zéro.

Exercice 6.

–
$$\begin{aligned}\frac{1}{2+x} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{x}{2}\right)^4\right)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{32} + \underset{x\to 0}{o}(x^4).\end{aligned}$$

– Pour le second DL, comme on nous le demande au voisinage de 1, on va poser $y + 1 = x$. Alors
$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} &= \frac{1}{y+2} = \frac{1}{2} - \frac{y}{4} + \frac{y^2}{8} - \frac{y^3}{16} + \frac{y^4}{32} + \underset{x\to 0}{o}(y^4)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{x-1}{4} + \frac{(x-1)^2}{8} - \frac{(x-1)^3}{16} + \frac{(x-1)^4}{32} + \underset{x\to 0}{o}((x-1)^4).\end{aligned}$$

– On pose $x = y + 4$. Alors,
$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= \sqrt{4+y} = \sqrt{4}\sqrt{1+\frac{y}{4}}\\ &= \sqrt{4}\left(1 - \frac{y/4}{2} - \frac{1}{8}\left(\frac{y}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{y}{4}\right)^3 - \frac{5}{128}\left(\frac{y}{4}\right)^4 + \frac{7}{256}\left(\frac{y}{4}\right)^5 + \underset{y\to 0}{o}\left(\frac{y}{4}\right)^5\right)\\ &= 1 + 1/4x - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{5}{16384}(x-4)^4 + \frac{7}{131072}(x-4)^5 + \underset{x\to 4}{o}(x-4)^5.\end{aligned}$$

– On pose $x = y + \frac{\pi}{3}$. Alors,
$$\begin{aligned}\sin x &= \sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right) = \sin y \cos\frac{\pi}{3} + \cos y \sin\frac{\pi}{3}\\ &= \frac{1}{2}\left(y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} - \frac{y^7}{7!}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!}\right) + o(y^7).\end{aligned}$$

On obtient finalement
$$\begin{aligned}\sin x = &\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\\ &+ \frac{\sqrt{3}}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + \frac{1}{240}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 - \frac{\sqrt{3}}{1440}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^6\\ &- \frac{1}{10080}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^7 + \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{o}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^7\end{aligned}$$

– Ce développement est beaucoup plus facile. Il suffit de diviser par x le DL de sinus en zéro pour obtenir
$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6).$$

Exercice 7. Comme cet exercice ne demande aucune astuce mais seulement une agilité de calcul, on ne donnera que les résultats.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\\
g(x) &= 1 + 3/2x + \frac{11}{8}x^2 + \frac{23}{16}x^3 + o(x^3)\\
h(x) &= x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)\\
u(x) &= 5 + 5x + 7x^2 + \frac{20}{3}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Exercice 8.

– Pour $x \mapsto \tan(3x)$, il suffit de remplacer x par $3x$ dans le DL de tangente. On obtient
$$\tan(3x) = 3x + 9x^3 + \frac{162}{5}x^5 + o(x^5).$$

– On a affaire à la composée de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ avec $y \mapsto \sqrt{y}$. On va donc composer les développements limités de ces deux fonctions. Ils s'écrivent
$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3)$$
et
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3).$$
La composition donne alors
$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{1-x}} &= 1 + \frac{1+x+x^2+x^3}{2} - \frac{(1+x+x^2+x^3)^2}{8} + \frac{(1+x+x^2+x^3)^3}{16} + o(x^3)\\
&= 1 + \frac{1+x+x^2+x^3}{2} - \frac{1+x^2+2x+2x^2+2x^3+2x^3}{8} + \frac{(1+x^3+3x+3x^2+3x^2+3x^3)}{16} +\\
&= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

– Dans cet exemple, il faut remarquer que $\cos x$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Aussi, pour faire apparaître la forme $\frac{1}{1-x}$ on va écrire
$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-(1-\cos x)}.$$
Il suffit alors de chercher le DL_0 de
$$1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
Et de le composer avec
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

pour obtenir

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^4 + o(x^4) \tag{12}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4). \tag{13}$$

- **Attention ici**, on nous demande un DL en 2. On écrit alors $x = y + 2$ et donc

$$\sqrt{\ln(x)} = \sqrt{\ln(2+y)}$$

et on a finalement à chercher un DL en zéro. Pour se ramener à une forme connue on écrit

$$\sqrt{\ln(y+2)} = \sqrt{\ln(2) + \ln\left(1 + \frac{y}{2}\right)} = \sqrt{\ln(2)}\sqrt{1 + \frac{1}{\ln 2}\ln\left(1 + \frac{y}{2}\right)}.$$

On peut alors utiliser le développement connu de $\ln(1 = x)$ en zéro :

$$\frac{1}{\ln 2}\ln\left(1 + \frac{y}{2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2\right) + o(y^2)$$

et le composer par celui de $\sqrt{1+x}$. On obtient

$$\sqrt{\ln(x)} = \sqrt{\ln(2)}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2\right)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2\right)\right)^2\right) + \underset{y\to 0}{o}(y^2)$$

$$= \sqrt{\ln 2} + \frac{x-2}{4\sqrt{\ln 2}} - (x-2)^2\left(\frac{1}{16\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{32(\ln 2)^{3/2}}\right) + \underset{x\to 2}{o}(x-2)^2.$$

- Attention, $\cos x$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Pour se ramener à une forme $\ln(1+y)$ avec $y \to 0$, on doit écrire

$$\ln(1 + \cos x) = \ln(2 + (\cos x - 1)) = \ln 2 + \ln(1 + 1/2(\cos x - 1)).$$

On compose donc le DL de

$$\frac{1}{2}(\cos x - 1) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)$$

avec celui de $y \mapsto \ln(1+y)$ pour obtenir (les calculs sont similaires aux précédents)

$$\ln(1 + \cos x) = \ln 2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4).$$

- Ce DL est très facile à obtenir :

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + o(x^5)$$

- **Attention ici**, la puissance n'est pas constante. Pour étudier cette fonction, il est donc absolument nécessaire de l'écrire sous forme exponentielle :

$$(1+\sin x)^{\cos x} = \exp(\cos x \ln(1+\sin x)).$$

Pour trouver le $DL_4(0)$ de $\cos x \ln(1+\sin x)$, il faut d'abord connaître celui de $\ln(1+\sin x)$. Il s'agit d'une composition simple. On obtient

$$\ln(1+\sin x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

On peut alors multiplier avec le DL de cosinus pour obtenir

$$\begin{aligned}\cos x \ln(1+\sin x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) - 1 \\ &= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + o(x^4).\end{aligned}$$

Pour finir, on compose ce DL par celui de l'exponentielle et on trouve

$$(1+\sin x)^{\cos x} = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Ouf !

Exercice 9. On va traiter les limites dans l'ordre.

- Remarquons que (on fait un $DL_4(0)$) $\sin^2(x) = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$. Ainsi,

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin x^2 - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \frac{-x^4}{3x^2 \sin^2 x} \to -\frac{1}{3}$$

car $\sin x \sim x$ au voisinage de zéro.
- Remarquons que $e^x - e^{-x} = -2x + o(x) \sim x$ au voisinage de zéro, et $\sin x \sim x$. Ainsi, la limite est -2.
- On cherche donc à calculer (on introduit $y = x - 1$)

$$\frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{x-1} = \frac{e^x(e^{x^2} - e^x)}{x-1} = e^{y+1}\frac{e^{y^2+2y+1} - e^{y+1}}{y} = e^{y+2}\frac{e^{y^2+2y} - e^y}{y}.$$

On écrit

$$e^{y^2+2y} - e^y = (1 + 2y + o(y)) - (1 + y + o(y) = y + o(y)$$

et la limite vaut e^2.

Exercice 10.

- Cette limite est classique, il est bon de savoir l'étudier. Comme la puissance est variable, on écrit la quantité sous forme exponentielle

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$$

Ensuite, comme x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0 et

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\frac{1}{x^2}$$

Ainsi, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 + \underset{x\to+\infty}{o}(1)$ et la limite vaut e.

– Ici, il faut penser à écrire

$$x\ln(x+1) - x\ln x = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

et on conclut comme précédemment.

– On écrit tout forme exponentielle et... on développe (si vous n'êtes pas à l'aise avec la manipulation des développements asymptotiques, vous pouvez poser $X = \frac{1}{x}$ et écrire tous les développements au voisinage de zéro) !

$$\begin{aligned}
x\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^x - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\right] &= x\left[\exp\left(x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right) - \exp\left(2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right] \\
&= x\left[\exp\left(x\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) - \exp\left(2x\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] \\
&= x\left[\exp\left(2 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \exp\left(2 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] \\
&= e^2 x\left[1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] \\
&= -e^2 + o(1)
\end{aligned}$$

ce qui est exactement dire que la limite cherchée vaut $-e^2$.

Exercice 11. On va donner les solutions dans l'ordre (de gauche à droite et de haut en bas).

– La solution générale est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
– La solution générale est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \lambda e^{-5/2x^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
– La solution générale est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \lambda e^{e^x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
– La solution générale est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \lambda e^{-e^{x^2}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
– La solution générale est définie sur $\mathbb{R}^+$ (car la fonction racine carrée n'est définie que sur cet ensemble) par $x \mapsto \lambda e^{\frac{2}{3}x^{3/2}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
– La solution générale est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^4}{2}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (on calcule la primitive de $x\ln x$ en intégrant par partie).

Exercice 12. Comme la méthode est exactement identique à celle de l'exemple, on va donner uniquement les solutions (dans l'ordre). Le coefficient λ sera un réel quelconque.

– $x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{5x}{2} + \frac{5}{2}\frac{\operatorname{argsh}(x)}{\sqrt{1+x^2}}$
– $x \mapsto \frac{\lambda}{\sin x} + \frac{4x-2\sin(2x)}{\sin x}$.
– $x \mapsto 9 + \lambda\exp(e^x(1-x))$.
– $x \mapsto 2 + \lambda\exp(\arctan(x))$.

Exercice 13. On applique exactement la proposition comme dans l'exemple et on obtient (dans l'ordre)

$$\lambda e^{-5x} + \frac{1}{6}e^x + x + \frac{3}{5} \qquad y = \frac{5x^2e^{4\,x}}{3} - \frac{10\,x\,e^{4\,x}}{9} + \frac{10\,e^{4\,x}}{27} - 4\,x\,e^x + \lambda e^x$$

$$\lambda e^{2x} + e^x - \frac{2x^2-2x-1}{4} \qquad \lambda e^{-2x} + x^2e^{-2x}.$$

Exercice 14.

– Cette première équation s'intègre en utilisant une méthode de variation de la constante. On finit par trouver $y(x) = \lambda e^{-x} + \ln(1+e^x)e^{-x}$. Cette solution est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

– Ici, on peut écrire $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ et $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et ainsi avoir un second membre en somme de termes de la forme $x \mapsto P(x)e^{\lambda x}$. On trouve une solution particulière pour chaque terme de la somme et on somme ces solutions. Finalement, la solution générale est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = \lambda e^{2x} + \frac{1}{2e^x} + \frac{5}{18}e^{-x} + xe^x + \frac{1}{3}xe^{-x}.$$

– On utilise la méthode de variation de la constante pour trouver la solution générale définie sur $\mathbb{R}$

$$y(x) = 2 + \lambda e^{\sin x}.$$

– Attention ici : l'équation n'est définie que sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. On utilise la méthode de variation de la constante pour trouver la solution générale définie sur chacun de ces deux intervalles.

$$y(x) = \cosh(x) + \lambda\sinh(x).$$

Bien que cette fonction puisse être définie sur $\mathbb{R}$, il est incorrect de dire qu'elle est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (qui n'est pas définie en zéro).

– On utilise encore la méthode de variation de la constante et on obtient (la solution n'est ici définie que sur tout intervalle de la forme $]k-\pi/2, k+\pi/2[$) :

$$y(x) = \frac{\lambda}{\cos x} - \frac{3}{4}\tan x - \frac{\sin(3x)}{12\cos x}.$$

– Ici, c'est un peu plus compliqué : l'équation n'a un sens que sur les intervalles suivants : $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$. La solution de l'équation homogène est $y(x) = e^{\frac{1}{2}\ln\frac{1}{|x^2-1|}} = \sqrt{|x^2-1|}$ qui est définie sur chacun de ces intervalles. On cherche la solution générale grâce à la méthode de variation de la constante, mais sur chacun des intervalles.
Sur $]-\infty, 1[$, on cherche donc une solution sous la forme $y(x) = \lambda(x)\sqrt{x^2-1}$.
Ceci donne $\lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ soit $\lambda(x) = \operatorname{argcosh}(-x)$.
Si $x \in]-1, 1[$, on obtient $\lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ce qui donne $\lambda(x) = \arcsin(x)$.
Si $x \in]1, +\infty[$, on obtient $\lambda'(x) = \operatorname{argcosh}(x)$.

Remarque. On voit très bien dans ce dernier exemple que l'intervalle de résolution est important quand on résout une équation différentielle.

Exercice 15. Il s'agit à chaque fois de trouver la valeur de λ qui permet de satisfaire la condition initiale. Voici les résultats (attention à la dernière équation où il faut évidemment considérer la solution valide sur $]-1,1[$)

$$\lambda = 8 - \ln 2 \qquad \lambda = \frac{65}{9}$$
$$\lambda = 6 \qquad \text{impossible}$$
$$\lambda = 8 \qquad \lambda = 8$$

Exercice 16. Encore une fois, la méthode est exactement celle de l'exemple donc on donnera uniquement les résultats (les réels A et B décrivent $\mathbb{R}$).

$$A\cos x + B\sin x \qquad Ae^{(1+\sqrt{6})x} + Be^{-(1+\sqrt{6})x}$$
$$Ae^{-\frac{3}{2}x}\cos\left(3^{\frac{3}{2}}\frac{x}{2}\right) + Be^{-\frac{3}{2}x}\sin\left(3^{\frac{3}{2}}\frac{x}{2}\right) \qquad A + Be^{5x}$$
$$Ae^{x} + Be^{-\frac{5}{4}x} \qquad Ae^{-5x} + Be^{-x}$$

Exercice 17.

$$Ae^x + Bxe^x + \frac{1}{6}x^3e^x \qquad Ae^{-\frac{5}{2}x} + Be^{\frac{1}{2}x} + \frac{4}{8281}(-109+455x)e^{4x}$$
$$Ae^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-3)x} + Be^{-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)x} + \frac{1}{3}(-2+\sqrt{5})e^{\sqrt{5}x} \qquad Ae^{3x} + Be^{-7x} + \frac{1}{100}x(9+5x)e^{3x}$$
$$Ae^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{21})x} + Be^{-\frac{1}{2}(-1+\sqrt{21})x} + \frac{1}{49}(5+14x+7x^2)e^{-4x} \qquad Ae^{3x}\sin x + Be^{3x}\cos x + \frac{1}{289}(6+85x)e^{-x}.$$

Exercice 18.

$$y(x) = Ae^x + bxe^x + \frac{1}{24}(4x^3e^x - 30x^2e^{-x} - 60xe^{-x} - 45e^{-x})$$
$$y(x) = Ae^{-\frac{5}{2}x} + Be^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{8281}(-436+1820x)e^{4x} - \frac{4}{7}e^x$$
$$y(x) = Ae^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-3)x} + Be^{-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)x} + \frac{\left(-\sqrt{5}+3\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}x} + 3\,\left(\sqrt{5}+1\right)(x-3)}{3\sqrt{5}+3}$$
$$y(x) = Ae^{3x} + Be^{-7x} + \frac{4}{21} + \frac{1}{21000}(1050x^2 + 1890x - 189)e^{3x}$$
$$y(x) = Ae^{-x}\sin(2x) + Be^{-x}\cos(2x) + \frac{1}{219700}(-12300 + 15600x + 16900x^2 + 10985xe^{7x} - 4394e^{7x})e^{-4x}$$
$$y(x) = Ae^{3x}\sin x + Be^{3x}\cos x - \frac{1}{1445}(-425x - 30 + 289e^x)e^{-x}$$
$$y(x) = Ae^{-x}\sin x + Be^{-x}\cos x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$$
$$y(x) = Ae^x + Be^{-2x} - \frac{1}{18}x(2+3x)e^{-2x}$$

Exercice 19. Il suffit pour chaque équation de décomposer la fonction trigonométrique en exponentielles. On obtient alors

$$Ae^x + Bxe^x + \frac{1}{2}\cos x \qquad A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$$

$$Ae^{-3x} + Bxe^{-3x} + \frac{1}{6}x^3e^{-3x} - \frac{3}{50}\cos x + \frac{2}{25}\sin x \qquad A\sin(2x) + B\cos(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x)$$

Exercice 20. On peut résoudre sur tout intervalle de la forme $]k-\pi/2, k+\pi/2[$. On va le faire sur $]-\pi/2, \pi/2[$. On écrit $Y = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$ et le système différentiel d'ordre 1 vérifié par Y. On lui applique la méthode comme dans l'exemple et on obtient

$$y(x) = A\cos x + B\sin x - \cos x \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right).$$