Suites et séries réelles

Une *suite numérique* est une famille de nombres réels ou complexes indicées par les entiers naturels. On note une suite u indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$, ou simplement (u_n). L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour les suites réelles).

Une suite réelle est *majorée* par un réel A si $u_n \leqslant A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une suite réelle est *minorée* par A si $u_n \geqslant A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une suite numérique est *bornée* par A si $|u_n| \geqslant A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une suite réelle est *croissante* si $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et *décroissante* si $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n. Une suite réelle est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Les démonstrations incluses dans ces notes sont des exemples typiques. Il est important de bien les comprendre car leur structure apparait souvent.

1 Convergence des suites

Definition 1 (Convergence)**.** Une suite numérique (u_n) *converge* vers un complexe a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, la distance de u_n à a est inférieure à ε, autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - a| \leqslant \varepsilon.$$

Le complexe a est *limite* de la suite (u_n). On note $u_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, et on dit que u_n tend vers a.

Proposition 2 (Unicité de la limite)**.** *Si une suite (u_n) converge vers a et vers a', alors $a = a'$.*

L'unique limite d'une suite convergente (u_n) est notée $\lim_{n\to\infty} u_n$, ou $\lim u_n$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des entiers N et N' tels que $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$ et $|u_n - a'| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N'$. Soit M le plus grand de N et N'. Pour tout $n \geqslant M$ les réels $|u_n - a|$ et $|u_n - a'|$ sont inférieurs à ε. Par l'inégalité triangulaire

$$|a - a'| \leqslant |a - u_n| + |u_n - a'| \leqslant 2\varepsilon.$$

Comme c'est vrai pour tout ε strictement positif, ceci implique que $|a - a'| = 0$, c'est-à-dire que $a = a'$. ☐

Montrer qu'une suite converge est un problème fréquent, parfois difficile. De nombreux critères existent, généraux ou spécialisés, simples ou difficiles. L'un des critères les plus fondamentaux, issu de la construction des réels est le suivant, exprimé ici de quatre manières équivalentes :

Proposition 3 (Convergence monotone)**.** *(i) Toute une suite réelle croissante et majorée converge ; (ii) toute une suite décroissante et minorée converge ; (iii) toute une suite monotone et bornée converge ; (iv) toute suite positive et décroissante converge.*

D'autres critères se désuisent facilement des définitions :

Proposition 4 (Lemme des trois suites)**.** *Soient trois suites réelles (a_n), (b_n) et (u_n). Si*

(i) (a_n) et (b_n) convergent vers un même réel ℓ,

(ii) et $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ pour tout n,

alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 1 (Moyenne arithmetico-géométrique)*.* Soient u_0 et v_0 des réels positifs tels que $v_0 \leqslant u_0$. Définissons par récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.

1. Montrer que pour tout n

$$0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

2. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune.

Exercice 2 (Suite adjacentes)*.* Soient deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que : (i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ; (ii) $|u_n - v_n|$ tend vers 0. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite.

Exercice 3 (Suites entières convergentes)*.* Soit (u_n) une suite numérique telle que pour tout n le terme u_n est entier. Montrer que si (u_n) converge, alors elle est constante à partir d'un certain rang.

En général, si $u_n + v_n \to 0$, on ne peut rien conclure du comportement individuel de u_n et v_n. C'est toutefois possible dans certains cas :

Exercice 4*.* Soient (u_n) et (v_n) deux suite réelles.

1. Montrer que si $u_n^2 + v_n^2 \to 0$, alors $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$.
2. Montrer que si $u_n^2 + v_n^2 + u_n v_n \to 0$, alors $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$.

Exercice 5*.* Soit (u_n) une suite de réels non nuls vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$$

Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 6*.* Déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie par : (a) $u_n = \frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$; (b) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$; (c) $u_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}$; (d) $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k$.

Exercice 7*.* Déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie par : (a) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; (b) $u_n = \sqrt[n]{n^2}$; (c) $u_n = \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/n}$; (d) $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$.

Exercice 8*.* Comparer

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m, \quad \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

2 Valeurs d'adhérences

La notion de valeur d'adhérence permet d'appréhender le comportement des suites non convergentes. Notons (u_n) une suite numérique.

Definition 5 (Valeur d'adhérence)**.** Une *valeur d'adhérence* de (u_n) est un complexe a tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $N \in \mathbb{N}$ il existe un $n \geqslant N$, tel que $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$.

Notons bien la différence entre les formules

$$\begin{aligned} &\text{(convergence vers } a) \ \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, |u_n - a| \leqslant \varepsilon \\ &(a \text{ est valeur d'adhérence}) \ \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N : |u_n - a| \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Definition 6. Une *extraction* est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Soit (u_n) une suite numérique. Une *sous-suite* de (u_n), ou *suite extraite*, est une suite (v_n) dont le terme général est donné par $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour une certaine extraction φ.

Proposition 7. *Le complexe a est valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers a.*

Proposition 8. *Si (u_n) converge, son unique valeur d'adhérence est sa limite.*

Definition 9. Si (u_n) est une suite réelle qui admet au moins une valeur d'adhérence, alors la *limite supérieure* de (u_n) (resp. *limite inférieure*) est le supremum (resp. l'infimum) de ses valeurs d'adhérence. On la note $\limsup u_n$ (resp. $\liminf u_n$).

Notons que $\limsup u_n = -\liminf(-u_n)$.

Proposition 10 (Passage à la limite dans les inégalités)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles admettant des limites supérieures et inférieures. Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout n alors*

$$\limsup u_n \leqslant \limsup v_n \quad \textit{et} \quad \liminf u_n \leqslant \liminf v_n.$$

En particulier, si (u_n) et (v_n) sont convergentes, alors

$$\lim u_n \leqslant \lim v_n.$$

Théorème 11 (Bolzano–Weiertrass)**.** *Si la suite réelle (u_n) est bornée, alors elle admet une valeur d'adhérence.*

Ce type de résultat, qui apparaitra de nombreuses fois dans le cours, est appelé *théorème de compacité.* Il existe de nombreuses façons de le démontrer. La démonstration qui suit n'est pas la moins technique mais elle est représentative des preuves de compacité.

Démonstration. Soient a_0 un minorant de la suite (u_n) et b_0 un majorant, de sorte que $a_0 \leqslant u_n \leqslant b_0$ pour tout n. Pour un certain $p \in \mathbb{N}$, supposons a_p et b_p définis de telle sorte qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $a_p \leqslant u_n \leqslant b_p$. Soit $c = \frac{a_p+b_p}{2}$. L'une des deux propositions suivantes est vraie :

(i) il existe une infinité d'entiers n tels que $a_p \leqslant u_n \leqslant c$;

(ii) il existe une infinité d'entiers n tels que $c \leqslant u_n \leqslant b_p$.

Dans le premier cas, on définit $a_{p+1} = a_p$ et $b_{p+1} = c$. Dans le second, on définit $a_{p+1} = c$ et $b_{p+1} = b_p$. Par construction, il existe une infinité d'entiers n tels que $a_{p+1} \leqslant u_n \leqslant b_{p+1}$ De plus $|a_{p+1} - b_{p+1}| = \frac{1}{2}|a_p - b_p|$.

Ainsi construites, la suite (a_p) est croissante et la suite (b_p) est décroissante. De plus $|a_p - b_p|$ est inférieur à $2^{-p}|a_0 - b_0|$, donc tend vers 0. Par le critère des suites adjacentes, exercice 2, les suites (a_p) et (b_p) convergent vers une limite commune, notons la ℓ.

Montrons que ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_p). Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe un entier p tel que $|a_p - b_p| \leqslant \varepsilon$. Comme il existe une infinité d'entiers n tels que $a_p \leqslant u_n \leqslant b_p$, il en existe certainement un supérieur à N, notons le n. Par l'inégalité triangulaire,

$$|u_n - \ell| \leqslant |u_n - a_p| + |a_p - \ell|.$$

Comme u_n et ℓ sont dans l'intervalle $[a_p, b_p]$, on a $|u_n - a_p| \leqslant \varepsilon$ et $|a_p - \ell| \leqslant \varepsilon$, d'où $|u_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon$. □

3 Suites récurrentes

3.1 $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une fonction. Si u_0 est un élément de I, on peut définir par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition 12. *Si f est croissante, alors (u_n) est monotone. Si f est décroissante, alors les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.*

Proposition 13. *Si f est continue et si (u_n) admet une limite dans I, alors $f(\lim u_n)$ égale $\lim f(u_n)$*

Exercice 9. Soit u_n la suite récurrente définie par un certain $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 6u_n}{3u_n^2 + 2}$ Montrer que si $u_0 > 0$, alors $u_n \to \sqrt{2}$.

3.2 Récurrences linéaires à coefficients constants

Soient $a_1, \ldots, a_p$ des nombre complexes. Considérons la relation de récurrence

$$u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + \cdots + a_p u_n. \tag{R}$$

Théorème 14. *L'ensemble $\mathcal{E}$ des suites satisfaisant* (R) *est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimension p. Si le polymôme $x^p - \sum_i a_i x^{i-p}$ se factorise en $\prod_{i \in I}(x - \rho_i)^{\nu_i}$, avec des ρ_i distincts, alors une base de $\mathcal{E}$ est donnée par les suites de terme général $n^j \rho_i^n$, pour des $i \in I$ et $0 \leqslant j < \nu_i$.*

Exercice 10. Soit $\mathbb{R}_>$ l'ensemble des réels strictements positifs. Soit f une fonction $\mathbb{R}_> \to \mathbb{R}_>$. Montrer que si $f(f(x)) + f(x) = 6x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_>$, alors $f(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_>$.

4 Convergence des séries

Les objets principaux de l'étude des séries numériques sont les suites du type

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Il s'agit d'étudier les propriétés de (u_n) en fonction de celles de (v_n).

Definition 15. On note $S(u)$ la suite des *sommes partielles*, définie par $Su_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. La série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, est *convergente* si la suite Su admet une limite. On note alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ la limite. Quand la série est convergente, on définit la suite des *restes* par $Ru_n = \lim Su - Su_n$.

Proposition 16. *Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors u_n tend vers* 0*.*

Definition 17. Une série $\sum u_n$ est *grossièrement divergente* si u_n ne tend pas vers zéro.

Notons que la réciproque est fausse, comme le montre la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.

L'un des outils les plus utiles concerne la sommation des relations de comparaison. Il ne s'applique *que pour des séries à terme positifs.*

Proposition 18 (Sommation des relations de comparaison)**.** *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs. Supposons que $u_n = O(v_n)$ (resp. $u_n = o(v_n)$, resp. $u_n \sim v_n$).*

Si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ l'est aussi et $Ru_n = O(Rv_n)$ (resp. $Ru_n = o(Rv_n)$, resp. $Ru_n \sim Rv_n$).

Si $\sum u_n$ est divergente, alors $\sum v_n$ l'est aussi et $Su_n = O(Sv_n)$ (resp. $Su_n = o(Sv_n)$, resp. $Su_n \sim Sv_n$).

Un autre outil très utile est la comparaison série-intégrale.

Proposition 19 (Critère intégral de Cauchy)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive, décroissante. La série $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ est convergente.*

Dans ce cas

$$\int_N^\infty f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} f(n) \leqslant \int_{N-1}^\infty f(x)\mathrm{d}x.$$

Certains des exemples suivants sont obtenus par le critère intégral de Cauchy. Il sont particulièrement importants car beaucoup d'autres exemples s'y ramènent *via* la sommation des relations de comparaison.

Exercice 11.
1. (Séries géométriques) Montrer que la série $\sum \rho^n$ est convergente si et seulement si $|\rho| < 1$.
2. (Séries de Riemann) Montrer que la série $\sum n^{-\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
3. (Séries de Bertrand) Montrer que la série $\sum n^{-\alpha}(\log n)^{-\beta}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Quand les termes ne sont pas positifs, l'étude peut être plus délicate. Un critère fréquemment applicable est le suivant :

Proposition 20 (Critère des séries alternées)**.** *Si (u_n) est une suite positive, décroissante et telle que $\lim u_n = 0$, alors la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente. De plus, la suite des restes (R_n) vérifie $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.*

On se ramène souvent à une série à termes positifs en prenant les normes terme à terme :

Proposition 21. *Soit $\sum u_n$ une suite numérique. Si la série $\sum |u_n|$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente.*

Definition 22. Une série $\sum u_n$ telle que $\sum |u_n|$ est convergente est appelée *absolument convergente.*

Enfin, la formule sommatoire d'Abel permet de transformer une somme en intégrale tout en renforçant la convergence.

Proposition 23 (Formule sommatoire d'Abel)**.** *Soit (u_n) une suite numérique et f une fonction continuement dérivable. Notons $S(x) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant x} u_n$. Alors*

$$\sum_{0 \leqslant n \leqslant x} u_n f(n) = S(x) f(x) - \int_0^x S(t) f'(t) \mathrm{d}t.$$

Exercice 12. Étudier la convergence et la convergence absolue des séries suivantes : $\sum \frac{1}{n!}$, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{\sin n}{n}$.

Exercice 13. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Étudier la convergence des séries de terme général :

1. $u_n = \cos \frac{1}{n^a} - 1$;
2. $v_n = \exp \frac{(-1)^n}{n^a} - 1$;
3. $w_n = u_n + v_n$.

Exercice 14. Soit $a > 0$. Étudier la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{(\log n)^a + (-1)^n}$.

Exercice 15. Pour $a \in \mathbb{R}$, étudier la convergence de la série de terme général

$$\frac{n^a}{\sum_{k=1}^n (\log n)^2}.$$

Exercice 16. Montrer qu'il existe un réel γ, appelé constante d'Euler, telle que

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \log n + \gamma + o(1).$$

Exercice 17 (Règle d'Alembert). Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que u_{n+1}/u_n converge vers une limite a. Montrer que si $a > 1$, alors la série diverge grossièrement ; et que si $a < 1$, alors la série converge.

Exercice 18 (Règle de Raabe-Duhamel). Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que

$$u_{n+1}/u_n = 1 - \frac{\beta}{n} + \varepsilon_n$$

pour une certaine suite ε_n telle que $\sum \varepsilon_n$ est absolument convergente.

1. Montrer que $\log u_n = -\beta \log n + C + o(1)$ pour un certain C. On pourra étudier la série $\sum (\log u_{n+1} - \log u_n)$.
2. En déduire que $u_n \sim u_1 e^C / n^\beta$.
3. Que dire de la convergence de $\sum u_n$?
4. Que peut-on dire quand $\sum \varepsilon_n$ n'est pas absolument convergente mais $\varepsilon_n = o(1/n)$?

5 Convergence uniforme des fonctions

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions $I \to \mathbb{R}$. On peut étudier chacune des suites $(f_n(x))$. Il est possible, par exemple, que $f_n(x)$ tende vers un certain $g(x) \in \mathbb{R}$ quand n tend vers l'infini. Le problème est alors d'étudier les propriétés de la fonction g en par rapport à celles des f_n. Une bonne partie de l'analyse se consacre à ce problème. Un cas élémentaire mais important est le cas de la convergence uniforme.

Definition 24. La suite (f_n) *converge simplement* vers une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ si pour tout x dans I, la suite $(f_n(x))$ tend vers $g(x)$.

La suite (f_n) *converge uniformément* vers une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ si il existe une suite (u_n) qui tend vers 0 telle que $|f_n(x) - g(x)| \leqslant u_n$ pour tout $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.

On comparera :

$$\text{(convergence simple) } \forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, |f_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$$
$$\text{(convergence uniforme) } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, \forall x \in I, |f_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Très peu de propriétés sont conservées par la convergence simple, en revanche, la convergence uniforme est bien plus forte, comme le montre ce théorème.

Théorème 25. *Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction g, et si tous les f_n sont continues, alors g est continue.*

Démonstration. Soit $x \in I$. Montrons que g est continue en x. Soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver un $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in I$, si $|y - x| \leqslant \eta$, alors $|g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$. Notons que pour tout $y \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - g(y)|.$$

Par la convergence uniforme de (f_n), il existe un $n \in N$ tels que pour $|f_n(x) - g(x)| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon$ pour tout $x \in I$. Ainsi, pour tout $y \in I$,

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - g(y)|.$$

Par continuité de f_n, il existe un η' tel que pour tout $y \in I$, si $|y - x| \leqslant \eta$, alors $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon$. En particulier, si $|y - x| \leqslant \eta$,

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon,$$

ce que l'on voulait. □

Une autre forme de ce théorème est la suivante :

Théorème 26 (Interversion de limites). *On suppose que la suite de fonctions* (f_n) *converge uniformément sur* I *vers une fonction* f*. Soit* $x_0 \in \bar{I}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la limite* $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ *existe. Alors les deux limites ci-dessous existent et on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Exercice 19. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, \infty[$.
2. Étudier sa convergence uniforme sur $[a, \infty[$, pour $a > 0$.
3. Étudier sa convergence uniforme sur $[0, \infty[$.

6 Critère de Cauchy

Il est parfois difficile de démontrer la convergence d'une suite sans connaître *a priori* sa limite. Une des raisons à cela est que la définition 1 utilise la limite elle-même. Une manière très utile en pratique de contourner ce problème est le critère de Cauchy :

Théorème 27. *Soit* (u_n) *une suite numérique. Sont équivalents :*

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geqslant 0 : \forall n, m \geqslant N, |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon$ *;*

(ii) il existe un a *tel que* (u_n) *converge vers* a*.*

En appliquant ce critère à la suite des sommes partielles d'une série, on obtient le critère de convergence suivant :

Corollaire 28. *Soit* $\sum u_n$ *une suite numérique. Sont équivalents :*

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geqslant 0 : \forall m \geqslant n \geqslant N, |\sum_{k=n}^{m} u_k| \leqslant \varepsilon$ *;*

(ii) la série $\sum u_n$ *est convergente.*

Le critère de Cauchy a un analogue pour les suites de fonctions.

Théorème 29. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions* $I \to \mathbb{R}$*. Sont équivalents :*

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geqslant 0 : \forall x \in I \ \forall m \geqslant n \geqslant N, |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$ *;*

(ii) il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ *telle que* f_n *converge uniformément vers* g*.*

Pour $f : I \to \mathbb{R}$ bornée, on note $\|f\|_\infty$ le supremum de $|f(x)|$, pour $x \in I$.

Corollaire 30. *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions bornées* $I \to \mathbb{R}$*. Si la série* $\sum \|f_n\|_\infty$ *est convergente, alors la série* $\sum f_n$ *est uniformément convergente.*

Si les hypothèses de ce corollaire sont vérifiées, on dit que la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement.

Exercice 20. Soit $\sum a_n$ une série réelle convergente à termes positifs. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto a_n \sin(nx)$. Montrer que la série de fonction $\sum f_n$ est normalement convergente. En déduite que la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

est bien définie et continue.

7 Séries entières

Les séries entières sont un lien important entre l'analyse et l'étude des suites numériques. Il s'agit d'étudier les fonctions (d'une variable complexe ou réelle) de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

De nombreuses fonctions usuelles ont cette forme. Une série entière est d'un côté une fonction, et de l'autre côté la suite de ses coefficients. Comment les propriétés d'un des versants se reflète dans l'autre ? Une *série entière* est donc une série de fonctions $\sum f_n$ où les f_n sont donnés par $f_n(z) = a_n z^n$, avec $a_n \in \mathbb{C}$. Elle est notée $\sum a_n z^n$.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe des valeurs de z pour lesquelles la somme converge (par exemple $z = 0$), et d'autres pour lesquelles elle diverge. La situation est en fait assez simple.

Definition 31. Le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure des réels R tels que tel que la suite $(|a_n|R^n)$ est bornée.

Théorème 32. *Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ Si $|z| < R$, alors la série complexe $\sum a_n z^n$ converge absolument. Si $|z| > R$, alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. Si $|z| = R$, tout est possible : convergence, divergence, divergence grossière.*

De plus, sur le disque $D_r = \{z \ : \ |z| \leqslant r\}$ pour un certain $r < R$, la série de fonction $\sum a_n z^n$ converge absolument sur D_r.

Proposition 33. *Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.*

1. *Si $|a_{n+1}|/|a_n|$ converge vers $\ell > 0$, alors $R = 1/\ell$.*
2. *Si $(|a_n|)^{1/n}$ converge vers $\ell > 0$, alors $R = 1/\ell$.*

Exercice 21. Calculer le rayon de convergence des séries entières $\sum z^n/n!$, $\sum n^2 z^n$, $\sum n^n z^n$ et $\sum z^n$.

En particulier, la fonction $f(z) = \sum a_n z^n$ est bien définie sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R. On peut de plus démontrer le théorème suivant, avec des techniques similaires à celle utilisée pour le théorème 25.

Théorème 34. *Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit r un réel tel que $0 < r < R$. La série de fonction $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque $D(0, r)$. De plus la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque $D(0, r)$.*

La propriété de convergence normale permet de manipuler très simplement les séries entières, dans leur disque de convergence. On peut, par exemple, dériver termes à termes : si $f(z) = \sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors la dérivée de $f(z)$ dans le disque de convergence est la somme de la série entière $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$. En particulier $f^{(n)}(0) = n!a_n$, ce qui montre que les coefficients de la série entière sont entièrement déterminés par la fonction dès lors que le rayon de convergence n'est pas nul.

Exemple. Considérons l'équation différentielle $zy''(z) = y(z)$. Pour trouver ses solutions, un bon moyen est d'abord de chercher ses solutions séries entières. Supposons que $f(z) = \sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence non-nul, solution de l'équation différentielle. Alors nécessairement

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

ce qui implique, par identification des coefficients, que $a_n = n(n+1)a_{n+1}$. En résolvant la récurrence, on obtient que $a_0 = 0$ et que pour $n > 0$ le terme a_n vaut $C/n!/(n-1)!$, pour une certaine constante C.

Il reste à montrer que le rayon de convergence de la série obtenue est strictement positif (c'est le cas) et à trouver une seconde solution linéairement indépendante, mais c'est une autre histoire.

Exercice 22. Déterminer le rayon de convergence de : (a) $\sum_{n\geqslant 0} n!z^n$; (b) $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} z^n$; (c) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$; (d) $\sum_{n\geqslant 0} z^{n^2}$; (e) $\sum_{n\geqslant 0} \sin nz^n$; (f) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin n}{n^2} z^n$.

Exercice 23. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 24. Pour x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1.
3. Établir la continuité de f en -1.
4. Déterminer la limite de f en 1.

8 Corrigés des exercices

Exercice 1.

1. Il est clair que si u_n et v_n sont positifs, alors u_{n+1} et v_{n+1} sont positifs aussi. Comme u_0 et v_0 le sont par hypothèse, tous les u_n et les v_n sont positifs, par récurrence.

   Montrons que $v_n \leqslant u_n$ pour tout n. C'est vrai par hypothèse pour $n = 0$. Soit $n > 0$. Comme $(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2 \geqslant 0$, on obtient en développant le carré
   $$\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \leqslant \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2},$$
   soit $v_n \leqslant u_n$.

   Comme $v_n \leqslant u_n$, on a $v_n + u_n \leqslant 2u_n$, et donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. Comme $v_n \leqslant u_n$, on a $v_n u_n \geqslant v_n^2$, et donc $v_{n+1} \geqslant v_n$.
2. La suite (u_n) est décroissante et minorée par v_0, donc convergente. De même, la suite (v_n) est croissante et majorée par u_0. Comme $2u_{n+1} = u_n + v_n$, on a $2 \lim u_n = \lim u_n + \lim v_n$. D'où $\lim u_n = \lim v_n$.

Exercice 2. La suite (u_n) est croissante, par hypothèse. Montrons que (u_n) est majorée. Écrivons u_n comme $(u_n - v_n) + v_n$. La suite $(u_n - v_n)$ est convergente, donc bornée. La suite (v_n) est décroissante, donc majorée par v_0. Donc (u_n) est majorée, comme somme de deux suites majorées. Par le théorème de convergence monotone, elle converge.

De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée, donc elle converge. Soient a et b les limites respectives de (u_n) et (v_n). Par l'inégalité triangulaire

$$|a-b| \leqslant |a-u_n| + |u_n - v_n| + |v_n - b|,$$

et comme chacun des trois termes tend vers zéro, ceci prouve que $|a-b| = 0$, c'est-à-dire $a = b$.

Exercice 5. Montrons que $u_n \to 0$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$, il existe un entier N tel que $|u_{n+1}| \leqslant |u_n|/2$ pour tout $n \geqslant N$. Par récurrence, on obtient que $|u_{n+N}| \leqslant 2^{-n}|u_N|$. En particulier $u_n \to 0$.

Exercice 6. (a) $u_n = \dfrac{1-(-2/3)^n}{1+(2/3)^n}$, donc $u_n \to 1$.

(b) $u_n = n\left(\sqrt{1+\dfrac{n+1}{n^2}} - \sqrt{1+\dfrac{-n+1}{n^2}}\right)$, or, pour $x \to 0$ on vérifie que $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)$, donc $u_n = n\left(\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$, et finalement $u_n \to 1$.

(c) $u_n \to 0$.

(d) $u_n \to 1/2$ car $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 7. Il faut utiliser la formule $a^b = \exp(b \log a)$ et les équivalents usuels.

(a) $u_n \to e^n$.

(b) $u_n \to 1$.

(c) $u_n \to 1$.

(d) $u_n \to e^{-2}$.

Exercice 8. Ces trois limites valent respectivement 1, 0 et $1/e$.

Exercice 9. Soit $f(x) = \frac{x^3+6x}{3x^2+2}$ Cette fonction est croissante sur $[0,\infty[$, donc la suite u_n est monotone. Soient $I = [0,\sqrt{2}]$ et $J = [\sqrt{2},\infty[$. On vérifie que $f(I) \subset I$ et $f(J) \subset J$. Si $u_0 \in I$, alors $u_1 \geqslant u_0$, et si $u_0 \in J$, alors $u_1 \leqslant u_0$. Comme la suite (u_n) est monotone, elle est donc croissante si $u_0 \in I$ et décroissante si $u_0 \in J$. Dans le premier cas (u_n) est majorée par $\sqrt{2}$, dans le second cas (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$. Dans tous les cas (u_n) converge.

Notons ℓ la limite de u_n. On vérifie $f(\ell) = \ell$, et donc ℓ égale 0 ou $\sqrt{2}$. Le cas $\ell = 0$ est impossible car $u_0 > 0$.

Exercice 10. Soit u_0 un réel et définissons $u_{n+1} = f(u_n)$. Par hypothèse $u_{n+2} + u_{n+1} = 6u_n$. Les racines du polynôme x^2+x-6 sont 2 et -3. Par le théoreme 14, il existe deux réels A et B tels que $u_n = A2^n + B(-3)^n$. Or $u_n > 0$ pour tout n, donc $B = 0$. Ainsi $u_n = A2^n$. En particulier $u_1 = 2u_0$. C'est-à-dire $f(u_0) = 2u_0$, ce que l'on voulait.

Exercice 11. 1. Pour $\rho \neq 1$, on utilise la formule pour les sommes partielles :

$$\sum_{n=0}^{N} \rho^n = \frac{1-\rho^N}{1-\rho}.$$

2. On utilise le critère intégral de Cauchy.
3. Supposons $\alpha > 1$. Soit α' tel que $\alpha > \alpha' > 1$. On a alors $n^{-\alpha}(\log n)^{-\beta} = o(n^{-\alpha'})$. Comme la série $\sum n^{-\alpha'}$ est convergente, la série à termes positifs $\sum n^{-\alpha}(\log n)^{-\beta}$ converge aussi.

   Supposons $\alpha < 1$. Soit α' tel que $\alpha < \alpha' < 1$. On a alors $n^{\alpha'} = o(n^{-\alpha}(\log n)^{-\beta})$. Comme la série $\sum n^{\alpha'}$ diverge, la série $\sum n^{-\alpha}(\log n)^{-\beta}$ diverge aussi.

   Pour $\alpha = 1$, on utilise critère intégral de Cauchy, avec la formule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(\log x)^{1-\beta}}{1-\beta}\right) = x(\log x)^{-\beta}.$$

Exercice 12. La série $\sum \frac{1}{n!}$ converge absolument. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (critère des séries alternées) mais pas absolument. La série $\sum \frac{\sin n}{n}$ converge : on peut le voir à l'aide de la formule sommatoire d'Abel, avec $f(x) = 1/x$ et $u_n = \sin n$. Il faut alors remarquer que la suite $\sum_{k=1}^{n} \sin k$ est bornée. La convergence n'est pas absolue.

Exercice 13. 1. $u_n \sim -\frac{1}{2n^{2a}}$, donc $\sum u_n$ est convergent si et seulement si $a > 1/2$.

2. Si $a = 0$, alors $\sum v_n$ diverge grossièrement. Si $a > 0$, alors

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^a} + \frac{1}{2n^{2a}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3a}}\right).$$

   Notons ε_n le terme $v_n - \frac{(-1)^n}{n^a}$. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^a}$ est convergente, par le critère des séries alternées. Comme $\varepsilon_n \sim \frac{1}{2n^{2a}}$, la série $\sum \varepsilon_n$ converge si et seulement si $2a > 1$.

   Donc la série $\sum v_n$ converge si et seulement si $a > 1/2$.
3. Pour $a > 0$, on vérifie que

$$w_n = \frac{(-1)^n}{6n^{3a}} + \frac{1}{12n^{4a}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{5a}}\right).$$

   Donc la série $\sum w_n$ converge si et seulement si $a > 1/4$.

Exercice 14. La série diverge : ce n'est pas une série alternée car la valeur absolue du terme général ne décroit pas. On calcule

$$\frac{(-1)^n}{(\log n)^a + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{(\log n)^a} - \frac{1}{(\log n)^{2a}} + \mathcal{O}\left((\log n)^{-3a}\right).$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{(\log n)^a}$ est convergente, par le critère des séries alternées, mais la série $\sum \frac{1}{(\log n)^{2a}}$ diverge.

Exercice 15. Par une comparaison série-intégrale, on obtient que $\sum_{k=1}^{n}(\log n)^2 \sim n(\log n)^2$. Donc par comparaison à une série de Bertrand, la série converge si et seulement si $a \leqslant 0$.

Exercice 16. Utiliser une comparaison série-intégrale.

Exercice 17. Supposons $a \neq 1$. Soit $v_n = \log u_{n+1} - \log u_n$. Par hypothèse $v_n \to \log a$. Comme $\log a \neq 0$, on a donc $v_n \sim a$. Par sommation des relations de comparaison, $\sum_{k=1}^{n-1} v_n \sim n \log a$, et donc $\log u_n \sim n \log a$ et $u_n = a^{n+o(n)}$. Si $a > 1$, alors la série diverge grossièment. Si $a < 1$, alors la série converge.

Exercice 18.

1. Comme pour l'exercice précédent, on pose $v_n = \log u_{n+1} - \log u_n$. On calcule que $v_n = -\frac{\beta}{n} + \varepsilon_n + \nu_n$, où $\nu_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2} + \varepsilon_n^2)$.
   On vérifie $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\beta}{n} = \beta \log n + C_1 + o(1)$ pour une certaine constante C_1. Par hypothèse $\sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon_n = C_2 + o(1)$ pour une certaine constante C_2. De même $\sum_{n=1}^{N-1} \nu_n = C_3 + o(1)$ pour une certaine constante C_3. Donc
   $$\sum_{n=1}^{N-1} v_n = -\beta \log N + C_1 + C_2 + C_3 + o(1).$$
2. $\sum_{n=1}^{N-1} v_n = \log u_N - \log u_1$, donc $u_n = u_1 e^{C_1+C_2+C_3+o(1)} n^{-\beta}$.
3. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$.
4. Si on a seulement $\varepsilon_n = o(1/n)$, alors $u_n = e^{o(\log n)} n^{-\beta}$. La série $\sum u_n$ converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta < 1$, mais le cas $\beta = 1$ est douteux.

Exercice 19.

1. $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \geqslant 0$.
2. Soit $a > 0$. Comme $|\sin x| \leqslant 1$ pour tout x, on vérifie que $|f_n(x)| \leqslant e^{-an}$, pour tout $x \geqslant a$. Comme la majoration ne dépend pas de x, ceci montre que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a, \infty[$.
3. On constate que $f_n(1/n) = e \sin 1$, ce qui ne tend pas vers 0. Donc (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, \infty[$.

Exercice 20. C'est une application directe du corollaire 30 et du théorème 25.

Exercice 21. Les rayons de convergences sont ∞, 1, 0 et 1.

Exercice 22. (a) 0 (b) 1/4 ; (c) 1/27 ; (d) 1 ; (e) 1 ; (f) 1.

Exercice 23. Supposons que $\alpha \geqslant 0$. Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Soient $b_n = n^\alpha a_n$ et R' le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition $a_n(R-\varepsilon)^n$ est borné. En écrivant

$$b_n(R-2\varepsilon)^n = n^\alpha \left(\frac{R-2\varepsilon}{R-\varepsilon}\right)^n a_n(R-\varepsilon)^n$$

on constate que $b_n(R-2\varepsilon)^n$ est borné. Donc $R' \geqslant R - 2\varepsilon$. Comme ceci est valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a $R' \geqslant R$. Comme il est clair que $R' \leqslant R$, on a bien $R' = R$.

Le cas $\alpha \leqslant 0$ se traite de la même façon.

Exercice 24.

1. Le rayon de convergence de la série est 1.
2. La série est divergente en 1 et convergente en -1, par le critère des séries alternées.

3. Soit $x \in [-1, 0]$. Par le critère des séries alternées, la série $\sum_n x^n/\sqrt{x}$ converge et le reste $\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n/\sqrt{x}$ est majoré par $1/\sqrt{N+1}$. La majoration du reste est uniforme en x donc la convergence de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ est uniforme sur $[-1, 0]$. En particulier, la limite est continue.
4. Il est clair que $f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ pour $x > 0$. Or, pour $x \in [0, 1[$, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n = -\log(1-x)$, et $-\log(1-x) \to \infty$ quand $x \to 1$.