Topologie différentielle

Patrick Massot

7 septembre 2016

1. Variétés différentiables

1.1. Variétés et sous-variétés

Une *variété topologique* de dimension n est un espace topologique séparé et paracompact dont tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Remarquons tout de suite que le cœur de cette définition est l'hypothèse d'homéomophisme local avec $\mathbb{R}^n$. Les hypothèses de séparation et de paracompacité sont techniques, elles visent principalement à garantir l'existence de partitions de l'unité (théorème 3.1 du chapitre 3). Elles peuvent être ignorées puis remplacées, au moins psychologiquement, par la conclusion de ce théorème. En pratique, la paracompacité est toujours gratuite, mais la séparation doit parfois être vérifiée soigneusement.

Un homéomorphisme d'un ouvert d'une variété topologique X vers un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est appelé *carte* de X. Un *atlas* de X est une famille de cartes dont les domaines de définitions recouvrent X.

Soit $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i\}$ un atlas d'une variété topologique. Les *changements de cartes* de $\mathcal{A}$ sont les homéomorphismes $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$. Ce sont des homéomorphismes entre ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Un *atlas lisse* est un atlas dont tous les changements de cartes sont des difféomorphismes de classe C^∞. Deux atlas lisses sont équivalents si leur réunion est encore un atlas lisse.

Definition 1.1. *Une variété différentiable (de classe C^∞) est une paire (X, Σ) où X est une variété topologique et Σ est une classe d'équivalence d'atlas lisses sur X. rai aux*

Il est important de noter que qu'une variété topologique est un espace topologique vérifiant certaines *propriétés* tandis qu'une variété différentiable est un espace topologique muni d'une *structure supplémentaire*. On montre facilement qu'un espace topologiques peut porter deux structures de variétés différentiables différentes. Même une fois mis en place la notion d'isomorphismes de variétés différentiables, on peut montrer, difficilement, qu'un même espace topologiques peut porter plusieurs structures de variétés différentiables non isomorphes.

Ceci étant dit, il est quasiment systématique de sous-entendre la structure différentiable dans les notations. En particulier on appelle simplement carte de X toute carte faisant partie d'un atlas lisse représentant la structure différentiable de X. Dans toute la suite, le mot variété (sans précision) désigne une variété différentiable de classe C^∞.

Definition 1.2. *rai aux Une partie Y d'une variété X est une sous-variété de codimension k si tout point de Y est contenu dans le domaine d'une carte $\varphi \colon U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant $\varphi(Y \cap U) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$.*

La proposition suivante est évidente mais cruciale car elle fournit de nombreux exemples de variétés. On montrera même au chapitre 3 que, en un sens, elle les fournit tous.

Proposition 1.3. *Soit Y une sous-variété d'une variété X. Tout atlas lisse sur X induit par restriction un atlas lisse sur Y. Deux tels atlas sont équivalents et définissent donc une structure de variété sur Y.*

1.2. Applications différentiables

Comme espéré, la définition de variété différentiable permet de définir les applications différentiables.

Definition 1.4. *Une application $f : X \to Y$ entre deux variétés est différentiable si, pour tout x dans X, il existe des cartes $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ et $\psi\colon V \to \mathbb{R}^p$ autour de x et $f(x)$ respectivement, telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable. On dit que f est lisse si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^∞.*

Dans la définition précédente, la différentiabilité des changements de cartes de X et Y assure que les choix de φ et ψ n'ont pas d'importance. De même, le rang de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(x)$ est indépendant de ces choix, il est appelé *rang* de f en x et noté $\mathrm{rg}_x f$. On peut aussi définir ainsi les applications de classe C^k entre deux variétés lisses. Sauf mention explicite du contraire, toutes les applications entre variétés seront supposées lisses.

Definition 1.5. *Une application différentiable f d'une variété de dimension n dans une variété de dimension p est appelée*

- *une immersion si son rang vaut partout n ;*
- *une submersion si son rang vaut partout p ;*
- *un difféomorphisme local si son rang vaut partout n et p.*

Un difféomorphisme entre deux variétés est une application lisse bijective dont la réciproque est aussi bijective. Un plongement d'une variété N dans une variété M est une immersion f qui est un homéomorphisme sur son image. On le note $f\colon M \hookrightarrow N$.

Le théorème d'inversion locale montre que les difféomorphismes sont exactement les difféomorphismes locaux bijectifs. Les difféomorphismes d'une variété X dans elle-même forment un groupe noté $\mathrm{Diff}(X)$.

Remarque 1.6. *On vérifie facilement que deux structures de variété différentiable Σ et Σ' sur une même variété topologique M sont égales si et seulement si l'identité de M est lisse comme application de (M, Σ) dans (M, Σ') et comme application de (M, Σ') dans (M, Σ).*

Proposition 1.7. *Une partie A d'une variété X est une sous-variété de codimension k si et seulement si elle est localement défini par une submersion à valeur dans $\mathbb{R}^k$: pour tout x dans A, il existe un ouvert U contenant x et une submersion $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ telle que $A \cap U = f^{-1}(0)$.*

Démonstration. Pour alléger les notations, on pose $H = \mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}$ et $V = \{0\} \times \mathbb{R}^k$. On note $x = x_H + x_V$ la décomposition d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n = H \oplus V$.

L'un des deux sens est évident. En effet, si A est une sous-variété de X alors, par définition, tout point de A est contenu dans le domaine d'une carte $\varphi\colon U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant $\varphi(A \cap U) = \varphi(U) \cap H$. On peut alors choisir comme f la composée de φ et de la projection de $\mathbb{R}^n$ sur V parallèlement à H.

L'autre sens, qui est celui utile en pratique, est une conséquence du théorème d'inversion locale. Quitte à rétrécir U parmi les ouverts contenant x, on peut supposer qu'il existe une carte $\varphi_0 : U \to \mathbb{R}^n$. L'hypothèse de submersion signifie que la différentielle de $F := f \circ \varphi_0^{-1}$ est surjective. Quitte à composer φ_0 par une application linéaire inversible, et à réduire encore un peu U, on peut supposer que la restriction de DF à V est un isomorphisme. On définit alors Ψ de $\varphi_0(V)$ dans $\mathbb{R}^n$ par $\Psi(x) = x_H + F(x)_V$. Il s'agit d'un difféomorphisme local car sa différentielle vaut $\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ \star & DF|_V \end{pmatrix}$ qui est inversible. La carte recherchée est alors $\varphi = \Psi \circ \varphi_0$, après un ultime rétrécissement de U. Elle vérifie $\varphi(U \cap A) = \varphi(U) \cap H$ par construction. $\square$

1.3. Quotients et recollements

Le but de cette section est de permettre la construction d'exemples de variétés sans revenir à la définition et sans savoir à les plonger a priori comme sous-variétés d'exemples déjà connus.

1.3.1. Quotient par une action propre et libre

On rappelle qu'une *action d'un groupe* d'un groupe G sur un ensemble X est un morphisme de groupes ρ de G vers le groupe $\mathrm{Bij}(X)$ des bijections de X. Lorsque cela ne créé pas d'ambiguité, on note simplement gx l'image d'un élément x de X par $\rho(g)$ pour g dans G. L'*orbite* d'une partie A de X sous l'action de G est l'ensemble $GA = \{ga; g \in G, a \in A\}$. On note Gx l'orbite du singleton $\{x\}$. Une action de groupe définit une relation d'équivalence sur X : deux points x et y sont équivalents s'il existe g dans G tel que $gx = y$, autrement dit, si y est dans l'orbite de x. Le quotient de X par cette relation d'équivalence est noté X/G. À tout point x est associé son *stabilisateur* sous l'action de G: $G_x = \{g \in G; gx = x\}$, il s'agit d'un sous-groupe de G. On dit que l'action de G sur X est *libre* si tous les points de X ont un stabilisateur trivial (i.e. réduit à l'élément neutre de G).

Definition 1.8. *Une action d'un groupe G sur une variété M est un morphisme de groupe de G dans* $\mathrm{Diff}(M)$*. Elle est dite propre si, pour tout compact K de M, l'ensemble des g dans G envoyant K sur un ensemble l'intersectant ($g(K) \cap K \neq \varnothing$) est fini.*

Le théorème suivant permet de construire de nombreux exemples de variétés différentiables qui ne sont pas naturellement des sous-variétés d'exemples déjà connus. L'hypothèse de propreté est cruciale. L'hypothèse de liberté peut être affaiblie mais fournit déjà un énoncé utile.

Théorème 1.9. *Si G agit proprement et librement sur M alors il existe une unique structure différentiable sur M/G telle que la projection $p\colon M \to M/G$ soit un difféomorphisme local. En particulier M et M/G ont même dimension.*

Lemme 1.10. *Si l'action d'un groupe G sur une variété M est propre, alors $\mathcal{O} := \{(x, gx); x \in M, g \in G\}$ est fermé dans $M \times M$.*

Démonstration. Soit $(x_k, g_k x_k)$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}$ qui converge vers (x, x') dans $M \times M$. Soient K et K' des voisinages compacts de x et x' respectivement. Tous les g_k pour k suffisament grand vérifient que $g(K \cup K')$ intersecte $K \cup K'$. Par hypothèse de propreté de l'action, la suite g_k ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs. Quitte à extraire, elle est donc constante : $g_k = g$. On a alors $x' = \lim gx_k = gx$ donc (x, x') est dans $\mathcal{O}$. □

Démonstration du Théorème 1.9. On montre d'abord que le quotient est un espace topologique séparé. Soient $p(x)$ et $p(y)$ deux éléments distinct de M/G. Par définition, (x, y) n'est pas dans l'ensemble $\mathcal{O}$ du lemme 1.10. Comme ce dernier est fermé, il existe des voisinages U et V de x et y respectivement tels que $U \times V$ n'intersecte pas $\mathcal{O}$. Par définition de $\mathcal{O}$, cela signifie que GU n'intersecte pas V. Par suite GU et GV ne s'intersectent pas et $p(U)$ et $p(V)$ sont des voisinages disjoints de $p(x)$ et $p(y)$.

La paracompacité de M/G est claire. Un raisonnement analogue à celui conduisant à la séparation montre que tout x dans M admet un voisinage ouvert U déplacé par tous les éléments non-triviaux de G. La restriction de p à U est alors un homéomorphisme, dont on note s l'inverse. Quitte à rétrécir U, celui-ci est contenu dans le domaine d'une carte. On a donc un atlas $\{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}$ pour M et des homéomorphismes $s_i : p(U_i) \to U_i$ tels que $p \circ s_i = \mathrm{Id}$. L'ensemble des $\psi_i = \varphi_i \circ s_i : p(U_i) \to \mathbb{R}^n$ est alors un atlas de variété topologique pour M/G. Pour chaque composante V_{ijk} de $p(U_i) \cap p(U_k)$, il existe un élément g_{ijk} de G tel que $s_j = g_{ijk} s_i$ sur V_{ijk}. Donc $\psi_j \circ (\psi_i)^{-1} = \varphi_j \circ g_{ijk} \circ (\varphi_i)^{-1}$ est un difféomorphisme.

L'unicité de la structure différentiable sur M/G découle de la remarque 1.6. Soient Σ et Σ' deux structures différentiables sur M/G pour lesquelles la projection p est un difféomorphisme local. Si $s : p(U) \to U$ est une section locale de p comme plus haut. Alors s est un difféomorphisme de $(p(U), \Sigma)$ vers U et p est lisse de U vers $(p(U), \Sigma')$. Donc $\mathrm{Id}|_U = p \circ s$ est lisse de $(p(U), \Sigma)$ vers $(p(U), \Sigma')$. Par symmétrie de l'argument, l'identité est aussi lisse de $(M/G, \Sigma')$ dans $(M/G, \Sigma)$. □

1.3.2. Recollements

La définition de variété présente naturellement toute variété comme espace obtenu en recollant des ouverts de $\mathbb{R}^n$. La définition suivante formalise cette idée et permet d'aller plus loin en recollant des variétés plus complexes.

Definition 1.11. *Soit $(V_i)_{i \in I}$ une collection de variétés de dimension n. On appelle données de recollement des V_i une paire $((V_{ij})_{i,j \in I}, (\varphi_{ij})_{i,j \in I})$ où chaque V_{ij} est un* *ouvert de V_i et chaque φ_{ij} est un difféomorphisme de V_{ij} dans V_{ji} d'inverse φ_{ji} et vérifiant $\varphi_{ij}(V_{ij} \cap V_{ik}) = V_{ji} \cap V_{jk}$ et les relations de cocycle:*

$$\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ki} = \mathrm{Id}_{V_{ij} \cap V_{ik}}.$$

L'espace topologique V associé à ces données de recollement est le quotient de la réunion disjointe des V_i par la relation d'équivalence reliant tout $x \in V_{ij}$ à $\varphi_{ij}(x)$ (les relations de cocycles assurent qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence).

Proposition 1.12. *Dans le contexte de la définition 1.11, lorsque V est séparé et paracompacte, il existe une unique structure de variété sur V pour laquelle toutes les projections $V_i \to V$ sont des difféomorphismes sur leurs images.*

Démonstration. On note π_i la restriction à V_i de la projection canonique $\pi : \sqcup V_i \to V$ et on note U_i son image.

L'unicité découle de la remarque 1.6. Suppons que Σ et Σ' soient deux structures de variétés lisses comme dans l'énoncé. Par symétrie de la situation, il suffit de montrer que l'identité est lisse de (V, Σ) dans (V, Σ'). Il s'agit d'un énoncé local. Tout point v de V est contenu dans un U_i. Par hypothèse, ces U_i sont ouverts et π_i est un difféomorphisme de V_i sur (U_i, Σ) et (U_i, Σ'). L'identité de U_i est donc la composée des deux applications lisses $\pi_i^{-1} : (U_i, \Sigma) \to V_i$ et $\pi_i : V_i \to (U_i, \Sigma')$.

Pour l'existence, on considère sur chaque V_i un atlas $\{(W_i^k, \psi_i^k)\}$ et on équipe V de l'atlas réunion des $\{(\pi(W_i^k), \psi_i^k \circ \pi_i^{-1})\}$. Il s'agit bien d'un atlas lisse car les φ_{ij} sont des difféomorphismes. □

1.4. Exercices

Exercice 1.1. *Produit de variétés différentiables*

Exercice 1.2. *Montrer que le groupe $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de taille n est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n-1)/2$.*

Exercice 1.3. *Somme connexe de variétés.*

Exercice 1.4. *L'espace projectif par les cartes affines et par quotient*

Exercice 1.5. *Le tore comme quotient et comme produit. Difféomorphisme entre les deux définitions.*

2. Fibrés

2.1. Espaces fibrés

Definition 2.1. *Soit E, B et F des variétés différentiable et G un sous-groupe de* $\mathrm{Diff}(F)$*. Un fibré d'espace total E, de fibre F, de base B et de groupe structural G est une application lisse $p\colon E \to B$ telle qu'il existe un recouvrement de B par des ouverts U_i et des difféomorphismes, dits de trivialisation locale, $\Phi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\Phi_i"] \arrow[dr, "p"'] & & U_i \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

et tels que, sur tous les $U_i \cap U_j$, $\Phi_j \circ \Phi_i(x, v) = (x, \Psi_{ij}(x, v))$ vérifie $\Psi_{ij}(x, \cdot) \in G$ pour tout x.

Lorsque F est un espace vectoriel et $G \subset \mathrm{GL}(F)$, on fit que $p\colon E \to B$ est un fibré vectoriel de rang $\dim(F)$*.*

La fibre de p en un point b de B est $p^{-1}(b)$.

Une section d'un fibré $p : E \to B$ est une application lisse $s : B \to E$ vérifiant $p \circ s = \mathrm{Id}_B$.

Dans la pratique, il est utile de disposer de raccourci de langage et de notations, lorsque qu'il n'y a pas de risque d'ambiguité. Lorsque le groupe structural est tout $\mathrm{Diff}(F)$), on omet de le mentionner. On utilise aussi le mot fibré pour désigner l'espace total E, lorsque l'application p est claire dans le contexte, et on note E_b la fibre de p en b.

On dit aussi que $p : E \to B$ est une *fibration localement triviale*. Lorsqu'on veut préciser le groupe G, on utilise aussi le vocabulaire de G-fibré ou G-fibration. Bien sûr, si $G \subset H \subset \mathrm{Diff}(F)$, tout G-fibré est a fortiori un H-fibré.

Exemple 2.2. *Pour tout B et F, la première projection $B \times F \to B$ est un fibré appelée fibré trivial de base B et de fibre F.*

Exemple 2.3. *À tout difféomorphisme φ d'une variété F, on associe sa suspension $\Sigma(F, \varphi)$ définit comme quotient de $F \times \mathbb{R}$ sous l'action du groupe $\mathbb{Z}$ engendrée par φ: $n(x, t) = (\varphi^n(x), t - n)$. La projection de $F \times \mathbb{R}$ sur $F \times \mathbb{S}^1$ donnée par $(x, t) \mapsto (x, t \mod \mathbb{Z})$ passe au quotien en fibration localement triviale $\Sigma(F, \varphi) \to \mathbb{S}^1$ de fibré F et de groupe structural le groupe engendré par φ.*

Dans le cas particulier très important des fibrés vectoriels, chaque fibre est munie d'une structure d'espace vectoriel. En effet la structure d'espace vectoriel évidente sur $\{b\}\times F \subset U \times F$ d'une trivialisation locale Φ_i quelconque est préservée par les changements de trivialisation $\Psi_{ij}(b,\cdot)$. Par exemple, la suspension d'une application linéaire est un fibré vectoriel. Dans le cas où $F = \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = -x$, on obtient le *ruban de Möbius* (ouvert).

La méthode de recollement de la section 1.3.2 s'étend au recollements des fibrés. Pour rester simple, on se contente de recoller des fibrés triviaux (mais le fibré recollé ne le sera pas forcément !). Étant donnée une collection de variétés V_i et des données de recollement (V_{ij}, φ_{ij}), on appelle donnée de recollements des $V_i \times F$ pour le groupe $G \subset \mathrm{Diff}(F)$ toute collection d'applications lisses $\theta_{ij} : V_{ij} \times F \to F$ telles que, pour tout b fixé dans V_{ij}, l'application $f \mapsto \theta_{ij}(b,f)$ soit dans G et les $\Psi_{ij} : V_{ij} \times F \to V_{ji} \times F$ envoyant (b,f) sur $(\varphi_{ij}(b), \theta_{ij}(b,f)$ vérifient la relation de cocycle. La proposition suivante est une variante facile de la proposition 1.12.

Proposition 2.4. *Des données de recollement de fibrés fournissent un fibré.*

2.2. Foncteur tangent

Soit M une variété et x un point de M. On note C_xM l'ensemble des courbes lisses passant par x à $t = 0$:

$$C_xM = \{\gamma :]-a, a[\to M \ ; \ \gamma(0) = x\}.$$

Toute application lisse f entre deux variété M et N induit, pour chaque x de M, l'application C_xf de C_xM vers $C_{f(x)}N$ qui envoie γ sur $f \circ \gamma$.

On dit que deux éléments γ_0 et γ_1 de C_xM ont même vitesse en 0 s'il existe une carte φ dont le domaine contient x et pour laquelle $(\varphi\circ\gamma_0)'(0) = (\varphi\circ\gamma_1)'(0)$. Le théorème de dérivation des fonctions composées montre que cette propriété est indépendant du choix de la carte φ. Le même théorème montre que cette relation est préservée par C_xf pour toute application f.

Definition 2.5. *L'espace tangent T_xM d'une variété M est un point x est le quotient par la relation d'équivalence « avoir la même vitesse à $t = 0$ » de l'ensemble des courbes lisses passant par x à $t = 0$. Le fibré tangent TM de M est la réunion disjointe des T_xM pour tous les points x de M.*

Definition 2.6. *L'application tangente à $f : M \to N$ en un point x est l'application T_xf de T_xM vers $T_{f(x)}N$ induite par C_xf. L'application correspondante de TM dans TN est notée Tf, ou parfois Df ou f_*. Lorsque $N = \mathbb{R}$, on la note aussi df.*

L'inusable théorème de dérivation des fonctions composées est alors promu en :

$$T(f \circ g) = Tf \circ Tg.$$

On dit que T est un *foncteur*, il transforme à la fois les objets que sont les variétés et les morphismes que sont les applications lisses entre variétés, d'une façon compatible avec la composition des morphismes.

Exemple 2.7. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de directon E. L'application de $\mathcal{E} \times E$ dans $C\mathcal{E}$ qui envoie (x, v) sur $t \mapsto x+tv$ induit un isomorphisme de $\mathcal{E} \times E$ sur $T\mathcal{E}$. Cet isomorphisme est fonctoriel : pour toute application différentiable f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, l'isomorphisme identifie $(x, v) \mapsto (f(x), Df(x)v)$ à Tf.*

Théorème 2.8. *Soit M une variété de dimension n. Il existe une unique structure de variété sur TM pour laquelle la projection évidente $TM \to M$ est un fibré vectoriel de rang n et pour laquelle tous les $Tf : TM \to TN$ sont des applications lisses et les $T_x f$ sont linéaires, de rang $\operatorname{rg}_x f$.*

Démonstration. L'unicité est claire car $T\,\mathrm{Id}_M = \mathrm{Id}_{TM}$.

L'existence est basée sur la méthode de recollement de la proposition 2.4. Partant d'un atlas $\{\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n\}$ et de ses changements de cartes $\varphi_{ij} : V_{ij} \to V_{ji}$, on considère les données de recollement de fibrés $\Psi_{ij} : V_{ij} \times \mathbb{R}^n \to V_{ji} \times \mathbb{R}^n$ envoyant (b, f) sur $(\varphi_{ij}(b), D\varphi_{ij}(b)(f))$. La relation de cocycle pour les Ψ_{ij} découle immédiatement de celle vérifiée par les φ_{ij} et de la formule de dérivée des fonctions composées. L'exemple 2.7 montre que le fibré vectoriel ainsi obtenu est en bijection avec TM et vérifie les propriétés annoncées. □

Un *champs de vecteurs* sur une variété M est une section de TM. Le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres, appliqué dans des cartes, montre que, pour tout champ de vecteur X, il existe une fonction $\varepsilon : M \to \mathbb{R}_+^*$ et une application Φ_X définie sur $\{(t, x) \in \mathbb{R} \times M\,;\, |t| < \varepsilon(x)\}$ et vérifiant

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_X(t, x) = X(\Phi_X(t, x)).$$

On dit que Φ_X est le *flot* de X.

2.3. Opérations sur les fibrés vectoriels

À toute opération usuelle sur les espaces vectoriels correspond une opération sur les fibrés vectoriels. Par exemple si E et F sont deux fibrés vectoriels sur une même base B, on définit le *fibré des applications linéaires* de E vers F comme étant le fibré vectoriel $L(E, F)$ de fibre $L(E_b, F_b)$ au-dessus de tout point b de la base. La structure différentiable faisant de $L(E, F) \to B$ un fibré vectoriel est définie par la méthode de recollement (Proposition 2.4 comme pour le fibré tangent.

Par exemple, le *fibré dual* E^* d'un fibré vectoriel E est définit comme $L(E, \mathbb{R})$ où $\mathbb{R}$ est l'abréviation du fibré vectoriel trivial $M \times \mathbb{R} \to M$. L'exemple le plus important de cette construction est le *fibré cotangent*, le dual du fibré tangent. Il est noté T^*M plutôt que $(TM)^*$ pour plus de concision.

Un *sous-fibré* d'un fibré vectoriel $E \to B$ est une sous-variété $F \subset E$ telle que, pour tout b dans B, F_b soit un sous-espace vectoriel de E_b. On peut vérifier que la restriction à F de la projection $E \to B$ est alors elle même un fibré vectoriel. En pratique on peut considérer que cette dernière propriété fait partie de la définition.

À tout sous-fibré F de E est associé le *fibré quotient* $E/F \to B$ définit ponctuellement par $(E/F)_b = E_b/F_b$ et muni d'une structure de fibré vectoriel par la méthode du recollement.

Un fibré $p\colon E \to B$ se tire en arrière par toute application $f\colon S \to B$. Le *fibré induit* $f^*E \to B$ est défini comme le sous-fibré de $S \times E \to S$ défini par $p(e) = f(s)$.

2.4. Exercices

Exercice 2.1. *Montrer qu'un fibré vectoriel de rang un est trivial si et seulement si il admet une section qui ne s'annule nul part.*

Montrer que le ruban de Möbius n'est pas un fibré trivial.

Exercice 2.2. *exo : lien entre champs de vecteurs abstraits et concrets pour une surface dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que l'espace tangent abstrait est isomorphe à un sous-fibré du tangent ambiant.*

Exercice 2.3. *Espace tangent à une sous-variété défini par une submersion.*

3. Sous-variétés et orientations

3.1. Partitions de l'unité et plongements

Le théorème suivant est la clef permettant des constructions globales à partir de constructions locales.

Théorème 3.1. *Pour tout recouvrement d'une variété M par des ouverts U_i, il existe une famille de fonctions lisses $\rho_i : M \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes :*

- *le support de chaque ρ_i est contenu dans U_i*
- *chaque point de M possède un voisinage n'intersectant qu'un nombre fini de supports des ρ_i*
- *$\sum \rho_i \equiv 1$.*

Démonstration. Le fait fondamental est l'existence d'une fonction cloche lisse.

Lemme 3.2. *Il existe une fonction $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ qui est C^∞, strictement positive en l'origine et à support compact.*

En composant à droite par une homothétie, on peut imposer au support d'une cloche d'être contenu dans une boule de rayon arbitrairement petit. En utilisant un atlas, on obtient donc que, pour tout point x d'une variété et tout ouvert U contenant x, il existe une fonction positive qui est strictement positive en x et dont le support est contenu dans U. Une telle fonction sera appelée cloche en x à support dans U.

Soit $(K_n)_n$ une exhaustion de M par des sous-ensembles compacts : chaque K_n est compact, K_n est dans l'intérieur de K_{n+1} et $\bigcup K_n = M$. Pour tout x dans l'adhérence L_n de $K_{n+1} \setminus K_n$, on choisit un ouvert B_x suffisament petit pour être inclus dans l'un des U_i et dans $K_{n+2} \setminus K_{n-1}$. Soit χ_x une cloche en x à support dans B_x. On pose $V_x = \chi_x^{-1}(]0, \infty[)$. Les ouverts V_x recouvrent le compact L_n donc on peut en extraire une famille finie. L'union sur n de ces ouverts fournit un recouvrement dénombrable localement fini de M par des V_j où chaque V_j est inclus dans un $U_{i(j)}$ et de la forme $\chi_j^{-1}(]0, \infty[)$ pour une fonction χ_j lisse, positive et à support dans $U_{i(j)}$. La condition de finitude montre que la série $\sum \chi_j$ converge (c'est une somme finie en restriction à n'importe quel compact). La condition de recouvrement montre que la somme est partout strictement positive. On pose

$$\rho_i = \frac{\sum_{j; i(j)=i} \chi_j}{\sum \chi_j}$$

qui a bien les propriétés annoncées. □

Voici un premier corollaire spectaculaire de l'existence de partitions de l'unité.

Théorème 3.3. *Toute variété compacte se plonge dans un espace affine $\mathbb{R}^N$.*

Démonstration. Soit $\{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}$ un atlas d'une variété compacte M. Par compacité, on peut supposer que cet atlas est fini : $i \leq p$. Le théorème 3.1 fournit une partition de l'unité (ρ_i) subordonnée au recouvrement par les U_i. Comme $\sum \rho_i \equiv 1$, pour tout x de M, il existe $i(x)$ tel quel $\rho_i(x) \geq 1/(2p)$. On fixe une fonction lisse $\chi : \mathbb{R} \to [0,1]$ qui s'annule pour $t \leq 1/(8p)$ et vaut un pour $t \geq 1/(4p)$. On pose $\lambda_i = \chi \circ \rho_i$. Par construction, les $V_i = \rho_i^{-1}(]1/(3p), 1])$ sont des ouvert inclus dans les U_i qui recouvrent M, chaque λ_i est à support compact et vaut un sur V_i. En passant des ρ_i aux λ_i, on perd le contrôle de la somme mais on gagne des ouverts sur lesquels les λ_i sont constantes.

On considère sur M les fonctions

$$f_i : x \mapsto \begin{cases} \lambda_i(x)\varphi_i(x) & \text{si } x \text{ est dans } V_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $g_i : x \mapsto (f_i(x), \lambda_i(x))$ à valeur dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Enfin on considère $g = (g_1, ..., g_p)$ de M dans $\mathbb{R}^{p(n+1)}$. Il s'agit d'une immersion car tout point x de M est dans un V_i et $T_x g_i$ est injective donc a fortiori $T_x g$ aussi. Elle est injective car, si $g(x) = g(y)$ alors $\lambda_i(x) = \lambda_i(y)$ pour tout i donc en particulier pour $i(x)$. Ainsi y est aussi dans $V_{i(x)}$ et l'égalité $f_{i(x)}(x) = f_{i(x)}(y)$ entraine alors $\varphi_{i(x)}(x) = \varphi_{i(x)}(y)$ puis $x = y$ par injectivité des cartes φ_i.

Ainsi g est une immersion injective. Comme M est compacte, g est un plongement. En effet, l'image réciproque d'un fermé F de M par g^{-1} est égale à son image directe par g. Or F est compact comme fermé d'un compact donc $g(F)$ est compact donc fermé. □

3.2. Voisinages tubulaires

Soit N une sous-variété d'une variété M. En tout point x de N, l'inclusion de $C_x N$ dans $C_x M$ induit une inclusion de fibré vectoriels $TN \subset TM$. Le fibré quotient $\nu N = TM/TN$ est appelé *fibré normal* de N dans M.

Théorème 3.4. *Soit N une sous-variété compacte d'une variété M. Il existe un voisinage U de la section nulle dans le fibré normal νN dont l'intersection avec chaque fibre est convexe et un plongement $e : U \to M$ qui est l'identité sur N vu comme section nulle de νN. En particulier la projection $\pi : \nu N \to N$ induit une fibration localement triviale d'un voisinage $e(U)$ de N vers N dont les fibres sont difféomorphes à des boules.*

Le voisinage $e(U)$ du théorème précédant est appelé *voisinage tubulaire* de N dans M.

Démonstration. On commence par le cas où M est un espace affine $\mathbb{R}^p$. On utilise le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$, vu comme champ de produits scalaires sur $T\mathbb{R}^p$. Dans ce cas νN est isomorphe au sous-fibré $TN^\perp = \{(x, v); x \in N, v \perp T_x N\}$ de $\iota^* T\mathbb{R}$ car $T_x \mathbb{R}^p = T_x N \oplus (T_x N)^\perp$ pour tout x dans N. De plus on a une application

$e : TN^{\perp} \to \mathbb{R}^p$ définie par $e(x, v) = x + v$. Pour tout x dans N, la différentielle de e en $(x, 0)$ vaut l'identité. Elle reste donc inversible au voisinage de la section nulle. Le théorème d'inversion locale garantit que e est localement injective au voisinage de la section nulle. Il reste à montrer qu'elle l'est globalement (toujours au voisinage de la section nulle). Supposons par l'absurde qu'il existe deux suite (x_k, v_k) et (y_k, w_k) avec $v_k \to 0$ et $w_k \to 0$ telles que $x_k + v_k = y_k + w_k$ pour tout k mais $(x_k, v_k) \neq (y_k, w_k)$. Par compacité de N, on peut supposer que x_k converge vers un certain n. Comme v_k et w_k tendent vers zéro, y_k tend aussi vers n. Cela contredit l'injectivité de e au voisinage de $(n, 0)$.

On démontre maintenant le cas général. Le théorème 3.3 fournit[1] un plongement de M dans $\mathbb{R}^p$. On peut alors munir chaque T_xM, vu comme sous-espace vectoriel de $T_x\mathbb{R}^p$, de la restriction du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^p$. On alors un isomorphisme entre νN et $E = \{(x, v), x \in N, v \in T_xM \,;\, v \perp T_xN\}$. Soit $\pi\colon V \to M$ la projection d'un voisinage tubulaire de M fournit par la première partie de la démonstration. On définit $e\colon E \to N$ par $e(x, v) = \pi(x + v)$, qui est bien définit si v est assez petit pour que $x + v$ soit dans V. Le reste de la démonstration est complètement analogue au cas $M = \mathbb{R}^p$. $\square$

Théorème 3.5. *Toute application continue entre variétés compactes est homotope à une application lisse, par une homotopie arbitrairement proche de l'identité en norme C^0. Si cette application continue est lisse au voisinage d'un compact alors on peut imposer à l'homotopie d'être constante sur un voisinage (plus petit) de ce compact.*

Démonstration. Soit f une application continue entre deux variétés P et Q. Le théorème 3.3 permet de supposer que Q est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$. Soit $\pi : V \to Q$ la projection d'un voisinage tubulaire de Q fournit par le théorème 3.4.

Soit $\{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}$ un atlas fini de P et ρ_i une partition de l'unité subordonnée à cet atlas. Chaque application $f_i := f \circ \varphi_i^{-1}$ est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^N$ et $K_i := \varphi_i(\operatorname{supp} \rho_i)$ est compact. Soit $(f_i^k)_k$ une suite de fonctions lisses sur $\mathbb{R}^N$ convergeant uniformément vers f_i sur K_i. On pose $f^k = \sum_i \rho_i(x) f_i^k(\varphi_i(x))$. Cette application est bien définie car $\rho_i(x)$ s'annule là où $\varphi_i(x)$ n'est pas défini. On convient alors que le produit des deux est nul. Ainsi f^k est une application lisse définie sur tout P. Puisque les ρ_i sont à valeur dans $[0, 1]$ et de somme 1, on a l'estimée :

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f^k(x)\| &= \left\| f(x) - \sum_i \rho_i(x) f_i^k(\varphi_i(x)) \right\| \\
&= \left\| \sum_i \rho_i(x) \left[f(x) - f_i^k(\varphi_i(x)) \right] \right\| \\
&= \sum_i \sup_{x \in \operatorname{supp} \rho_i} \left\| f(x) - f_i^k(\varphi_i(x)) \right\|
\end{aligned}$$

La somme sur i ne comportant qu'un nombre fini de termes, on a bien la convergence uniforme de f^k vers f. De même l'homotopie $f_t^k = (1 - t)f + tf^k$ converge vers f

1. si M n'est pas compacte, il faut adapter un peu l'énoncé et la démonstration, le point crucial étant que, par compacité de N, cette dernière est recouverte par un nombre fini de cartes de M

uniformément en $t \in [0,1]$. En particulier les f_t^k sont à valeur dans le voisinage tubulaire V de Q pour k assez grand et l'homotopie $\pi \circ f_t^k$ est à valeur dans Q. Comme f était déjà à valeurs dans Q, $\pi \circ f = f$ et l'uniforme continuité de π sur un voisinage compact de Q montre que tous les $\pi \circ f_t^k$ convergent vers f quand k tend vers l'infini, uniformément en t.

Le cas où f était déjà lisse au voisinage d'un compact est laissée en exercice. □

3.3. Variétés à bord

Il est naturel d'étendre un peu la classe des variétés en autorisant la présence d'un bord. Ainsi on veut pouvoir considérer la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ comme une variété à bord, de bord la sphère unité.

Pour cela on ajoute comme modèle les ouverts de $\mathbb{R}^n_- = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,;\, x_1 \leq 0\}$. Par définition, le bord $\partial\mathbb{R}^n_-$ de $\mathbb{R}^n_-$ est $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et le bord d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n_-$ est $\partial U = U \cap \partial\mathbb{R}^n_-$.

Un difféomorphisme φ entre ouverts U et V de $\mathbb{R}^n_-$ est une bijection qui à la restriction à U d'un difféomorphisme entre des voisinages ouverts de U et V dans $\mathbb{R}^n$.

Lemme 3.6. *Tout difféomorphisme entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n_-$ envoie le bord de U sur le bord de V.*

Démonstration. Les points de $U \setminus \partial U$ sont caractérisés par l'existence, pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$ d'une courbe $\gamma\colon [-1,1] \to U$ vérifiant $\dot\gamma(0) = v$. Cette caractérisation est bien invariante par difféomorphisme. □

Le lemme précédant reste vrai pour les homéomorphismes mais sa démonstration est plus difficile.

Un atlas de variété à bord sur un espace topologique M est une famille $\{\varphi_i : U_i \to V_i\}$ où les U_i forment un recouvrement ouvert de M, les V_i sont des ouverts de $\mathbb{R}^n_-$, les φ_i sont des homéomorphismes et les changements de cartes $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sont des difféomorphismes. Deux tels atlas sont équivalents si leur réunion est encore un atlas de variété à bord.

Definition 3.7. *Une variété à bord est un espace topologique M muni d'une classe d'équivalence d'atlas de variété à bord.*

Le bord de M est l'ensemble des points envoyés dans $\partial\mathbb{R}^n_-$ par une carte.

Le lemme précédant montre que le bord d'une variété à bord est bien défini.

On définit les *applications lisses* et *difféomorphisme* entre variétés à bord de la même façon que dans le cas sans bord. De même le *fibré* a une définition analogue à celui des variétés sans bord mais $C_x M$ contient en plus les courbes $\gamma\colon [-1,0] \to M$ vérifiant $\gamma(0) = x$. Ainsi l'espace tangent à M en un point de son bord est bien un espace vectoriel et pas une moitié d'espace vectoriel.

Le bord ∂M d'une variété à bord M est une sous-variété (sans bord), pour une extension évidente de la définition de sous-variété. De même on peut définir les sous-variétés à bord d'une variété à bord. On dit qu'une sous-variété N est proprement plongée dans

M si l'inclusion de N dans M est propre au sens topologique (l'image réciproque de tout compact est compacte), si $\partial N = N \cap \partial M$ et $T_x N + T_x \partial M = T_x M$ en tout x de ∂N. Cette dernière condition reviendra dans le chapitre suivant.

3.4. Orientations

On rappelle qu'une orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie strictement positive est une classe d'équivalence de bases pour la relation qui lie deux bases si le déterminant de l'une dans l'autre est positif. Par convention, une orientation de l'espace vectoriel de dimension zéro est un signe $\pm$. Chaque espace vectoriel de dimension finie possède exactement deux orientations. Par définition, un endomorphisme préserve l'orientation s'il envoie une base sur une base équivalente. Cette notion est indépendante du choix d'une orientation. Par définition, un difféomorphisme entre ouverts connexes d'un espace affine préserve l'orientation si sa différentielle (en un point quelconque) préserve l'orientation.

Definition 3.8. *Un atlas orienté d'une variété M est un atlas dont tous les changements de cartes préservent l'orientation. Une variété est orientable si elle admet un atlas orienté. Une variété orientée est une variété munie d'un classe d'équivalence d'atlas orientés. La relation d'équivalence est définie comme dans le chapitre 1 en remplaçant le mot « atlas » par « atlas orienté ».*

Un variété est dite *orientable* si elle admet un atlas orienté. Toute variété orientable correspond à exactement deux variétés orientées.

En chaque point x d'une variété orientée M, l'espace tangent $T_x M$ est orienté. En effet, la construction de la structure différentiable du fibré tangent dans le chapitre 2 montre que chaque carte dont le domaine contient x fournit une identification entre $T_x M$ et $\mathbb{R}^n$. Ce dernier possède une orientation canonique et la définition d'atlas orienté montre que l'orientation qu'elle induit sur $T_x M$ ne dépend pas du choix de carte.

Orientation du bord.

Sous-variété orientée d'une variété orientée, fibré normal.

3.5. Exercices

Exercice 3.1. *Soit M la suspension du difféomorphisme de $\mathbb{T}^2$ induit par $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Soit Σ la surface image de $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \times \mathbb{R}$ dans M. Montrer que le fibré normal de Σ dans M n'est pas (isomorphe à) un fibré trivial. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : M \to \mathbb{R}$ transversale sur 0 vérifiant $f^{-1}(0) = \Sigma$.*

Exercice 3.2. *Une métrique riemanienne sur une variété M est un champ de produits scalaires g sur le fibré tangent. Plus précisement, g est une section (lisse) du fibré $L(TM \times TM, \mathbb{R})$ telle que chaque g_x est un produit scalaire sur $T_x M$. À l'aide de partitions de l'unité, montrer que toute variété admet une métrique riemannienne.*

4. Transversalité

4.1. Transversalité et images réciproques

Definition 4.1. *Soit $f\colon M \to N$ une application entre variétés et A une sous-variété de N. On dit que f est transversale sur A si, en tout x de $f^{-1}(A)$, $T_x f(T_x M) + T_{f(x)}A = T_{f(x)}N$. Autrement dit, f est transversale sur A si, en tout x de $f^{-1}(A)$, la composée de $T_x f$ et de la projection $T_{f(x)}N \to \nu_{f(x)}A$ est surjective.*

Proposition 4.2. *Si f est transversale sur A alors $f^{-1}(A)$ est une sous-variété de M de même codimension que A dans N. La différentielle de f induit un isomorphisme de $\nu f^{-1}(A)$ sur νA.*

Démonstration. Soit x_0 un point de $f^{-1}(A)$ et $y \in A$ son image par f. D'après la proposition 1.7, il existe un ouvert V contenant y_0 et une submersion $g\colon V \to \mathbb{R}^k$ tels que $A \cap V = g^{-1}(0)$. Soit U l'ouvert $f^{-1}(V)$. Comme $f^{-1}(A) \cap U = (g \circ f)^{-1}(0)$, l'autre implication de la proposition 1.7 assure qu'il suffit de vérifier que $g \circ f$ est une submersion en tout point de $f^{-1}(A) \cap U$. C'est une simple affaire d'algèbre linéaire.

Lemme 4.3. *Soit E, F et G des espaces vectoriels, $\varphi : E \to F$ et $\pi : F \to G$ des applications linéaires. Si π est surjective et $\operatorname{im}\varphi + \ker\pi = F$ alors $\pi \circ \varphi$ est surjective et φ induit un isomorphisme $E/\ker(\pi\circ\varphi) \simeq F/\ker\pi$.*

Démonstration. On note p la projection de F sur $F/\ker\pi$ et $\bar\pi$ l'application induite par π de $F/\ker\pi$ sur G.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, two heads] & & F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads, "p"'] & G \\
E/\ker(\pi\circ\varphi) \arrow[rr, dashed] & & F/\ker\pi \arrow[ur, "\wr", "\bar\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

L'hypothèse de surjectivité assure que $\bar\pi$ est un isomorphisme. En particulier $\ker(\pi\circ\varphi) = \ker(p\circ\varphi)$ donc $p\circ\varphi$ induit une application injective de $E/\ker(\pi\circ\varphi)$ sur $F/\ker\pi$. Comme $\operatorname{im}\varphi + \ker\pi = F$, $F/\ker\pi = \operatorname{im}\varphi/\ker\pi$ et cette application est aussi surjective. □

Dans la situation de la proposition, pour tout y dans $A \cap V$, $T_y g$ est surjective et $\ker T_y g = T_y A$ tandis que $Tf(T_x M) + T_y A = TN$, ce qui permet bien d'appliquer le lemme. □

On dit que deux sous-variétés A et B de M sont transversales si $T_x A + T_x B = T_x M$ en tout point x de $A \cap B$. Cela équivaut à dire que l'inclusion de A dans M est transversale sur B. En particulier l'intersection $A \cap B$ est alors une sous-variété de M, de codimension égale à la somme des codimensions de A et B.

4.2. Théorème de Sard lisse

Théorème 4.4. *Soit $f\colon M \to N$ une application entre variété. Presque tout point de N est valeur régulière de f.*

Remarque : comme partout dans ce cours, l'application f est implicitement supposée de classe C^∞. Le théorème reste vrai si f est de classe C^k avec $k \geq \max(\dim M - \dim N + 1, 1)$ mais il y a des contre-exemples en régularité plus basse, ce qui montre qu'il s'agit d'un phénomène assez subtil.

4.3. Théorème de transversalité de Thom

Le premier résultat crucial de cette section est un résultat de transversalité en famille : si une famille d'applications est transversale sur une sous-variété alors presque tous les membres de cette famille le sont. Cette observation pénétrante est due à René Thom.

Proposition 4.5. *Soit M et N et P des variétés et A une sous-variété de N. Si une application $F\colon M \times P \to N$ est transversale sur A alors, pour presque tout p dans P, $F_p := F(\cdot, p)$ est transversale sur A.*

Dans l'énoncé ci-dessus, P joue le rôle d'espace des paramètres et F est vu comme la famille des F_p.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du théorème de Sard et d'une observation d'algèbre linéaire triviale :

Lemme 4.6. *Soit E, F et G trois espaces vectoriels et $\pi : E \to F$ et $\pi' : E \to G$ deux applications linéaires. Si π et π' sont surjectives alors $\pi|_{\ker \pi'}$ est surjective si et seulement si $\pi'|_{\ker \pi}$ l'est.*

Démonstration. Vu la symétrie de la situation, il suffit de montrer une implication. Supposons que $\pi|_{\ker \pi'}$ est surjective. Soit g un élément de G. Par surjectivité de π', il existe e_0 vérifiant $\pi'(e_0) = g$. Comme $\pi|_{\ker \pi'}$ est surjective, il existe $e_1 \in \ker \pi'$ tel que $\pi(e_1) = \pi(e_0)$. L'élément $e := e_0 - e_1$ est dans $\ker \pi$ et vérifie $\pi'(e) = g$. $\square$

Soit ρ la projection de TN sur νA. Par hypothèse de transversalité, $\Sigma = F^{-1}(A)$ est une sous-variété de $M \times P$ et, pour tout σ dans Σ, $\pi := \rho \circ T_\sigma F : T_\sigma \Sigma \to \nu_{F(\sigma)} A$ est surjective. D'après le théorème de Sard, presque tout p dans P est valeur régulière de la restriction à Σ de la projection $\pi' : M \times P \to P$. Pour un tel p, $T_\sigma \pi' : T_\sigma \Sigma \to T_p P$ est surjective. Or $T_\sigma \Sigma = \ker \pi$ donc le lemme d'algèbre linéaire montre que F_p est transversale sur A. $\square$

Puisqu'un partie de mesure pleine est dense, la proposition précédante montre que, pour approcher une application $f : M \to N$ par une application transversale sur une sous-variété A, il suffit de l'inclure dans une famille transversale sur A. L'observation suivante est qu'il est fructeux d'être plus ambitieux et de chercher à inclure f dans une famille qui submerge N: si $F\colon M \times P \to N$ est une submersion alors F est transversale sur toute sous-variété $A \subset N$. En particulier le lemme suivant permet d'établir la densité des applications transversales. Il affirme qu'il existe une famille de difféomorphismes de N de dimension finie qui secoue N partout dans toutes les directions.

Lemme 4.7. *Pour toute variété compacte N, il existe un entier k et une application $\Phi\colon N \times \mathbb{R}^k \to N$ telle que $\Phi(\cdot, 0) = \mathrm{Id}_N$, chaque $\Phi(\cdot, p)$ est un difféomorphisme de N et, pour tout n dans N, $\Phi(n, \cdot)$ est une submersion.*

On en déduit immédiatement une version du théorème de transversalité de Thom :

Théorème 4.8. *Soit $f : M \to N$ une application entre variétés compactes et A une sous-variété de N. Il existe une famille de difféormorphismes φ_t de N, $t \in [0, 1]$ qui sont tous arbitrairement proches de l'identité (en norme C^r pour tout r) tels que $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ et $\varphi_1 \circ f$ est transversale sur A.*

Démonstration. Soit Φ l'application fournit par le lemme 4.7. On note $\Phi_s = \Phi(\cdot, s)$. L'application de $M \times \mathbb{R}^k$ dans N définie par $(m, s) \mapsto \Phi(f(x), s)$ est une submersion puisque, en tout (m, s), sa différentielle restreinte à $\{0\} \times T\mathbb{R}^k$ est déjà surjective. Ainsi cette application est transversale sur A et la proposition 4.5 assure que, pour presque tout s, $\Phi_s \circ f$ est transversale sur A. On pose alors $\varphi_t = \Phi_{ts}$ pour un s petit. □

Démonstration du lemme 4.7. L'idée consiste à empiler des translations dans toutes les directions dans des cartes de N. Soit $\{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^d\}$ un atlas fini de N et V_i des ouverts inclus dans l'intérieur des U_i qui recouvrent encore N. Soit $\lambda_i : U_i \to [0, 1]$ à support compact qui vaut un sur V_i. Sur chaque $\varphi_i(U_i)$ et pour chaque vecteur v dans $\mathbb{R}^d$ on considère le champ de vecteur tronqué $\lambda_i(\varphi_i^{-1}(x))v$. Il est à support compact, coïncide avec v sur $\varphi_i(V_i)$ et s'annule partout si v est nul. On note ψ_v son flot au temps 1. On remarque que, pour tout x dans V, la dérivée de $\psi_v(x)$ par rapport à v est l'identité puisque, pour v assez petit, $\psi_v(x) = x + v$. Par ailleurs ψ_v est à support dans $\varphi_i(U_i)$. On peut donc poser

$$\Phi^i \begin{pmatrix} N \times \mathbb{R}^d \to N \\ (n, u_i) \mapsto \varphi_i^{-1} \circ \psi_{u_i} \circ \varphi_i(x) \end{pmatrix}$$

puis $\Phi(n, (u_1, \dots, u_m)) = \Phi^m_{u_m} \circ \cdots \circ \Phi^1_{u_1}(n)$ où m est le nombre de cartes. Chaque Φ_u est un difféomorphisme comme composée de difféomorphismes et $\Phi_0 = \mathrm{Id}_N$. De plus chaque $\Phi(n, \cdot)$ est une submersion en l'origine car il existe i tel que V_i contienne n et la dérivée partielle de Φ en $(n, 0)$ par rapport à u_i est surjective (c'est la différentielle de φ_i^{-1} en $\varphi_i(n)$).

L'ensemble G des (n, u) tels que $\Phi(n, \cdot)$ soit une submersion en (n, u) est un ouvert de $N \times (\mathbb{R}^d)^m$. Donc, pour chaque n, il existe un ouvert O_n de N et un rayon $\varepsilon_n > 0$ tel que $O_n \times B(0, \varepsilon_n)$ soit inclus dans G. Par compacité de N, on peut recouvrir N par un nombre fini de O_{n_j} et $N \times B(0, \varepsilon)$ est dans G pour tout $\varepsilon \leq \min(\varepsilon_{n_j})$. Comme $B(0, \varepsilon)$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^k$, le lemme est démontré. □

Application aux fonctions de Morse (cours de François)

4.4. Théorie de l'intersection

Soit X une variété orientée et N une sous-variété orientée compacte sans bord de X. Soit M une variété orientée compacte sans bord et $f : M \to X$. On suppose que $\dim M + \dim N = \dim X$ et que f est transversale sur X. En particulier $f^{-1}(N)$ est un sous-ensemble fini de M. Pour chaque x dans cet ensemble, on a un isomorphisme $T_x f : T_x M \to \nu_{f(x)} N$. Comme X et N sont orientées, l'espace vectoriel $\nu_{f(x)} N$ est orienté. On pose $\#_x(f, N) = \pm 1$ selon que $T_x f$ préserve ou renverse l'orientation et :

$$\#(f, N) = \sum_{x \in f^{-1}(N)} \#_x(f, N).$$

On note immédiatement que $\#(f, N)$ change de signe si on change l'orientation d'un nombre impair de variétés parmi M, N et X.

Théorème 4.9. *Le nombre d'intersection est invariant par homotopie : si f et g sont deux applications de M dans X transversales sur N et homotopes alors $\#(f, N) = \#(g, N)$.*

En particulier, on peut définir $\#(f, N)$ pour une application non transversale sur N, comme $\#(g, N)$ pour n'importe quel g homotope à f et transversale sur N.

Le point crucial est que le nombre d'intersection est nul pour toute application qui s'étend à une variété compacte dont le bord est M :

Lemme 4.10. *Soit Y une variété compacte à bord et $f : Y \to X$. On suppose que $\dim \partial Y + \dim N = \dim X$ et que f et $f|_{\partial Y}$ sont toutes deux transversales sur N. Alors $\#(f|_{\partial Y}, N) = 0$.*

Démonstration. Les hypothèses de transversalité et de compacité assurent que $A = f^{-1}(N)$ est une sous-variété compacte de Y qui est transversale au bord de Y et dont le bord est exactement $A \cap \partial Y$. De plus les hypothèses de dimension assurent que A est de dimension 1. Ainsi A est constitué d'un nombre fini de cercles dans l'intérieur de Y et d'un nombre fini d'arcs reliant deux par deux les points de $f|_{\partial Y}^{-1}(N)$. De plus chaque arc est orienté et sort de Y à une extrémité tandis qu'il rentre à l'autre. Ceci entraîne que les deux extrémités contribuent à $\#(f|_{\partial Y}, N)$ avec des signes opposés. $\square$

Démonstration du théorème 4.9. L'hypothèse d'homotopie signifie qu'il existe une application continue $F : Y = M \times [0, 1] \to X$ telle que $F|_{M \times \{0\}} = f$ et $F|_{M \times \{1\}} = g$. Le théorème 3.5 permet de suppose que F est lisse (sans changer f et g). Le théorème de transversalité de Thom permet de supposer que F est transversale sur N, toujours sans changer f et g, ce qui assure $F|_{\partial Y}$ est elle aussi transversale sur N. Le lemme montre alors que $\#(F|_{\partial Y}, N) = 0$. Or l'orientation induite par $M \times [0, 1]$ sur M est l'orientation de départ sur $M \times \{1\}$ et l'orientation opposée sur $M \times \{1\}$. Ainsi $\#(F|_{\partial Y}, N) = \#(g, N) - \#(f, N)$ et le théorème est démontré. $\square$

Dans le cas particulier où f est l'inclusion d'une sous-variété orientée $M \subset X$, on note $\#(f, N) =: \#(M, N)$ et on l'appelle nombre d'intersection entre M et N. Si M et

N sont transversales alors la valeur absolue de $\#(M,N)$ est majorée par le nombre de points de $M \cap N$ mais, au contraire de ce dernier, $\#(M,N)$ est invariant par isotopie de M ou N.

Definition 4.11. *La caractéristique d'Euler d'une variété compacte sans bord est le nombre d'intersection $\#(M,M)$ où M est vue comme la section nulle de TM.*

Definition 4.12. *Soit M et N deux variétés connexes, compactes, sans bord et de même dimension. Le degré d'une application continue $f\colon M \to N$ est le nombre d'intersection $\#(f,\{n\})$ où n est un point quelconque de N.*

Ainsi, pour toute valeur régulière n de f, le degré de f est le nombre de pré-images de n comptées positivement (resp. négativement) là où f préserve (resp. renverse) l'orientation. Cependant il n'est pas complètement clair que ce nombre soit indépendant du choix de n.

Lemme 4.13. *Dans la définition 4.12, le nombre obtenu est indépendant du choix de n dans N.*

Démonstration. Soit n et n' deux points de N. Le théorème de transversalité permet de perturber f pour la rendre transversale sur n et n'.

Le point clef est alors qu'il existe une homotopie h_t de difféomorphismes de N entre l'identité et une difféomorphisme envoyant n sur n'. En effet, si on fixe n, l'ensemble des n' pour lesquels l'affirmation est vraie est ouvert et fermé (il suffit de démontrer l'affirmation lorsque N est une cube dans $\mathbb{R}^p$) et N est supposée connexe.

Ainsi, le théorème 4.9 donne $\#(f,n') = \#(h_1 \circ f, n')$. Mais ce dernier n'est autre que $\#(f,n)$ car h_1 est un difféomorphisme préservant l'orientation. $\square$

L'invariance des nombres d'intersection par homotopie entraîne immédiatement l'invariance du degré par homotopie.

4.5. Exercices

Whitney $2n+1$ (direct de puis Sard ?)
Montrer que $\#(M,N) = \pm\#(N,M)$ et expliciter le signe.
théorème de la boule chevelue via la caractéristique d'Euler.
degré d'un polynômede $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
d'Alembert-Gauss et Brouwer de dix façons.

5. Théorie de Morse

5.1. Fonctions de Morse

On commence par le célèbre « lemme de Morse ».

Théorème 5.1. *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction ayant un point critique non-dégénéré en l'origine : $df(0) = 0$ et $D^2 f(0)$ est non-dégénérée. Il existe un difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$f \circ \varphi(x_1, \cdots, x_n) = f(0) + x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2$$

où p est l'indice de $D^2 f(0)$.

Démonstration. Le lemme crucial est que l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur les formes bilinéaires symétriques admet des sections locales au voisinage de toute forme non-dégénérée.

Lemme 5.2. *Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et S l'espace des formes bilinéaires symétriques sur E. Toute forme b_0 dans S non-dégénérée admet un voisinage ouvert V et une application $P\colon V \to \mathrm{GL}(E)$ telle que, $b = b_0(P(b)\cdot, P(b)\cdot)$ pour tout b dans V.*

Démonstration. On pose $\varphi(P) = b_0(P(b)\cdot, P(b)\cdot)$. On dérive cette fonction en l'identité grâce au calcul :

$$\varphi(\mathrm{Id} + H) - \varphi(H) = b_0(H\cdot, \cdot) + b_0(\cdot, H\cdot) + b_0(H\cdot, H\cdot)$$

qui montre que $D\varphi(\mathrm{Id})(H) = b_0(H\cdot, \cdot) + b_0(\cdot, H\cdot)$. Le noyau de cette différentielle est constituée des endomorphismes b_0-antisymétriques tandis qu'elle induit un isomorphisme de l'espace F des endomorphismes b_0-symétriques sur S (il est surjectif car b_0 est supposée non-dégénérée). Le théorème d'inversion local appliqué à la restriction de φ à F fournit l'inverse P demandé. Comme $P(b_0) = \mathrm{Id}$ et que $\mathrm{GL}(E)$ est ouvert, on peut, quitte à restreindre V, supposer que $P(V)$ est contenu dans $\mathrm{GL}(E)$. □

On revient maintenant au lemme de Morse. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a $f(y) = f(0) + b(y)(y, y)$ où

$$b(y) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(ty)\, dt.$$

En particulier $b(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0)$ est non-dégénérée (et de même indice que $D^2 f(0)$). Le lemme précédant fournit alors une application P d'un voisinage de l'origine vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $b(y) = b(0)(P(y)\cdot, P(y)\cdot)$. Ainsi $f(y) = f(0) + b(0)(Q(y), Q(y))$ où $Q(y) =$

$P(y)y$. Comme la différentielle de Q en l'origine vaut $P(0)$ qui est inversible, il existe un difféomorphisme ψ entre voisinages de l'origine tel que $f(\psi(x)) = f(0) + b(0)(x, x)$. Par ailleurs le théorème d'inertie de Sylvester fournit une base dans laquelle $b(0)$ a la forme annoncée. La composée de ψ avec le changement de base correspondant donne le φ recherché. □

Lemme 5.3. *Une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est de Morse si et seulement si sa différentielle $df :\to T^*M$ est transversale sur la section nulle 0_M. Si x est d'indice i alors $\#_x(df, 0_M) = (-1)^i$.*

Densité des fonctions de Morse par Thom comme chez François.

Proposition 5.4. *L'ensemble des fonctions de Morse sur une variété compacte sans bord est un ouvert dense dans l'ensemble des fonctions de classe C^1. La somme alternée des nombres de points critique est la caractéristique d'Euler de M.*

5.2. Pseudo-gradients

5.2.1. Lemme de descente des valeurs critique

5.2.2. Lemme de modification des nappes

5.3. Scindements de Heegaard

5.4. Exercices

6. Formes différentielles et intégration

Faut-il inclure la dérivée de Lie quelque part ?

6.1. Formes différentielles

On veut des objets à intégrer sur les sous-variétés.

6.1.1. Applications multilinéaires

Application multilinéaires, alternées, antisymétrisation.

Definition 6.1. *le produit extérieur*

Definition 6.2. *le tiré en arrière ou l'image réciproque*

6.2. Intégration

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n_-$ et ω une n-forme à support compact dans U. Pour tout mesurable $A \subset U$, on définit $\int_A \omega$ comme l'intégrale sur A de la fonction $x \mapsto \omega(x)(e_1, \cdots, e_n)$ où les e_i sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Le lemme suivant, qui est une reformulation du théorème de changement de variable, justifie cette définition. Comme on va le voir, il permet l'intégration des formes différentielles sur les variétés.

Lemme 6.3. *Pour tout difféomorphisme préservant l'orientation $\varphi : U \to V$, toute n-forme ω sur V, et tout mesurable $A \subset U$, on a*

$$\int_A \varphi^* \omega = \int_{\varphi(A)} \omega.$$

Théorème 6.4. *Soit M une variété à bord orientée de dimension n. Il existe une unique forme linéaire sur $\Omega^n_c(M)$, notée $\int_M$, qui vérifie les propriétés suivantes :*

- *elle coïncide avec l'intégration définie ci-dessus quand M est un ouvert de $\mathbb{R}^n_-$*
- *pour toute difféomorphisme φ préservant l'orientation entre deux variétés orientées M et N, $\int_M \varphi^* \omega = \int_N \omega$.*

Démonstration. Soit $\{\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n_-\}$ un atlas orienté de M. Le théorème 3.1 fournit une partition de l'unité $(\rho_i)_i$ subordonnée au recouvrement U_i. On note $\psi_i = (\varphi_i)^{-1}$ et on pose, pour toute n-forme ω à support compact dans M:

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{V_i} \psi_i^*(\rho_i \omega). \tag{6.1}$$

On va montrer que le nombre ainsi définit ne dépend si du choix de l'atlas ni de celui de partition de l'unité.

Soit donc $\{\varphi'_i : U'_i \to V'_i\}$ un autre atlas orienté de M et ρ'_i une partition de l'unité subordonnée. Par définition, la réunion de ces deux atlas est encore un atlas orienté, donc pour tous i et j, le changement de carte $\theta_{ij} = \varphi'_j \circ (\varphi_i)^{-1}$ est un difféormophisme préservant l'orientation de $V_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U'_j)$ dans $V'_{ij} = \varphi'_i(U_i \cap U'_j)$. De plus on a $\Psi_i = \Psi'_j \circ \theta_{ij}$ sur V_{ij}.

On peut alors comparer les deux constructions de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\sum_i \int_{V_i} \Psi_i^*(\rho_i \omega) &= \sum_i \int_{V_i} \Psi_i^* \left(\sum_j \rho'_j \rho_i \omega \right) \\
&= \sum_{ij} \int_{V_{ij}} \Psi_i^* \left(\rho'_j \rho_i \omega \right) \\
&= \sum_{ij} \int_{V_{ij}} \theta_{ij}^* \left((\Psi'_j)^* (\rho'_j \rho_i \omega) \right) \\
&= \sum_{ij} \int_{V'_{ij}} (\Psi'_j)^* (\rho'_j \rho_i \omega) \\
&= \sum_{ij} \int_{V'_j} (\Psi'_j)^* (\rho'_j \rho_i \omega) \\
&= \sum_j \int_{V'_j} (\Psi'_j)^* \left(\sum_i \rho'_j \rho_i \omega \right) \\
&= \sum_j \int_{V'_j} (\Psi'_j)^* (\rho'_j \omega).
\end{aligned}$$

La formule de changement de variable découle de cette propriété par transport de structure. En effet, si φ est un difféomorphisme de M dans N alors tout atlas $\{\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n_-\}$ et partition de l'unité subordonnée $\{\rho_i\}$ sur M fournit un atlas $\{\varphi_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_i) \to V_i \subset \mathbb{R}^n_-\}$ et une partition de l'unité $\{\rho_i \circ \varphi^{-1}\}$ que l'on peut utiliser pour calculer $\int_N \omega$:

$$\int_M \varphi^* \omega = \sum_i \int_{V_i} \psi_i^*(\rho_i \varphi^* \omega) = \sum_i \int_{V_i} (\varphi \circ \psi_i)^* (\rho_i \circ \varphi^{-1} \omega) = \int_N \omega.$$

Le fait qu'on retrouve l'intégration définie sur $\mathbb{R}^n_-$ est aussi une conséquence de la construction : il suffit de choisir l'atlas tautologique.

L'unicité est claire car les conditions demandées imposent la validité de l'équation 6.1 de départ. $\square$

6.3. Dérivée extérieure et formule de Stokes

6.3.1. Dérivée extérieure sur un espace affine

Dans cette section on travaille sur un espace affine (réel) $\mathcal{E}$ de direction E et de dimension n. À tout point x de $\mathcal{E}$ et tout p-uplet de vecteurs $v = (v_1, \cdots, v_p) \in E^p$, on associe le parallélotope

$$P(x; v) = \left\{x + \sum \lambda_i v_i \; ; \; \lambda_i \in [0,1]\right\}.$$

Les constructions de la section 6.2 ne permettent pas vraiment d'intégrer sur $P(x;v)$ (à cause des coins, et des dégénérescence qui arrivent lorsque la famille v n'est pas libre). On définit donc l'intégrale d'une p-forme sur $P(x;v)$ comme l'intégrale sur $[0,1]^p$, de la forme tirée en arrière par $\varphi_P : \lambda \mapsto x + \sum \lambda_i v_i$, qui est défini sur un voisinage ouvert de $[0,1]^p$.

De même on définit, pour tout $(p-1)$-forme ω :

$$\int_{\partial P(x;v)} \omega = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{p+1} \left(\int_{\{t_i=1\}} \varphi_P^* \omega - \int_{\{t_i=0\}} \varphi_P^* \omega \right).$$

Théorème 6.5. *Soit ω une forme différentielle de degré $p-1$ sur un ouvert U de $\mathcal{E}$. Pour tout x dans U et tout p-uplet de vecteurs $v = (v_1, \cdots, v_p) \in E^p$, la limite suivante existe :*

$$d\omega(x)(v_1, \cdots, v_p) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ y \to x}} \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\partial P(y;\varepsilon v)} \omega.$$

De plus $d\omega$ est une forme différentielle de degré p sur U. Pour tout repère sur $\mathcal{E}$, on peut écrire $\omega = \sum \omega_I dx_I$ et on a alors :

$$d\omega = \sum d\omega_I \wedge dx_I.$$

Démonstration. On note $P = P(y;v)$ et $P_\varepsilon = P(y, \varepsilon v)$. On écrit la forme $\varphi_P^* \omega$ en coordonnées : $\varphi_P^* \omega = \sum_i a_i^y(t) dt_{I_i}$ où $I_i = (1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, p)$ et chaque a_i^y est une fonction de $[0,1]^p$ dans $\mathbb{R}$ qui dépend de y.

On alors $\varphi_{P_\varepsilon}^* \omega = \varepsilon^p \sum_i a_i^y(\varepsilon t) dt_{I_i}$ et on calcule

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\partial P(y;\varepsilon v)} \omega &= \sum_i (-1)^{p+1} \left(\int_{[0,1]^{p-1}} a_i^y(\varepsilon t)_{t_i=1} \, dt_{I_i} - \int_{[0,1]^{p-1}} a_i^y(\varepsilon t)_{t_i=0} \, dt_{I_i} \right) \\
&= \sum_i (-1)^{p+1} \int_{[0,1]^{p-1}} \partial_i a_i^y(\varepsilon t)_{t_i = t_i^*} \, dt_{I_i}
\end{aligned}$$

où t_i^* est fournit par le théorème des accroissements finis (en dimension 1). On peut passer à la limite sous l'intégrale (le domaine d'intégration est compact et tout est uniformément continu) pour trouver

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ y \to x}} \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\partial P(y;\varepsilon v)} \omega = \sum_i (-1)^{p+1} \partial_i a_i^x(0). \tag{6.2}$$

On a donc démontré l'existence de la limite. Pour montrer qu'on a définit une p-forme, on montre la formule en coordonnées.

On note provisoirement d' l'opérateur définit sur $\Omega^k\mathbb{R}^n$ par $d'(\sum \omega_I dx_I) = \sum d\omega_I \wedge dx_I$. On vérifie facilement que, pour toute application $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $d'(f^*\omega) = f^*d'\omega$.

On remarque que le membre de droite de l'équation 6.2 est la valeur de $\sum da_i^x \wedge dt_{I_i}(0)(\partial_{t_1}, \cdots, \partial_{t_p})$. Le calcul se poursuit alors en :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ y\to x}} \frac{1}{\varepsilon^p}\int_{\partial P(y;\varepsilon v)} \omega &= d'(\varphi_P^*\omega)(\partial_{t_1}, \cdots, \partial_{t_p})\\ &= \varphi_P^* d'\omega(\partial_{t_1}, \cdots, \partial_{t_p})\\ &= d'\omega((\varphi_P)_*\partial_{t_1}, \cdots, (\varphi_P)_*\partial_{t_p})\\ &= d'\omega(v_1, \cdots, v_p).\end{aligned}$$

On a donc l'égalité annoncée entre $d\omega(x)(v_1, \cdots, v_p)$ et $d'\omega(x)(v_1, \cdots, v_p)$. Or $d'\omega$ est manifestement une p-forme, donc le théorème est démontré. □

Comme dans le cas de la dimension 1, la clef de voute du lien entre intégration et dérivation est le théorème des accroissements finis.

Lemme 6.6. *Pour tout parallélotope $P = P(x; v)$ et toute $(p-1)$-forme ω sur P, il existe un point c dans P tel que*

$$d\omega(c)(v_1, \cdots, v_p) = \int_{\partial P} \omega.$$

Démonstration. L'idée est de se ramener à une suite de parallélotopes de plus en plus petits qui convergent vers le point c recherché.

Sous-lemme 6.7. *Pour tout parallélotope $P = P(x; v)$ et toute $(p-1)$-forme ω sur P, il existe x' dans P tel que le parallélotope $P' = P(x', v/2)$ soit inclus dans P et vérifie*

$$\int_{\partial P} \omega = 2^p \int_{\partial P'} \omega.$$

Démonstration. On découpe P en 2^p parallélotopes dont les vecteurs directeurs sont les $v_i/2$. Plus précisément, à chaque ε dans $\{0,1\}^p$, on associe $x_\varepsilon = x + \sum \varepsilon_i v_i/2$ et le parallélotope $P_\varepsilon = P(x_\varepsilon; v/2)$. On a $\int_{\partial P} \omega = \sum \int_{\partial P_\varepsilon} \omega$ qui est la moyenne des $2^p \int_{\partial P_\varepsilon} \omega$. Si aucun des x_ε ne convient il existe ε_0 et ε_1 tels que

$$2^p \int_{\partial P_{\varepsilon_0}} \omega < \int_{\partial P} \omega \quad \text{et} \quad 2^p \int_{\partial P_{\varepsilon_1}} \omega > \int_{\partial P} \omega.$$

On pose alors $x_t = (1-t)x_{\varepsilon_0} + t x_{\varepsilon_1}$ pour $t \in [0,1]$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un t tel que $x' = x_t$ convient. □

Le sous-lemme précédant fournit par récurrence une suite x_k de points de P et des parallélotopes $P_k = P(x_k; 2^{-k}v)$ inclus dans P et vérifiant $\int_{\partial P} \omega = 2^{kp} \int_{\partial P_k} \omega$. On note c le point limite des P_k (fournit par le théorème des fermés emboîtés). En posant $\varepsilon_k = 2^{-k}$, qui tend vers zéro, on a

$$\int_{\partial P} \omega = \lim_k \frac{1}{\varepsilon_k^p} \int_{\partial P(x_k;\varepsilon_k v)} \omega = d\omega(c)(v_1, \cdots, v_p). \qquad \square$$

Le premier corollaire du théorème des accroissements finis est la formule de Stokes sur un parallélotope.

Corollaire 6.8. *Pour toute $p-1$ forme ω sur un ouvert de $\mathcal{E}$ et tout parallélotope P dans U:*

$$\int_P d\omega = \int_{\partial P} \omega.$$

Démonstration. Par définition de l'intégration de $d\omega$, pour toute suite de partitions $P = P_1^i \cup \cdots \cup P_{n_i}^i$ de P et de points $x_j^i \in P_j^i$, on a $\int_P d\omega = \lim_i \sum_j |P_j^i| \, d\omega(x_j^i)(v_1, \cdots, v_p)$. Si on choisit pour x_j^i les points fournis par le théorème des accroissements finis, on trouve $\int_P d\omega = \lim_i \sum_j \int_{\partial P_j^i} \omega = \lim_i \int_{\partial P} \omega$. $\square$

La preuve ci-dessus demande des clarifications sur les sommes de Riemann.

La formule de Stokes sera étendue aux variétés à bord et à coins dans la section suivante mais on peut déjà en déduire le corollaire suivant.

Corollaire 6.9. $d \circ d = 0$.

Démonstration. Pour toute forme de degré $p-1$ et tous vecteurs v_1, ..., v_{p+1}.

$$\begin{aligned} dd\omega(x)(v_1, \cdots, v_{p+1}) &= \lim_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^{p+1}} \int_{\partial P(x,\varepsilon v)} d\omega \\ &= \lim_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^{p+1}} \int_{\partial\partial P(x,\varepsilon v)} \omega \\ &= 0. \end{aligned}$$

où la première égalité provient de la définition de la dérivée extérieure tandis que la deuxième provient de la formule de Stokes. $\square$

tiré en arrière

6.3.2. Dérivée extérieure sur une variété

définition

theorème de Stoke général (forme différentiel lisse de degré maximal sur une variété à bord).

6.4. Exercices

Exercice 6.1. *Soit M une variété orientée et $\bar{M}$ la même variété munie de l'orientation opposée. Montrer que, pour toute forme ω à support compact et de degré maximal sur M, $\int_{\bar{M}} \omega = -\int_M \omega$.*

Théorème de la boule chevelue et de Brouwer suivant Lafontaine.

7. Cohomologie de de Rham

7.1. Rudiments d'algèbre homologique

Dans cette section, R désigne un anneau commutatif unitaire fixé. En pratique dans ce cours, on aura besoin uniquement des cas $R = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$. On rappelle qu'un R-module est l'analogue d'un K-espace vectoriel, cette dernière terminologie étant réservée aux corps.

Definition 7.1. *Un complexe de R-modules est paire (C, d) pù C est une suite $(C^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de R-modules équipée d'une suite d'opérateurs linéaires $d_i : C^i \to C^{i+1}$ vérifiant $d_i \circ d_{i-1} = 0$ pour tout i.*

La cohomologie d'un complexe (C, d) est la famille de R-modules $H^i(C, d) = \ker d_i / \operatorname{im} d_{i-1}$.

On note immédiatement que la condition $d_i \circ d_{i-1} = 0$ est équivalente à $\operatorname{im} d_{i-1} \subset \ker d_i$, de sorte que la définition de la cohomologie a bien un sens.

Un *morphisme de complexes* f entre deux complexes (C, d) et (C', d') est une famille d'applications linéaires $f_i : C^i \to (C')^i$ vérifiant $f_i \circ d_{i-1} = d'_{i-1} \circ f_{i-1}$ pour tout i, *i.e.* le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{i-2}"] & C^{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, "f_{i-1}"] & C^i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d'_{i-2}"] & (C')^{i-1} \arrow[r, "d'_{i-1}"] & (C')^i \arrow[r, "d'_i"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Cette condition implique immédiatement que f passe au quotient en famille d'applications de $H^i(C, d)$ dans $H^i(C', d')$.

Une *homotopie entre morphismes de complexes* f et g est une famille d'applications linéaires $h_i : C^i \to (C')^{i-1}$ vérifiant $f_i = g_i + d_{i-1} \circ h_i + h_{i+1} \circ d_i$. Les morphismes intervenant dans cette égalité apparaissent sur le diagramme suivant, qui n'est pas commutatif :

$$\begin{tikzcd}
C^{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] & C^i \arrow[r, "d_i"] \arrow[dl, "h_i"'] \arrow[d, shift right, "f_i"'] \arrow[d, shift left, "g_i"] & C^{i+1} \arrow[dl, "h_{i+1}"] \\
(C')^{i-1} \arrow[r, "d'_{i-1}"'] & (C')^i \arrow[r, "d'_i"'] & (C')^{i+1}
\end{tikzcd}$$

On dit que f et g sont homotopes s'il existe une homotopie entre eux.

Lemme 7.2. *Deux morphismes de complexes homotopes induisent la même application en cohomologie.*

7.2. Cohomologie de de Rham

On a vu que la dérivée extérieure envoie les p-formes sur les $(p+1)$-formes et que son carré est nul.

Definition 7.3. *La cohomologie de de Rham $H^*_{dR}(M)$ d'une variété M est la cohomologie du complexe $C^i = \Omega^i(M)$, muni de la dérivée extérieure.*

La formule de naturalité, $f^* \circ d = d \circ f^*$, montre que toute application $f : M \to N$ entre variétés induit un morphisme de complexes de de Rham $f^* : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$, et donc un morphisme entre les cohomologie de de Rham $f^* : H^*_{dR}(N) \to H^*_{dR}(M)$. Ces morphismes sont évidemment compatibles avec la composition des applications entre variétés. Ainsi chaque H^i_{dR} est un foncteur de $\mathbf{Man}^{op}$ dans $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$.

Théorème 7.4. *Si $f, g \colon M \to N$ sont homotopes alors les morphismes qu'ils induisent en cohomologie de de Rham le sont aussi. En particulier f et g induisent la même application en cohomologie.*

La démonstration de ce théorème passe par l'étude des formes différentielles sur un produit $W = M \times [0,1]$. Toute p-forme ω sur W s'écrit de façon unique $\omega = \omega_t + dt \wedge \alpha_t$ où chaque ω_t est une p-forme sur M et chaque α_t est une $(p-1)$-forme sur M.

Lemme 7.5. *Pour toute p-forme $\omega = \omega_t + dt \wedge \alpha_t$ sur $M \times [0,1]$, on a :*

$$\omega_1 - \omega_0 = d\left(\int_0^1 \partial_t \lrcorner\, \omega\right) + \int_0^1 \partial_t \lrcorner\, d\omega$$

7.3. Exercices

Lien entre fibrés en droites et classes de cohomologie entière (Le Llagonne).
Cohomologie des groupes de Lie compact et formes invariantes ?

8. Suite de Mayer-Vietoris

8.1. Suites exactes courtes et longues

Lien entre court et long, lemme des cinq.

8.2. Suite exacte de Mayer-Vietoris

cohomologie de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}^n$.

8.3. Exercices

A. Rappels de topologie

Definition A.1. *espace topologique*

Definition A.2. *séparé, paracompact*

Proposition A.3. *Un espace topologique séparé paracompact est métrisable.*

Topologie induite, Topologie produit, Topologie quotient

B. Rappels de calcul différentiel

B.1. Espaces affines

B.2. Applications différentiables entre espaces affines

B.3. L'inversion locale et ses avatars

C. Équations différentielles

Cauchy-Lipschitz

Théorème de la variété stable ? Par vraiment nécessaire dans le cas d'un gradient contrôlé en carte de Morse.

Glossaire

Diff(X) groupe des difféomorphismes de X. 3, 4, 7, 8

Index