ERRATUM À « ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À POINTS SINGULIERS IRRÉGULIERS ET PHÉNOMÈNE DE STOKES EN DIMENSION 2 »

par

Claude Sabbah

1. La démonstration du théorème II.1.2.1 énoncé page 45 contient l'erreur suivante : en haut de la page 47, il est indiqué que γ est une section de $\mathcal{E}_X$, alors que ce n'est qu'une section de $\mathcal{E}_{\widetilde{X}}$.

Il faut remplacer les énoncés II.1.2.1 et II.1.2.2 par :

Théorème 1.2.1. — *Soient $y_1, \dots, y_r$ de nouvelles variables. Alors l'image de $H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{GL}_d^{<D}(\mathcal{A}_{\widetilde{X}}\,[\![y_1, \dots, y_r]\!])\big) \to H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\widetilde{X}}\,[\![y_1, \dots, y_r]\!])\big)$ est l'identité.*

(Le faisceau $\mathcal{A}_{\widetilde{X}}\,[\![y_1, \dots, y_r]\!]$ a été introduit en II.(1.1.12).)

Corollaire 1.2.2. — *L'image de $H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{GL}_d^{<D}(\mathcal{A}_{\widetilde{X}})\big) \to H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\widetilde{X}})\big)$ est l'identité.*

Démonstration du théorème II.1.2.1. — C'est la même que celle donnée aux pages 46–47. Nous indiquons ici les petites modifications qu'il faut apporter.

Il faut utiliser le lemme II.1.2.4 sous la forme

Lemme 1.2.4. — *On a $H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{GL}_d^{<D}(\mathcal{E}_{\widetilde{X}}\,[\![y_1, \dots, y_r]\!])\big) = 0$.*

On peut maintenant raisonner comme dans [**41**, Appendice]. Soit α une classe dans $H^1(\pi^{-1}(0), \mathrm{GL}_d^{<D}(\mathcal{A}_{\widetilde{X}}\,[\![y_1, \dots, y_r]\!]))$ représentée par un cocycle (α_{ij}) sur un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)$. D'après le lemme précédent, on a $H^1\big(\mathcal{U}, \mathrm{GL}_d^{<D}(\mathcal{E}_{\widetilde{X}}\,[\![y_1, \dots, y_r]\!])\big) = 0$ pour tout recouvrement $\mathcal{U}$ de $\pi^{-1}(0)$, et par suite on a $\alpha_{ij} = \beta_i^{-1}\beta_j$, où β_i est une section sur U_i de $\mathrm{GL}_d^{<D}(\mathcal{E}_{\widetilde{X}}\,[\![y_1, \dots, y_r]\!])$.

L'opérateur $\overline{\partial}$ (relativement aux variables x) est bien défini sur $\mathcal{P}_{\widetilde{X}}^{<D}\,[\![y_1, \dots, y_r]\!]$. On pose

$$\gamma_i = \overline{\partial}\beta_i \cdot \beta_i^{-1}.$$

Alors $\gamma_i = \gamma_j$ sur $U_i \cap U_j$ et les γ_i définissent une matrice γ de 1-formes à coefficients dans $\mathcal{P}^{<D}_{\widetilde{X}}[\![y_1,\dots,y_r]\!]$, et de type $(0,1)$. De plus, les γ_i (donc γ) satisfont

$$\overline{\partial}\gamma_i + \gamma_i \wedge \gamma_i = 0$$

puisque cette égalité est déjà satisfaite hors de $\pi^{-1}(D)$.

Lemme. — *Il existe, au voisinage de $0 \in X$, une section φ de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{E}_X[\![y_1,\dots,y_r]\!])$ satisfaisant $\overline{\partial}\varphi = -\varphi\cdot\gamma$ et φ inversible au voisinage de 0.*

Démonstration. — C'est une variante du théorème 1 de [**37**, Chap. X].

On commence montrer l'existence de φ_1 telle que $\partial\varphi_1/\partial\overline{x}_1 = -\varphi_1\cdot\gamma$ et φ_1 inversible au voisinage de 0. Pour cela, à l'aide de Borel-Ritt, relevons γ en $\widetilde{\gamma}$, qui est aussi C^∞ par rapport à $y_1,\dots,y_r$. On résout $\partial\widetilde{\varphi}_1/\partial\overline{x}_1 = -\widetilde{\varphi}_1\cdot\widetilde{\gamma}$ comme dans le théorème 1 de [**37**, Chap. IX], puis on en déduit une égalité pour les développements de Taylor par rapport à $y_1,\dots,y_r,\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_r$; enfin, puisque le développement de Taylor de $\widetilde{\gamma}$ ne dépend pas des $\overline{y}_j$, on prend pour φ_1 la partie du développement de Taylor de $\widetilde{\varphi}_1$ qui ne dépend pas des $\overline{y}_j$.

Pour terminer, on raisonne comme dans la preuve de [**37**, Chap. X]. □

Alors pour tout i on a $\overline{\partial}(\varphi\beta_i) = 0$, de sorte que $\varphi\beta_i$ est une section sur U_i de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\widetilde{X}}[\![y_1,\dots,y_r]\!])$ et $\alpha_{ij} = (\varphi\beta_i)^{-1}\cdot(\varphi\beta_j)$, autrement dit l'image de α dans $H^1(\mathcal{U},\mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\widetilde{X}}[\![y_1,\dots,y_r]\!]))$ est l'identité. □

2. L'énoncé du théorème II.2.2.2 est incomplet. Sa démonstration, qui utilisait la version erronée du théorème II.1.2.1 doit être modifiée.

Si D a deux composantes D_i, $i=1,2$, notons $\pi_i : \widetilde{X}_i \to X$ l'éclatement réel de D_i dans X et $p_i : \widetilde{X} \to \widetilde{X}_i$ l'application naturelle. Commençons par un lemme.

Lemme. — *Le faisceau $\mathrm{Aut}^{<Y}_{\mathcal{D}_{\widehat{\widetilde{X}|D_2}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}}_{\widehat{\widetilde{X}|D_2}})$ est l'image inverse faisceautique, par p_1, du faisceau $\mathrm{Aut}^{<Y}_{\mathcal{D}_{\widehat{\widetilde{X}_1|D_2}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}}_{\widehat{\widetilde{X}_1|D_2}})$.*

Démonstration. — Le modèle élémentaire s'écrit $\mathcal{M}^{\text{él}} = \oplus_{\alpha\in A}(\mathcal{E}^{\varphi_\alpha}\otimes\mathcal{R}^\alpha)$. Pour chaque $\alpha\in A$, écrivons $\mathcal{R}^\alpha$ sous la forme $\mathcal{O}_X[*D]\otimes_{\mathbf{C}} V^\alpha$, où V^α est un espace vectoriel de dimension finie muni d'endomorphismes δ_1^α et δ_2^α qui commutent et *dont les valeurs propres ont une partie réelle dans* $[0,1[$ (ceci est toujours possible), et la connexion sur $\mathcal{O}_X[*D]\otimes_{\mathbf{C}} V^\alpha$ est définie comme au § I.2.1.1. Fixons une $\mathbf{C}$-base de V^α. Alors les sections de $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\widetilde{X}}[*D]}(\mathcal{R}^\alpha_{\widetilde{X}},\mathcal{R}^\beta_{\widetilde{X}})$, sur un ouvert U simplement connexe, ont une matrice de la forme $x_1^{-\delta_1^\beta}x_2^{-\delta_2^\beta}C_Ux_1^{\delta_1^\alpha}x_2^{\delta_2^\beta}$, où C_U est une matrice constante qui dépend du choix d'une détermination de $\log x_1$ et $\log x_2$ sur U. De même, les sections de $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\widehat{\widetilde{X}|D_2}}[*D]}(\mathcal{R}^\alpha_{\widehat{\widetilde{X}|D_2}},\mathcal{R}^\beta_{\widehat{\widetilde{X}|D_2}})$ ont une matrice de la forme $x_1^{-\delta_1^\beta}C_Ux_1^{\delta_1^\alpha}$, où C_U de dépend que du choix de la détermination de $\log x_1$ sur U, pas celle de x_2. Par conséquent, les sections sur U de $\mathrm{Aut}^{<Y}_{\mathcal{D}_{\widehat{\widetilde{X}|D_2}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}}_{\widehat{\widetilde{X}|D_2}})$ ont pour composante (α,β),

$\alpha \neq \beta$, une matrice de la forme $e^{\varphi_\alpha - \varphi_\beta} x_1^{-\delta_1^\beta} C_U x_1^{\delta_1^\alpha}$ si d'une part $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ n'a de pôle que le long de D_1 et d'autre part l'exponentielle est à décroissance rapide sur U, et 0 sinon. Toutes ces conditions ne dépendent que du comportement sur la projection U_1 de U par p_1. On en déduit l'assertion. □

On a bien sûr le même énoncé en échangeant D_1 et D_2. Notons que, si $\mathcal{F}$ est un faisceau en groupes sur $\pi_1^{-1}(0)$, alors on a une application naturelle $H^1(\pi_1^{-1}(0), \mathcal{F}) \to H^1(\pi^{-1}(0), p_1^{-1}\mathcal{F})$, en considérant les recouvrements $p_1^{-1}(\mathcal{U})$.

Théorème II.2.2.2. — *Le sous-ensemble de* $H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{Aut}^{<Y}_{\mathcal{D}_{\widetilde{X}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}}_{\widetilde{X}})\big)$ *formé des cocycles* λ *qui satisfont de plus, lorsque* D *a deux composantes, la propriété suivante :*

– pour $i, j = 1, 2$ *et* $i \neq j$*, l'image de* λ *dans* $H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{Aut}^{<Y}_{\mathcal{D}_{\widehat{\widetilde{X}|D_i}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}}_{\widehat{\widetilde{X}|D_i}})\big)$ *appartient à l'image de* $H^1\big(\pi_j^{-1}(0), \mathrm{Aut}^{<Y}_{\mathcal{D}_{\widehat{\widetilde{X}_j|D_i}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}}_{\widehat{\widetilde{X}_j|D_i}})\big)$,

classifie les couples $(\mathcal{M}, \widehat{f})$ *à équivalence près.*

Nécessité. — Si $(\mathcal{M}, \widehat{f})$ induit λ, alors $(\mathcal{M}_{\widehat{X|D_i}}, \widehat{f})$ induit l'image de λ dans $H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{Aut}^{<Y}_{\mathcal{D}_{\widehat{\widetilde{X}|D_i}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}}_{\widehat{\widetilde{X}|D_i}})\big)$. Mais $(\mathcal{M}_{\widehat{X|D_i}}, \widehat{f})$ est défini par une classe dans $H^1\big(\pi_j^{-1}(0), \mathrm{Aut}^{<Y}_{\mathcal{D}_{\widehat{\widetilde{X}_j|D_i}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}}_{\widehat{\widetilde{X}_j|D_i}})\big)$. □

Injectivité. — Démonstration analogue à celle en dimension 1.

Surjectivité si $\dim Y = 1$. — La démonstration est donnée en II.2.2.4.

Surjectivité si $\dim Y = 0$. — Rappelons que le modèle élémentaire s'écrit $\mathcal{M}^{\text{él}} = \oplus_{\alpha \in A}(\mathcal{E}^{\varphi_\alpha} \otimes \mathcal{R}^\alpha)$. La condition (B) implique que l'on peut décomposer l'ensemble A en une réunion finie disjointe d'ensembles A_μ ($\mu \in M$) de sorte que les propriétés suivantes soient satisfaites :

(1) le support du diviseur polaire de φ_α ne dépend pas de $\alpha \in A_\mu$,

(2) le support du diviseur polaire de $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ ne dépend pas de $\alpha, \beta \in A_\mu$ si $\alpha \neq \beta$,

(3) si $\mu \neq \nu$, si $\alpha \in A_\mu$ et $\beta \in A_\nu$, alors $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ a un pôle le long de chaque composante de D.

En effet, Si $\alpha \neq \beta$, $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ est non nul dans $\mathcal{O}_{X,0}[*D]/\mathcal{O}_{X,0}$. De plus, de la condition (B) on déduit que si $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ n'a de pôle que le long de D_1, alors $\varphi_\beta - \varphi_\gamma$ ne peut avoir de pôle uniquement le long de D_2, et ce quel que soit $\gamma \in A$, $\gamma \neq \alpha, \beta$, sinon le diviseur de $\varphi_\alpha - \varphi_\gamma$ n'est pas à support dans D et $\leqslant 0$. Ainsi la relation définie par « $\alpha \sim \beta$ si $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ a un pôle sur au plus une composante de D » est une relation d'équivalence sur A. On note M l'ensemble des classes d'équivalence et $(A_\mu)_{\mu \in M}$ la partition de A associée. Ainsi les conditions (2) et (3) ci-dessus sont satisfaites. Montrons (1) : si $\alpha \neq \beta$ sont deux éléments de A_μ, alors $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ n'a de pôle que le long d'une composante de D, disons D_1 ; par le même argument que ci-dessus, φ_α ne peut avoir de pôle le long de D_2 uniquement ; si φ_α a un pôle le long de D_1 et D_2, alors φ_β aussi ; si φ_α n'a de pôle que le long de D_1, alors φ_β aussi.

L'ensemble fini M se décompose en réunion disjointe $M_1 \cup M_2 \cup M'$, où

$$\mu \in M' \Leftrightarrow \# A_\mu = 1 \quad \text{et} \quad \mu \in M_i \Leftrightarrow \exists\, \alpha \neq \beta \in A_\mu,\ \varphi_\alpha - \varphi_\beta \text{ à pôle le long de } D_i.$$

De même, le cocycle $\lambda \in H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{Aut}^{<Y}_{\mathcal{D}_{\widetilde{X}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}}_{\widetilde{X}})\big)$ se décompose en blocs $\lambda^{\mu\nu}$ paramétrés par $\mu, \nu \in M$. Notons $\mathcal{U}$ un recouvrement de $\pi^{-1}(0)$ adapté à λ, et $\lambda_{k\ell}$ la composante de λ sur $U_k \cap U_\ell$. Avec des notations évidentes, on a :

– pour $\mu \neq \nu$, $\lambda^{\mu\nu}_{k\ell}$ est une section sur $U_k \cap U_\ell$ de $\mathrm{Hom}^{<D}_{\mathcal{D}_{\widetilde{X}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él},\mu}_{\widetilde{X}}, \mathcal{M}^{\text{él},\nu}_{\widetilde{X}})$,

– pour $\mu \in M'$, $\lambda^{\mu\mu}_{k\ell} \in \mathrm{Aut}^{<D}_{\mathcal{D}_{\widetilde{X}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él},\mu}_{\widetilde{X}})$,

– pour $\mu \in M_i$ $(i = 1, 2)$, $\lambda^{\mu\mu}_{k\ell}$ est une section sur $U_k \cap U_\ell$ de $\mathrm{Aut}^{<D_i}_{\mathcal{D}_{\widetilde{X}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él},\mu}_{\widetilde{X}})$.

De ce fait, les blocs $\lambda^{\mu\nu}$ avec $\mu \neq \nu$ ont pour image 0 dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\widehat{\widetilde{X}|D_i}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él},\mu}_{\widehat{\widetilde{X}|D_i}}, \mathcal{M}^{\text{él},\nu}_{\widehat{\widetilde{X}|D_i}})$ $(i = 1, 2)$ et les blocs $\lambda^{\mu\mu}$ avec $\mu \in M_i$ $(i = 1, 2)$ ont pour image l'identité dans $\mathrm{End}_{\mathcal{D}_{\widehat{\widetilde{X}|D_i}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él},\mu}_{\widehat{\widetilde{X}|D_i}})$. Par ailleurs, pour tout $\mu \in M$, $\lambda^{\mu\mu}$ est un cocycle dans $H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{Aut}^{<Y}_{\mathcal{D}_{\widetilde{X}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él},\mu}_{\widetilde{X}})\big)$.

Lemme. — *Pour tout $\mu \in M$, le cocycle $\lambda^{\mu\mu}$ se trivialise dans l'ensemble $H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{Aut}_{\mathcal{A}_{\widetilde{X}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él},\mu}_{\widetilde{X}})\big)$.*

Démonstration. — Pour $\mu \in M'$, cela résulte du corollaire II.1.2.2 (sous la forme corrigée donnée plus haut). Soit $\mu \in M_1$ (l'autre cas se traite de même). Notons $\widehat{\lambda}^{\mu\mu}$ l'image de $\lambda^{\mu\mu}$ dans $H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{Aut}^{<Y}_{\mathcal{D}_{\widehat{\widetilde{X}|D_2}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él},\mu}_{\widehat{\widetilde{X}|D_2}})\big)$ (si on remplace D_1 par D_2, on obtient l'identité). Notons que l'image de λ dans $H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{Aut}^{<Y}_{\mathcal{D}_{\widehat{\widetilde{X}|D_2}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}}_{\widehat{\widetilde{X}|D_2}})\big)$ a pour uniques blocs non triviaux les $\widehat{\lambda}^{\mu\mu}$ pour $\mu \in M_1$. L'hypothèse du théorème implique donc que $\widehat{\lambda}^{\mu\mu}$ appartient à l'image de

$$H^1\big(\pi_1^{-1}(0), \mathrm{Aut}^{<Y}_{\mathcal{D}_{\widehat{\widetilde{X}_1|D_2}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él},\mu}_{\widehat{\widetilde{X}_1|D_2}})\big) = H^1\big(\pi_1^{-1}(0), \mathrm{Aut}^{<D_1}_{\mathcal{D}_{\widehat{\widetilde{X}_1|D_2}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él},\mu}_{\widehat{\widetilde{X}_1|D_2}})\big).$$

Considérons une base de $\mathcal{M}^{\text{él}}$ comme dans la démonstration du lemme précédent l'énoncé de II.2.2.2 ci-dessus. Alors, pour tous k, ℓ et tout $\mu \in M_1$, la matrice de $\widehat{\lambda}^{\mu\mu}$ dans cette base est à éléments dans $\mathrm{GL}^{<D_1}_{d_\mu}(\mathcal{A}_{\widehat{\widetilde{X}_1|D_2}})$. Remarquons que $\mathcal{A}_{\widehat{\widetilde{X}_1|D_2}} = \mathcal{A}_{\widetilde{D}_1}[\![x_1]\!]$. Alors, d'après le théorème II.1.2.1 corrigé plus haut, $\widehat{\lambda}^{\mu\mu}$ se trivialise dans $H^1\big(\pi_1^{-1}(0), \mathrm{GL}_{d_\mu}(\mathcal{A}_{\widehat{\widetilde{X}_1|D_2}})\big)$. On peut donc écrire $\widehat{\lambda}^{\mu\mu}_{k\ell} = (\widehat{g}^{\mu\mu}_k)^{-1}\widehat{g}^{\mu\mu}_\ell$. Relevons $\widehat{g}^{\mu\mu}_k$ en une section $g^{\mu\mu}_k$ de $\mathrm{GL}_{d_\mu}(\mathcal{A}_{\widetilde{X}_1})$, par Borel-Ritt (proposition II.1.1.16) et considérons le cocycle $g^{\mu\mu}_k \lambda^{\mu\mu}_{k\ell} (g^{\mu\mu}_\ell)^{-1}$. Il reste asymptotique à Id le long de D_1, mais est aussi asymptotique à Id le long de D_2. C'est donc un cocycle de $H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{Aut}^{<D}_{\mathcal{D}_{\widetilde{X}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él},\mu}_{\widetilde{X}})\big)$, et se trivialise dans $H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{Aut}_{\mathcal{A}_{\widetilde{X}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él},\mu}_{\widetilde{X}})\big)$, d'après le théorème II.1.2.1 ci-dessus. $\square$

Terminons maintenant la démonstration du théorème II.2.2.2 dans le cas où $\dim Y = 0$. Pour tout $\mu \in M$, écrivons $\lambda_{k\ell}^{\mu\mu} = (h_k^{\mu\mu})^{-1} h_\ell^{\mu\mu}$, et soit $h_k = \oplus_\mu h_k^{\mu\mu} \in \Gamma(U_k, \mathrm{Aut}_{\mathcal{A}_{\widetilde{X}}[*D]}(\mathcal{M}_{\widetilde{X}}^{\text{él}}))$. Alors $\widetilde{\lambda}_{k\ell} = h_k \lambda_{k\ell} h_\ell^{-1}$ est un cocycle dont les blocs diagonaux $\widetilde{\lambda}_{k\ell}^{\mu\mu}$ sont égaux à l'identité, et les blocs non diagonaux $\widetilde{\lambda}_{k\ell}^{\mu\nu}$, $\mu \neq \nu$, sont encore infiniment plats le long de $\pi^{-1}(D)$. On peut appliquer à ce cocycle le corollaire II.1.2.2 dans sa version corrigée ci-dessus. On en conclut que λ se trivialise dans $H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{Aut}_{\mathcal{A}_{\widetilde{X}}[*D]}(\mathcal{M}_{\widetilde{X}}^{\text{él}})\big)$, ce qui termine la démonstration, grâce au § II.2.2.3. $\square$

Remarque. — Explicitons la condition du théorème. Soit λ un cocycle relativement au recouvrement (U_k) de $\pi^{-1}(0)$. On suppose que le recouvrement est choisi de sorte qu'existe sur chaque U_k une détermination de $\log x_i$ $(i = 1, 2)$. On en choisi alors une. Pour les matrices δ_i^α comme plus haut, on note ${}_k x_i^{\delta_i^\alpha}$ la matrice $\exp(\delta_i^\alpha \log x_i)$ calculée avec cette détermination. Il existe alors un cocycle $(C_{k\ell})$ de matrices constantes telles que la composante $\lambda_{k\ell}^{\alpha\beta}$ de $\lambda_{k\ell}$ s'écrive

$$e^{\varphi_\alpha - \varphi_\beta}\, {}_k x_1^{-\delta_1^\beta}\, {}_k x_2^{-\delta_2^\beta}\, C_{k\ell}^{\alpha\beta}\, {}_\ell x_1^{\delta_1^\alpha}\, {}_\ell x_2^{\delta_2^\alpha},$$

avec $C_{k\ell}^{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$ et $e^{\varphi_\alpha - \varphi_\beta}$ n'est pas à décroissance rapide le long de $U_k \cap U_\ell$, et $C_{k\ell}^{\alpha\alpha} = {}_k x_1^{\delta_1^\alpha}\, {}_k x_2^{\delta_2^\alpha}\, {}_\ell x_1^{-\delta_1^\alpha}\, {}_\ell x_2^{-\delta_2^\alpha}$ pour tout α, de sorte que $\lambda_{k\ell}^{\alpha\alpha} = \mathrm{Id}$.

Le cocycle image de λ dans $H^1\big(\pi^{-1}(0), \mathrm{Aut}^{<Y}_{\mathcal{D}_{\widetilde{X|D_2}}[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}}_{\widetilde{X|D_2}})\big)$ est le cocycle

$$(*) \qquad e^{\varphi_\alpha - \varphi_\beta}\, {}_k x_1^{-\delta_1^\beta}\, C_{k\ell}^{(2)\alpha\beta}\, {}_\ell x_1^{\delta_1^\alpha},$$

où $C_{k\ell}^{(2)\alpha\beta}$ s'obtient à partir de $C_{k\ell}^{\alpha\beta}$ comme suit :

– on a $C_{k\ell}^{(2)\alpha\alpha} = {}_k x_1^{\delta_1^\alpha}\, {}_\ell x_1^{-\delta_1^\alpha}$,

– si $\alpha \neq \beta$ et si $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ n'a de pôle que le long de D_1, $C_{k\ell}^{(2)\alpha\beta} = C_{k\ell}^{\alpha\beta}$,

– si $\alpha \neq \beta$ et si $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ a un pôle le long de D_2 (et éventuellement aussi le long de D_1), alors $C_{k\ell}^{(2)\alpha\beta} = 0$.

La condition du théorème dit que le cocycle $(*)$ provient d'un cocycle sur $\pi_1^{-1}(0)$. Supposons de plus que le recouvrement $\mathcal{U}$ soit le produit d'un recouvrement de S^1 par un recouvrement de S^1. Il est alors possible de choisir les déterminations de $\log x_1$ de manière constante dans les fibres de la projection p_1 sur $\pi_1^{-1}(0)$. Dans ce cas, la condition du théorème porte seulement sur le cocycle $(C_{k\ell}^{(2)})$ de $H^1(\pi^{-1}(0), \mathrm{GL}_d(\mathbf{C}))$: celui-ci doit provenir d'un cocycle de $H^1(\pi_1^{-1}(0), \mathrm{GL}_d(\mathbf{C}))$, et une condition symétrique pour $(C_{k\ell}^{(1)})$ construit de manière similaire. On remarque aussi que la condition est clairement satisfaite pour les sous-cocycles $(C_{k\ell}^{(2)\alpha\alpha})$. La condition dit donc qu'il n'y a pas de monodromie verticale pour $C^{(2)}$, et une condition analogue pour $C^{(1)}$.

3. La démonstration de la proposition II.3.2.6 page 66 est maintenant incomplète, car le lemme II.3.3.1 page 69 n'est plus suffisant pour conclure. Il faut aussi vérifier la condition donnée dans la version corrigée du théorème II.2.2.2 ci-dessus. Nous complétons cette démonstration ci-dessous en reprenant les notations du lemme II.3.3.1 et les notations ci-dessus.

Pour chaque $\alpha \in A$, on écrit $\mathcal{R}^\alpha = \mathcal{O}_X[*D] \otimes_{\mathbf{C}} V^\alpha$, avec la connexion définie par les endomorphismes δ_1^α et δ_2^α. Alors $C_X^{\mathrm{mod}\,D}\mathcal{R}^\alpha \simeq \mathcal{O}_{\overline{X}}[*\overline{D}] \otimes_{\mathbf{C}} V^{\alpha\vee}$, avec $V^{\alpha\vee} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V^\alpha, \mathbf{C})$, muni de la connexion définie à l'aide des endomorphismes transposés. De même,

$$C_X^{\mathrm{mod}\,D}(\mathcal{E}^{\varphi_\alpha} \otimes \mathcal{R}^\alpha) \simeq \mathcal{E}^{-\overline{\varphi}_\alpha} \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}[*\overline{D}] \otimes_{\mathbf{C}} V^{\alpha\vee}$$

L'accouplement sesquilinéaire naturel $C_X^{\mathrm{mod}\,D}(\mathcal{E}^{\varphi_\alpha} \otimes \mathcal{R}^\alpha) \otimes_{\mathbf{C}} (\mathcal{E}^{\varphi_\alpha} \otimes \mathcal{R}^\alpha) \to \mathfrak{Db}_X^{\mathrm{mod}\,D}$ est défini par

$$(1 \otimes u) \otimes (1 \otimes v) \longmapsto e^{\varphi - \overline{\varphi}} \langle u, |x_1|^{2\delta_1^\alpha} |x_2|^{2\delta_2^\alpha} \cdot v \rangle$$

si $\langle\,,\,\rangle : V^{\alpha\vee} \otimes_{\mathbf{C}} V^\alpha \to \mathbf{C}$ est l'accouplement naturel. Notons que le terme de droite s'écrit encore, sur U_k,

$$e^{\varphi - \overline{\varphi}} \langle {}_k\overline{x}_1^{\,{}^t\delta_1^\alpha}\, {}_k\overline{x}_2^{\,{}^t\delta_2^\alpha} \cdot u, {}_kx_1^{\delta_1^\alpha}\, {}_kx_2^{\delta_2^\alpha} \cdot v \rangle.$$

Si le cocycle λ s'écrit comme plus haut

$$\lambda_{k\ell}^{\alpha\beta} = e^{\varphi_\alpha - \varphi_\beta} \mu_{k\ell}^{\alpha\beta}, \quad \text{avec } \mu_{k\ell}^{\alpha\beta} = {}_kx_1^{-\delta_1^\beta}\, {}_kx_2^{-\delta_2^\beta}\, C_{k\ell}^{\alpha\beta}\, {}_\ell x_1^{\delta_1^\alpha}\, {}_\ell x_2^{\delta_2^\alpha},$$

alors le cocycle transposé défini avant le lemme II.3.3.1 par $({}^t\lambda)_{k\ell} = {}^t\lambda_{\ell k}$ ou, ce qui revient au même, $({}^t\lambda^{-1})_{k\ell} = {}^t\lambda_{k\ell}$, satisfait

$$\begin{aligned} ({}^t\lambda^{-1})_{k\ell}^{\beta\alpha} &= {}^t(\lambda_{k\ell}^{\alpha\beta}) = e^{\overline{\varphi}_\alpha - \overline{\varphi}_\beta} \cdot {}^t(\mu_{k\ell}^{\alpha\beta}) \\ &= e^{\overline{\varphi}_\alpha - \overline{\varphi}_\beta}\, {}_\ell\overline{x}_1^{\,{}^t\delta_1^\alpha}\, {}_\ell\overline{x}_2^{\,{}^t\delta_2^\alpha}\, {}^tC_{k\ell}^{\alpha\beta}\, {}_k\overline{x}_1^{\,-{}^t\delta_1^\beta}\, {}_k\overline{x}_2^{\,-{}^t\delta_2^\beta}. \end{aligned}$$

L'image de ${}^t\lambda^{-1}$ dans le complété formel le long de $\overline{D}_i$ est donc déterminée par le cocycle ${}^tC^{(i)}$ $(i = 1, 2)$. La condition du théorème est donc satisfaite par ${}^t\lambda^{-1}$ (et donc par ${}^t\lambda$) si elle l'est par λ. □

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* sabbah@math.polytechnique.fr
Url : http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/sabbah.html