DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE DISTRIBUTIONS HOLONOMES D'UNE VARIABLE COMPLEXE

par Claude Sabbah

Résumé. — Nous donnons la forme générale d'un germe de distribution holonome d'une variable complexe.

Abstract (*Asymptotic expansion of holonomic distributions of one complex variable*)
We give the general form for a germ of holonomic distribution of one complex variable.

Introduction

Dans cet article, nous utilisons la notion de « dual hermitien d'un $\mathscr{D}$-module » introduite par M. Kashiwara [3] (voir aussi [2]) pour donner la forme générale d'un germe de distribution d'une variable complexe satisfaisant à une équation différentielle holomorphe. Le cas où l'équation est à singularité régulière est bien connu (voir par exemple [1]). Nous utilisons ici le fait que le dual hermitien d'un $\mathscr{D}$-module holonome d'une variable complexe est encore holonome : c'est un cas particulier d'une conjecture générale de M. Kashiwara ; ce cas particulier est montré dans [6], en analysant la dualité hermitienne au niveau des cocycles de Stokes.

Nous négligerons ci-dessous les distributions à support ponctuel (masses de Dirac) et travaillerons avec les germes de distributions modérées.

Claude Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France
E-mail : `sabbah@math.polytechnique.fr`
Url : `http://www.math.polytechnique.fr/~sabbah`

Classification mathématique par sujets (2000). — 46Fxx, 34M30, 34M35, 34M40.
Mots clefs. — Distribution, développement asymptotique, holonome, D-module.

1. Développement asymptotique de distributions holonomes

Soit X un disque centré en 0 dans $\mathbb{C}$, muni de la coordonnée x. Soit u un germe en 0 de distribution holonome modérée en 0 sur X : autrement dit,

(1) il existe un voisinage ouvert U de 0 dans X tel que u soit une distribution sur $U^* = U \smallsetminus \{0\}$ qui soit la restriction d'une distribution sur U (l'espace correspondant est noté $\mathfrak{Db}^{\bmod 0}(U)$),

(2) il existe un opérateur différentiel linéaire holomorphe non identiquement nul $P \in \mathscr{O}(U)\langle\partial_x\rangle$ tel que l'on ait $P \cdot u = 0$ dans $\mathfrak{Db}^{\bmod 0}(U)$.

On peut supposer que U est choisi de sorte que P n'ait de singularité qu'en $0 \in X$.

Soit $\pi : Y \to X$, $y \mapsto y^q = x$, un revêtement ramifié de degré $q \in \mathbb{N}^*$. Alors l'image inverse par π d'une distribution modérée en 0 est bien définie comme distribution modérée en 0 sur Y. Si u est holonome, $\pi^* u$ l'est aussi.

Théorème. — *Soit u un germe en 0 de distribution holonome modérée sur X. Alors il existe :*

– *un entier q, donnant lieu à un revêtement ramifié $\pi : Y \to X$,*
– *un ensemble fini $\Phi \subset y^{-1}\mathbb{C}[y^{-1}]$,*
– *pour tout $\varphi \in \Phi$, un ensemble fini $B_\varphi \in \mathbb{C}$ et un entier $L_\varphi \in \mathbb{N}$,*
– *pour tous $\varphi \in \Phi$, $\beta \in B_\varphi$ et $\ell = 0, \ldots, L_\varphi$, une fonction $f_{\varphi,\beta,\ell} \in \mathscr{C}^\infty(Y)$*

tels que l'on ait, dans $\mathfrak{Db}^{\bmod 0}(V)$ et en particulier dans $C^\infty(V^*)$ (où V est un voisinage assez petit de 0 dans Y), l'égalité

$$(*) \qquad \pi^* u = \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\beta \in B_\varphi} \sum_{\ell=0}^{L_\varphi} f_{\varphi,\beta,\ell}(y) e^{\varphi - \overline{\varphi}} |y|^{2\beta} \mathrm{L}(y)^\ell,$$

où on a noté

$$\mathrm{L}(y) := \left|\log |y|^2\right|.$$

Notons que, pour $\varphi \in y^{-1}\mathbb{C}[y^{-1}]$, la fonctions $e^{\varphi-\overline{\varphi}}$ est un multiplicateur dans $\mathfrak{Db}^{\bmod 0}(V)$ (car c'est une fonction C^∞ sur V^*, à croissance modérée à l'origine ainsi que toutes ses dérivées). Il en est de même des fonctions $|y|^{2\beta}$ et $\mathrm{L}(y)^\ell$.

Avant de montrer le théorème, nous allons préciser les φ, β tels que $f_{\varphi,\beta,\ell} \neq 0$ pour un certain ℓ, en rappelant d'abord des résultats classiques sur la structure des connexions méromorphes d'une variable (*cf.* [4] par exemple).

Soit M un germe en $x = 0$ de fibré méromorphe muni d'une connexion ∇, *i.e.* un $\mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une connexion. Soit $\pi : y \mapsto x = y^q$ une ramification telle que le formalisé ramifié $\widehat{N} := \pi^+ \widehat{M}$ soit isomorphe au formalisé d'un fibré méromorphe à connexion élémentaire, *i.e.* de la forme $N^{\text{él}} = \oplus_{\varphi\in\Phi}(E^\varphi \otimes R_\varphi)$, où les R_φ sont à singularité régulière et E^φ est égal à $\mathscr{O}_X$ muni de la connexion telle que $\nabla 1 = d\varphi$; on note, pour plus de clarté, «e^φ» la section 1 de E^φ. Le groupe $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ agit naturellement sur $\widehat{N}$.

On note $V^\bullet M$ la filtration décroissante (indexée par $\mathbb{R}$) de Deligne du fibré méromorphe M : chaque $V^b M$ est de type fini sur $\mathbb{C}\{x\}\langle x\partial_x\rangle$, et le gradué $\mathrm{gr}_V^b M := V^b M/V^{>b}M$ est un espace vectoriel de dimension finie sur lequel l'endomorphisme induit par $x\partial_x$ a ses valeurs propres β de partie réelle égale à b. On note alors $\psi_x^\beta M \subset \mathrm{gr}_V^b M$ le sous-espace propre généralisé associé à β. La multiplication par x^k induit un isomorphisme $\mathrm{gr}_V^b M \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_V^{b+k} M$ qui transforme $x\partial_x$ et $x\partial_x+k$, donc qui induit un isomorphisme $\psi_x^\beta M \xrightarrow{\sim} \psi_x^{\beta+k}M$.

La construction peut aussi être appliquée au formalisé $\widehat{M}$ et il est connu que $\mathrm{gr}_V^b \widehat{M} = \mathrm{gr}_V^b M$ et $\psi_x^\beta \widehat{M} = \psi_x^\beta M$.

Par ailleurs, si $N = \pi^+ M$ comme ci-dessus, on a $V^b M = (V^{qb}N)^{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}$ (on utilise le fait que, sur $1\otimes M$, $y\partial_y$ agit comme $q\,\mathrm{Id}\otimes x\partial_x$). Enfin, en utilisant la décomposition de $\widehat{N} = \widehat{N}^{\mathrm{él}}$, on a $V^b(E^\varphi\otimes R_\varphi) = E^\varphi \otimes R_\varphi$ pour tout $b\in\mathbb{R}$ si $\varphi\neq 0$. Ainsi, $\psi_y^\beta N = \psi_y^\beta \widehat{N} = \psi_y^\beta R_0$.

Revenons maintenant à la situation du théorème. Dans la suite, on travaille sur un voisinage assez petit de 0 qu'on ne précise pas, et qu'on note toujours X ou Y.

Soit M le $\mathscr{D}_X[x^{-1}]$-module engendré par u dans $\mathfrak{Db}^{\mathrm{mod}\,0}(X)$. Alors M est un $\mathscr{O}_X[x^{-1}]$-module localement libre de rang fini muni d'une connexion, induite par l'action de ∂_x. Soit $\pi : Y\to X$ une ramification telle que $N := \pi^+M$ soit formellement isomorphe à $N^{\mathrm{él}} = \oplus_{\varphi\in\Phi}(E^\varphi\otimes R_\varphi)$. On identifie le germe de fibré à connexion π^+N au $\mathscr{D}_Y[y^{-1}]$-sous-module de $\mathfrak{Db}^{\mathrm{mod}\,0}(Y)$ engendré par la distribution modérée $v=\pi^*u$. Par ailleurs, N est de la forme $\mathscr{D}_Y/(Q)$ pour un certain opérateur différentiel holomorphe Q qui annule v.

Définition. — On dira que la distribution holonome modérée u est *sans ramification* si on peut choisir $\pi=\mathrm{Id}$ ci-dessus.

On travaillera directement avec la distribution holonome modérée sans ramification $v=\pi^*u$. Pour $\varphi\in y^{-1}\mathbb{C}[y^{-1}]$, soit N_φ le $\mathscr{D}_Y[y^{-1}]$-module engendré par $e^{\overline{\varphi}-\varphi}v$ dans $\mathfrak{Db}^{\mathrm{mod}\,0}\,Y$. C'est aussi un $\mathscr{O}_X[x^{-1}]$-module localement libre de rang fini muni d'une connexion.

Pour tout $\beta\in\mathbb{C}$, on note $L'_{\varphi,\beta}(v)$ l'ordre de nilpotence de $y\partial_y-\beta$ sur $\psi_y^\beta(N_\varphi)$. On a bien sûr $L'_{\varphi,\beta}(v) = L'_{\varphi,\beta+k}(v)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$. Il existe alors un ensemble fini minimal $B'_\varphi(v)\subset\mathbb{C}$ tel que, pour tout $j\in\mathbb{N}$ on puisse trouver un entier $k(j)$ et un opérateur $P_j\in\mathbb{C}\{y\}\langle y\partial_y\rangle$ tels que

$$\Big[\prod_{k=0}^{k(j)}\prod_{\beta\in B'_\varphi(v)}\big[-(y\partial_y-\beta-k)\big]^{L'_{\varphi,\beta}} - y^jP_j\Big]\cdot e^{\overline{\varphi}-\varphi}v = 0. \tag{1}$$

Remarque. — Pour presque tout φ, on a $B'_\varphi(v)=\varnothing$. On note $\Phi(v)$ l'ensemble des φ pour lesquels la composante $E^\varphi\otimes R'_\varphi$ de $\mathscr{D}_Y[y^{-1}]\cdot v$ n'est pas nulle. C'est aussi l'ensemble des φ pour lesquels la composante $\overline{E^{-\varphi}\otimes R''_\varphi}$ de $\mathscr{D}_{\overline{Y}}[1/\overline{y}]\cdot v$ n'est pas nulle.

On définit de manière conjuguée les objets $L''_{\varphi,\beta}$ et $B''_\varphi(v)$. On pose alors

$$B_\varphi(v)=\Big[(B'_\varphi(v)-\mathbb{N})\cap B''_\varphi(v)\Big]\cup\Big[B'_\varphi(v)\cap(B''_\varphi(v)-\mathbb{N})\Big].$$

Autrement dit, $\beta\in B_\varphi(v)$ si et seulement si $\beta\in B'_\varphi(v)\cup B''_\varphi(v)$ et $(\beta+\mathbb{N})\cap B'_\varphi(v)\neq\varnothing$ et $(\beta+\mathbb{N})\cap B''_\varphi(v)\neq\varnothing$. Pour tout $\beta\in\mathbb{C}$, on pose $L_{\varphi,\beta}(v)=\min\{L'_{\varphi,\beta}(v),L''_{\varphi,\beta}(v)\}$, et on a $L_{\varphi,\beta+k}(v)=L_{\varphi,\beta}(v)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

Enfin, si $f\in C^\infty(Y)$, on développe f par rapport à $y,\overline{y}$ et on peut associer à ce développement un ensemble minimal $E(f)\subset\mathbb{N}^2$ tel que $f=\sum_{(\nu',\nu'')\in E(f)}y^{\nu'}\overline{y}^{\nu''}g_{(\nu',\nu'')}$ avec $g_{(\nu',\nu'')}\in C^\infty(Y)$. La minimalité de $E(f)$ implique en particulier que $g_{(\nu',\nu'')}(0)\neq0$ si $(\nu',\nu'')\in E(f)$. On convient que $E(f)=\varnothing$ si f est infiniment plate en 0.

Corollaire 1. — *Soit v une distribution holonome modérée sans ramification. Alors v admet un développement $(*)$ dans $\mathfrak{Db}_Y^{\mathrm{mod}\,0}$, avec $\Phi=\Phi(v)$ et $\beta\in B_\varphi(v)$. De plus, si $f_{\varphi,\beta,\ell}\neq0$ et si le point $(k',k'')\in\mathbb{N}^2$ est dans $E(f_{\varphi,\beta,\ell})$, alors $\beta+k'\in B'_\varphi(v)+\mathbb{N}$ et $\beta+k''\in B''_\varphi(v)+\mathbb{N}$.*

Démonstration. — Nous supposons le théorème démontré. On utilise la transformation de Mellin pour raisonner sur chaque coefficient du développement $(*)$. Soit χ une fonction C^∞ à support compact contenu dans un ouvert où v est définie, identiquement égale à 1 près de 0. On note de la même manière la forme $\chi\frac{i}{2\pi}\,dy\wedge d\overline{y}$. Par ailleurs, choisissons une distribution $\widetilde{v}$ induisant v sur Y^* et soit p son ordre sur le support de χ. Nous allons d'abord considérer les coefficients pour lesquels $\varphi=0$.

Pour tous $k',k''\in\mathbb{N}$, la fonction $s\mapsto\langle\widetilde{v},|y|^{2s}y^{-k'}\overline{y}^{-k''}\chi\rangle$ est définie et holomorphe sur le demi-plan $2\operatorname{Re}s>p+k'+k''$. Pour tout $j\geqslant1$, notons Q_j l'opérateur apparaissant dans (1) (pour $\varphi=0$). Alors $Q_j\cdot\widetilde{v}$ est à support l'origine. Il sera commode dans la suite d'utiliser la notation α pour $-\beta-1$ et noter $A'_\varphi(v)=\{\alpha\mid\beta=-\alpha-1\in B'_\varphi(v)\}$. On en déduit alors que, sur un demi-plan $\operatorname{Re}s\gg0$, la fonction

$$\Big[\prod_{k=0}^{k(j)}\prod_{\alpha\in A'_0(v)}(s-\alpha-k'+k)^{L'_{0,\alpha}}\Big]\langle\widetilde{v},|y|^{2s}y^{-k'}\overline{y}^{-k''}\chi\rangle$$

coïncide avec une fonction holomorphe sur $2\operatorname{Re}s>p+k'+k''-j$. En appliquant le même argument de manière anti-holomorphe, on trouve que, pour tous $k',k''\in\mathbb{N}$, la fonction $s\mapsto\langle\widetilde{v},|y|^{2s}y^{-k'}\overline{y}^{-k''}\chi\rangle$ s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ à pôles contenus dans $(A'_0(v)+k'-\mathbb{N})\cap(A''_0(v)+k''-\mathbb{N})$, l'ordre du pôle en $\alpha+\mathbb{Z}$ étant majoré par $L_{0,\alpha}(v)$. De plus, cette fonction ne dépend pas du choix du relèvement $\widetilde{v}$.

Calculons maintenant la transformée de Mellin du développement $(*)$ pour v.

Lemme 1. — *Si $\varphi\neq 0$, alors, pour toute fonction $g\in\mathscr{C}^\infty(Y)$, la transformée de Mellin de $g(y)e^{\varphi-\overline{\varphi}}|y|^{2\beta}\mathrm{L}(y)^\ell$ est une fonction entière.*

Démonstration. — On montre que cette transformée de Mellin est holomorphe sur tout demi-plan $\operatorname{Re}s>-p$ ($p\in\mathbb{N}$). Pour cela, pour p fixé, on décompose g comme la somme d'un polynôme en $y,\overline{y}$ et d'un reste qui s'annule à un ordre assez grand à l'origine pour que la partie correspondante de la transformée de Mellin soit holomorphe sur $\operatorname{Re}s>-p$. On est donc ramené à supposer que g est un monôme en $y,\overline{y}$. Il existe alors des équations fonctionnelles holomorphe et anti-holomorphe pour la distribution modérée $g(y)e^{\varphi-\overline{\varphi}}|y|^{2\beta}\mathrm{L}(y)^\ell$ avec polynôme de Bernstein égal à 1. On peut ainsi utiliser le même argument que ci-dessus, avec un terme entre crochets égal à 1. □

Considérons donc les termes du développement $(*)$ de v pour lesquels $\varphi=0$. Il n'est pas restrictif de supposer que deux éléments distincts de l'ensemble d'indices B_0 qui intervient dans $(*)$ ne diffèrent pas d'un entier, et que tout élément β de B_0 est maximal, en ce sens que l'escalier $\bigcup_\ell E(f_{0,\beta,\ell})$ est contenu dans $\mathbb{N}^2$ et dans aucun $(m,m)+\mathbb{N}^2$ avec $m\in\mathbb{N}^*$. Soit $\beta\in B_0$. Nous utiliserons le fait que, pour tous $(\nu',\nu'')\in\mathbb{Z}^2$ *non tous deux strictement négatifs* et toute fonction $g\in C^\infty(Y)$ telle que $g(0)\neq 0$, la fonction méromorphe $s\mapsto\langle g(y)|y|^{2\beta}\mathrm{L}(y)^\ell,|y|^{2s}y^{\nu'}\overline{y}^{\nu''}\chi\rangle$ a ses pôles contenus dans $\alpha-\mathbb{N}$ (avec $\alpha=-\beta-1$), et a un pôle en α si et seulement si $\nu'=0$ et $\nu''=0$, ce pôle étant alors d'ordre $\ell+1$ exactement.

Pour $\beta\in B_0$, soit $E_\beta\subset\mathbb{N}^2$ un ensemble minimal tel que $E_\beta+\mathbb{N}^2=\bigcup_\ell(E(f_{0,\beta,\ell})+\mathbb{N}^2)$. On déduit de ce qui précède et du développement $(*)$ que, pour tout $(k',k'')\in E_\beta$, la fonction $s\mapsto\langle\widetilde{v},|y|^{2s}y^{-k'}\overline{y}^{-k''}\chi\rangle$ a un pôle non trivial en α ; de la première partie de la preuve on conclut que $\alpha-k'\in A'_0(v)-\mathbb{N}$ et $\alpha-k''\in A''_0(v)-\mathbb{N}$, c'est-à-dire $\beta+k'\in B'_0(v)+\mathbb{N}$ et $\beta+k''\in B''_0(v)+\mathbb{N}$. Par hypothèse sur B_0, il existe $(k',k'')\in E_\beta$ avec $k'=0$ ou $k''=0$. Il en résulte que $\beta\in B_\varphi(v)$ et que la condition donnée dans l'énoncé du corollaire est satisfaite par les éléments de E_β. Elle est alors aussi trivialement satisfaite par les éléments de tous les $E(f_{0,\beta,\ell})$.

Pour obtenir le résultat pour les $f_{\varphi,\beta,\ell}$, on applique le résultat précédent à la distribution modérée $e^{\overline{\varphi}-\varphi}v$. □

Démonstration du théorème. — Nous utiliserons le résultat suivant :

Théorème ([6, Prop. II.3.2.5]). — *Pour M comme ci-dessus, le $\mathscr{O}_{\overline{X}}[\overline{x}^{-1}]$-module $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(M,\mathfrak{Db}_X^{\mathrm{mod}\,0})$ est libre (de même rang que M) et muni d'une connexion anti-holomorphe, donc est un $\mathscr{D}_{\overline{X}}$-module holonome.* □

On note $C_X^{\mathrm{mod}\,0}M = \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(M, \mathfrak{Db}_X^{\mathrm{mod}\,0})$. On a donc un accouplement $\mathscr{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{D}_{\overline{X}}$-linéaire canonique

$$k : M \otimes_{\mathbb{C}} C_X^{\mathrm{mod}\,0}M \longrightarrow \mathfrak{Db}_X^{\mathrm{mod}\,0}, \qquad (m, \varphi) \longmapsto \varphi(m).$$

Puisque M est engendré par u sur $\mathscr{D}_X[x^{-1}]$, $\varphi \in C_X^{\mathrm{mod}\,0}M$ est déterminé par sa valeur $\varphi(u) \in \mathfrak{Db}_X^{\mathrm{mod}\,0}$. Il existe donc une section $\mathbf{1}_u$ de $C_X^{\mathrm{mod}\,0}M$ telle que $\mathbf{1}_u(u) = u$.

Tout revient ainsi à montrer le théorème dans le cas où

$$k : M' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M''} \longrightarrow \mathfrak{Db}_X^{\mathrm{mod}\,0}$$

est un accouplement sesquilinéaire entre deux $\mathscr{O}_X[x^{-1}]$-modules libres de rang fini à connexion, m', m'' en sont deux sections locales, et $u = k(m', \overline{m''})$.

On se ramène, par un revêtement cyclique, au cas où M' et M'' admettent chacun une décomposition formelle modelée sur $M'^{\mathrm{él}}$ et $M''^{\mathrm{él}}$ (si $M'' = C_X^{\mathrm{mod}\,0}M'$, un revêtement qui convient pour l'un convient aussi pour l'autre).

On travaille ensuite avec l'image inverse par l'éclatement réel $e : \widetilde{Y} \to Y$ de l'origine. On note $\mathscr{A}_{\widetilde{Y}}$ le faisceau des fonctions C^∞ sur $\widetilde{Y}$ annulées par l'opérateur de Cauchy-Riemann $\overline{y\partial_y}$, $\mathscr{D}_{\widetilde{Y}} = \mathscr{A}_{\widetilde{Y}} \otimes_{e^{-1}\mathscr{O}_Y} e^{-1}\mathscr{D}_Y$ et $\mathfrak{Db}_{\widetilde{Y}}^{\mathrm{mod}\,0}$ le faisceau sur $\widetilde{Y}$ des distributions modérées le long de $e^{-1}(0) = S^1$. On note enfin $\widetilde{M} = \mathscr{A}_{\widetilde{Y}} \otimes_{e^{-1}\mathscr{O}_Y} e^{-1}M$. C'est un $\mathscr{D}_{\widetilde{Y}}$-module à gauche, qui est $\mathscr{A}_{\widetilde{Y}}[y^{-1}]$-libre.

L'accouplement k s'étend de manière unique en un accouplement $\mathscr{D}_{\widetilde{Y}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{D}_{\overline{\widetilde{Y}}}$-linéaire

$$\widetilde{k} : \widetilde{M}' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\widetilde{M}''} \longrightarrow \mathfrak{Db}_{\widetilde{Y}}^{\mathrm{mod}\,0}$$

(simplement parce que M est $\mathbb{C}\{y\}[y^{-1}]$-libre). On alors peut travailler localement sur $\widetilde{Y}$ avec $\widetilde{k}$ et ainsi remplacer, grâce au théorème de Hukuhara-Turrittin (voir par exemple [4]), $\widetilde{M}'$ et $\widetilde{M}''$ par leurs modèles élémentaires respectifs $\oplus_\varphi(E^\varphi \otimes R'_\varphi)$ et $\oplus_\varphi(E^\varphi \otimes R''_\varphi)$.

Lemme 2. — *Si $\varphi, \psi \in y^{-1}\mathbb{C}[y^{-1}]$ sont distincts, tout accouplement sesquilinéaire $\widetilde{k}_{\varphi,\psi} = (E^\varphi \otimes R'_\varphi) \otimes_{\mathbb{C}} (E^{-\overline{\psi}} \otimes \overline{R''_{-\psi}}) \to \mathfrak{Db}_{\widetilde{Y}}^{\mathrm{mod}\,0}$ prend ses valeurs dans le sous-faisceau des fonctions à décroissance rapide.*

Démonstration. — Puisque $e^{\psi - \overline{\psi}}$ est un multiplicateur sur $\mathfrak{Db}_{\widetilde{Y}}^{\mathrm{mod}\,0}$, on peut se ramener au cas où, par exemple, $\psi = 0$. Par récurrence sur le rang de R'_φ et R''_0, on se ramène au cas de rang 1, et puisque les fonctions y^α ou $\overline{y}^\beta$ sont aussi des multiplicateurs, on se ramène au cas où R'_φ et R''_0 sont égaux à $\mathscr{O}_Y$. Alors $\widetilde{u} = \widetilde{k}(\ll e^\varphi \gg, 1)$ est un germe de distribution modérée sur $\widetilde{Y}$ qui satisfait à $\overline{\partial}_y \widetilde{u} = 0$ et $\partial_y \widetilde{u} = \varphi'(y)\widetilde{u}$. On en déduit $\widetilde{u}_{|Y^*} = e^\varphi$. Donc $\widetilde{u}$ à croissance modérée $\iff$ $\widetilde{u}$ à décroissance rapide. $\square$

De la même manière (en utilisant la forme normale pour R'_0, R''_0), on voit que les termes diagonaux $\widetilde{k}_{\varphi,\varphi}(\widetilde{m}', \overline{\widetilde{m}''})$ se décomposent en somme, à coefficients dans $\mathscr{C}^\infty_{\widetilde{Y}}$, de termes $e^{\varphi-\overline{\varphi}}y^{\beta'}\overline{y}^{\beta''}(\log y)^j(\log\overline{y})^k$ ($\beta', \beta'' \in \mathbb{C}$, $j,k \in \mathbb{N}$). On réécrit chacun de ces termes comme une somme, à coefficients dans $\mathscr{C}^\infty_{\widetilde{Y}}$, de termes $|y|^{2\beta}\mathrm{L}(y)^\ell$ ($\beta \in \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{N}$).

Si m', m'' sont des sections locales de M', M'', on utilise une partition de l'unité sur $\widetilde{Y}$. On obtient pour $e^*k(m', \overline{m''})$ un développement du type $(*)$, à coefficients $\widetilde{f}_{\varphi,\beta,\ell}$ dans $e_*\mathscr{C}^\infty_{\widetilde{Y}}$, à l'ajout près d'une fonction C^∞ infiniment plate le long de $e^{-1}(0)$: on l'incorpore dans un des coefficients $\widetilde{f}_{\varphi,\beta,\ell}$. On note alors $\widetilde{B}_\varphi$ l'ensemble d'indices β correspondant à φ. Puisque $|y|$ est C^∞ sur $\widetilde{Y}$, on peut supposer que la différence de deux éléments distincts de $\widetilde{B}_\varphi$ n'est pas dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Il reste à voir que l'on peut réécrire ce développement avec des coefficients $f_{\varphi,\beta,\ell}$ dans $\mathscr{C}^\infty_Y$. Nous allons utiliser un argument de transformation de Mellin, comme dans le corollaire 1, dont nous n'utiliserons que les notations.

Notons $y = \rho e^{i\theta}$ en coordonnées polaires. Une fonction $\widetilde{f} \in e_*\mathscr{C}^\infty_{\widetilde{Y}}$ admet un développement de Taylor $\sum_{m\geqslant 0}\widetilde{f}_m(\theta)\rho^m$ où $\widetilde{f}_m(\theta)$ est C^∞ sur S^1 et se développe en série de Fourier $\sum_n \widetilde{f}_{mn}e^{in\theta}$. Une telle fonction peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=-2k_0}^0 g_k(y)|y|^k$ avec $k_0 \in \mathbb{N}$ et $g_k \in \mathscr{C}^\infty(Y)$ si et seulement si

$$\widetilde{f}_{m,n} \neq 0 \Longrightarrow \frac{m \pm n}{2} \geqslant -k_0. \tag{2}$$

En effet, si cette condition est satisfaite, on écrit $\widetilde{f}_{m,n}e^{in\theta}\rho^m = \widetilde{f}_{m,n}y^{k'}\overline{y}^{k''}$ avec $k' = (m+n)/2$ et $k'' = (m-n)/2$, donc $k', k'' \geqslant -k_0$ et $k' + k'' \geqslant 0$. Il existe alors un entier k compris entre $-2k_0$ et 0 tel que $k' - k/2 \in \mathbb{N}$ et $k'' - k/2 \in \mathbb{N}$. La partie du développement de Fourier de $\widetilde{f}$ correspondant à k fixé fournit, par Borel, une fonction $g_k(y) \in \mathscr{C}^\infty(Y)$. La différence $\widetilde{f} - \sum_{k=-2k_0}^0 g_k(y)|y|^k$ est une fonction C^∞ sur $\widetilde{Y}$, infiniment plate le long de $|y| = 0$. C'est donc aussi une fonction C^∞ sur Y, infiniment plate à l'origine. On l'ajoute à g_0 pour obtenir la décomposition voulue de $\widetilde{f}$.

La condition (2) peut s'exprimer en terme de transformée de Mellin. On remarque en effet que, pour tous $k', k'' \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ tels que $k'+k'' \in \mathbb{N}$, la transformée de Mellin $s \mapsto \langle \widetilde{f}, |y|^{2s}y^{-k'}\overline{y}^{-k''}\chi\rangle$, qui est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$, s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples au plus contenus dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. La condition (2) est équivalente au fait qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $k', k'' \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ avec $k' + k'' \in \mathbb{N}$, les pôles de $s \mapsto \langle \widetilde{f}, |y|^{2s}y^{-k'}\overline{y}^{-k''}\chi\rangle$ soient contenus dans l'intersection des ensembles $k_0 - 1 + k' - \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$ et $k_0 - 1 + k'' - \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$.

En raisonnant par récurrence descendante sur ℓ, c'est-à-dire aussi sur l'ordre maximal des pôles, on conclut qu'une fonction $\sum_{\ell=0}^L \widetilde{f}_\ell \mathrm{L}(y)^\ell$ à coefficients dans

$\mathscr{C}^\infty(\widetilde{Y})$ peut se réécrire sous la forme $\sum_{-2k_0\leqslant k\leqslant 0}\sum_{\ell=0}^{L} g_{k,\ell}(y)|y|^k \mathrm{L}(y)^\ell$ avec $g_{k,\ell}\in\mathscr{C}^\infty(Y)$ si et seulement si la même condition est satisfaite (et les pôles sont d'ordre $\leqslant L+1$).

Maintenant, si $\widetilde{B}_0\subset\mathbb{C}$ est un ensemble fini tel que deux éléments distincts ne diffèrent pas d'un demi-entier, une fonction $\widetilde{f}=\sum_{\beta\in\widetilde{B}_0}\sum_{\ell=0}^{L}\widetilde{f}_{\beta,\ell}|y|^{2\beta}\mathrm{L}(y)^\ell$ à coefficients dans $\mathscr{C}^\infty(\widetilde{Y})$ se réécrit $\sum_{\beta\in B_0}\sum_{\ell=0}^{L} f_{\beta,\ell}|y|^{2\beta}\mathrm{L}(y)^\ell$ pour un certain ensemble B_0, avec $f_{\beta,\ell}\in\mathscr{C}^\infty(Y)$, si et seulement si il existe un ensemble fini $A_0\subset\mathbb{C}$ tel que, pour tous $k',k''\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ avec $k'+k''\in\mathbb{N}$, les pôles de $s\mapsto\langle\widetilde{f},|y|^{2s}y^{-k'}\overline{y}^{-k''}\chi\rangle$ soient contenus dans $(A_0+k'-\mathbb{N})\cap(A_0+k''-\mathbb{N})$.

Enfin, si $\widetilde{f}$ admet un développement du type $(*)$ à coefficients dans $\mathscr{C}^\infty(\widetilde{Y})$, la condition ci-dessus appliquée à $\widetilde{f}$ est équivalente au fait que $\widetilde{f}$ peut se réécrire avec des coefficients $f_{0,\beta,\ell}\in\mathscr{C}^\infty(Y)$, d'après un analogue évident du lemme 1.

On applique donc ceci à $k(m',\overline{m''})$: on voit que la condition sur la transformée de Mellin est satisfaite en utilisant l'existence d'équations fonctionnelles de Bernstein pour m' et m'', de la même manière que dans le corollaire 1 et on obtient ainsi le résultat pour les coefficients avec $\varphi=0$. On obtient le résultat pour les autres coefficients en appliquant le même raisonnement à $E^{-\varphi}\otimes M'$ et $E^{\varphi}\otimes M''$ pour les différents φ. $\square$

2. Application à la filtration parabolique canonique

Soit M un germe de fibré méromorphe à connexion sur X et $N=\pi^+M$ son image inverse par une ramification $\pi:Y\to X$. On suppose que N admet un modèle élémentaire formel : $\widehat{N}\simeq\oplus_\varphi(E^\varphi\otimes R_\varphi)$. Pour tout φ et tout $b\in\mathbb{R}$, on note $\mathcal{P}^b(\widehat{N})=\oplus_{\varphi\in\Phi}(E^\varphi\otimes V^bR_\varphi)$, si $V^\bullet$ désigne la filtration de Deligne du fibré méromorphe à singularité régulière R_φ, définie comme plus haut par le fait que le résidu de la connexion logarithmique sur V^bR_φ a ses valeurs propres de partie réelle dans $[b,b+1[$. Alors $\mathcal{P}^b(\widehat{N})$ est un $\mathbb{C}[\![y]\!]$-module libre de type fini tel que $\mathbb{C}[\![y]\!][y^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}[\![y]\!]}\mathcal{P}^b(\widehat{N})=\widehat{N}$. On a aussi $y\mathcal{P}^b(\widehat{N})=\mathcal{P}^{b+1}(\widehat{N})$. Toute suite exacte $0\to\widehat{N}'\to\widehat{N}\to\widehat{N}''\to 0$, où $\widehat{N},\widehat{N}',\widehat{N}''$ admettent une décomposition comme ci-dessus, est strictement filtrée relativement à la filtration $\mathcal{P}^\bullet$.

Le $\mathbb{C}\{y\}$-module $\mathcal{P}^b(N):=\mathcal{P}^b(\widehat{N})\cap N$ est libre de type fini, c'est un réseau de N et toute suite exacte $0\to N'\to N\to N''\to 0$, où N,N',N'' admettent un modèle élémentaire formel, est strictement filtrée relativement à la filtration $\mathcal{P}^\bullet$.

Enfin, en prenant les invariants sous l'action de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, on obtient la *filtration (parabolique) canonique* de M, qui se comporte aussi de manière stricte dans toute suite exacte (*cf.* [5] pour un cas plus général de cette construction) : $\mathcal{P}^b(M):=\mathcal{P}^{qb}(N)^{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}$. Remarquons que, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on a $x^k\mathcal{P}^b(M)=\mathcal{P}^{b+k}(M)$.

LEMME 3. — *Dans M on a, pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'égalité $\mathbb{C}\{x\}\langle x\partial_x\rangle \cdot \mathcal{P}^b(M) = V^b(M)$.*

Démonstration. — On remarque d'abord que la filtration $V^\bullet$ se comporte comme $\mathcal{P}^\bullet$ par rapport à la ramification, c'est-à-dire que $V^b(M) = V^{qb}(N)^{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}$: en effet, $y\partial_y$ opère comme $q(\mathrm{Id}\otimes x\partial_x)$ sur $1\otimes M \subset N$. L'inclusion $\subset$ est alors claire. On se ramène à montrer l'égalité pour N, en prenant ensuite les invariants sous $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Il suffit enfin de montrer l'égalité des formalisés des deux termes, ce qui donnera aussi leur égalité.

D'un côté on a $V^b(\widehat{N}) = V^b(R_0) \oplus \bigoplus_{\varphi\neq 0}(E^\varphi \otimes R_\varphi)$. D'un autre côté, on a

$$\mathbb{C}\{y\}\langle y\partial_y\rangle \cdot (E^\varphi \otimes V^b(R_\varphi)) = \begin{cases} V^b(R_0) & \text{si } \varphi = 0,\\ E^\varphi \otimes R_\varphi & \text{sinon.}\end{cases}$$

On en déduit l'assertion. $\square$

COROLLAIRE 2. — *L'extension minimale $M_{\min} := \mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle \cdot V^{>-1}(M)$ est aussi égale à $\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle \cdot \mathcal{P}^{>-1}(M)$.* $\square$

Soient M', M'' deux fibrés méromorphes sur X et soit $k : M' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M''} \to \mathfrak{Db}_{X,0}^{\bmod 0}$ un germe d'accouplement $\mathscr{D}_{X,0} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{D}_{\overline{X},0}$-linéaire.

COROLLAIRE 3. — *La restriction de k à $\mathcal{P}^{>-1}(M') \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{P}^{>-1}(M'')}$ prend ses valeurs dans l'espace des (germes de) fonctions $L^1_{\mathrm{loc}}(\frac{i}{2\pi}dx \wedge d\overline{x})$.*

Démonstration. — Il est équivalent et plus commode de montrer que la restriction de k à $\mathcal{P}^{>0}(M') \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{P}^{>0}(M'')}$ prend ses valeurs dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\frac{i}{2\pi}\frac{dx}{x} \wedge \frac{d\overline{x}}{\overline{x}})$. Soit $\pi : y \mapsto x = y^q$ une ramification adaptée à $M = M'$ et M'' et notons $N = \pi^+M$. On peut définir de manière naturelle un accouplement $\pi^+k : N' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{N''} \to \mathfrak{Db}_{Y,0}^{\bmod 0}$ qui est $\mathscr{D}_{Y,0} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{D}_{\overline{Y},0}$-linéaire et dont la restriction aux éléments $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$-invariants soit π^*k. Il suffit alors de montrer la proposition pour π^+k et $L^1_{\mathrm{loc}}(\frac{i}{2\pi}\frac{dy}{y} \wedge \frac{d\overline{y}}{\overline{y}})$. Si $m' \in \mathcal{P}^{>0}(N')$ et $m'' \in \mathcal{P}^{>0}(N'')$ alors, en posant $v = \pi^+k(m', \overline{m''})$, tout $\beta \in B_\varphi(v)$ a une partie réelle > 0 et le corollaire 1 appliqué à v montre que, puisque $e^{\varphi-\overline{\varphi}}$ est localement bornée pour tout $\varphi \in y^{-1}\mathbb{C}[y^{-1}]$, v est dans L^1_{loc}. $\square$

REMARQUE (Filtration parabolique canonique et cycles proches formels)

Pour tout $b \in \mathbb{R}$, le quotient $\mathrm{gr}^b_{\mathcal{P}}(N) := \mathcal{P}^b(N)/\mathcal{P}^{>b}(N)$ est isomorphe à $\oplus_\varphi \oplus_{\beta|\mathrm{Re}\,\beta=b} \psi_y^\beta(R_\varphi)$; il est de dimension finie. Il est muni d'un endomorphisme semi-simple $\mathrm{S} = \oplus_\varphi \oplus_{\beta|\mathrm{Re}\,\beta=b} \beta\,\mathrm{Id}$ et d'un endomorphisme nilpotent N somme directe des endomorphismes $y\partial_y - \beta$ sur les $\psi_y^\beta(R_\varphi)$. Enfin, $y : \psi_y^\beta(R_\varphi) \to \psi_y^{\beta+1}(R_\varphi)$ est un isomorphisme compatible avec l'action de N.

On pose alors, pour $\mathrm{Re}\,\beta = b$,

$$\widehat{\psi}_y^\beta(N) = \ker[\mathrm{S} - \beta\,\mathrm{Id} : \mathrm{gr}^b_{\mathcal{P}}(N) \to \mathrm{gr}^b_{\mathcal{P}}(N)] = \oplus_\varphi \psi_y^\beta(R_\varphi).$$

Cet espace, muni de N, est l'*espace des cycles proches formels* de N pour la valeur propre β (il est plus gros que $\psi_y^\beta N = \psi_y^\beta R_0$).

L'action de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ sur N préserve $\mathcal{P}^b(N)$ et induit une action sur $\mathrm{gr}^b_{\mathcal{P}}(N)$. Elle préserve aussi chaque $\oplus_\varphi \psi_y^\beta(R_\varphi) = \widehat{\psi}_y^\beta(N)$, *i.e.* commute à S, et elle commute aussi à N.

En prenant les invariants sous $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, on trouve

$$\mathrm{gr}^b_{\mathcal{P}}(M) := \mathcal{P}^b(M)/\mathcal{P}^{>b}(M) = \mathrm{gr}^{qb}_{\mathcal{P}}(N)^{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}},$$

et on munit le terme de gauche de l'endomorphisme semi-simple $\mathrm{S}_M = \frac{1}{q}\mathrm{S}_N$ et de l'endomorphisme nilpotent $\mathrm{N}_M = \frac{1}{q}\mathrm{N}_N$. On en déduit

$$(\widehat{\psi}_y^\beta(M), \mathrm{N}) := \ker[\mathrm{S} - \beta\,\mathrm{Id} : \mathrm{gr}^b_{\mathcal{P}}(M) \to \mathrm{gr}^b_{\mathcal{P}}(M)] = (\widehat{\psi}_y^{q\beta}(N)^{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}, \tfrac{1}{q}\mathrm{N}).$$

Toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ donne lieu à une suite exacte $0 \to \widehat{\psi}_y^\beta M' \to \widehat{\psi}_y^\beta M \to \widehat{\psi}_y^\beta M'' \to 0$ compatible à N.

On a $(\widehat{\psi}_y^\beta(M), \mathrm{N}) = (\widehat{\psi}_y^\beta(\widehat{M}), \mathrm{N})$ pour tout β. Si M est régulier en 0, on a $(\widehat{\psi}_y^\beta(M), \mathrm{N}) = (\psi_y^\beta(M), \mathrm{N})$ pour tout β.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Barlet & H.-M. Maire – « Développements asymptotiques, transformation de Mellin complexe et intégration sur les fibres », in *Séminaire d'analyse 1985-1986* (P. Lelong, P. Dolbeault & H. Skoda, éds.), Lect. Notes in Math., vol. 1295, Springer-Verlag, 1987, p. 11–23.

[2] J.-E. Björk – *Analytic $\mathscr{D}$-modules and applications*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1993.

[3] M. Kashiwara – « Regular holonomic $\mathscr{D}$-modules and distributions on complex manifolds », in *Complex analytic singularities*, Advanced Studies in Pure Math., vol. 8, 1986, p. 199–206.

[4] B. Malgrange – *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Math., vol. 96, Birkhäuser, Basel, Boston, 1991.

[5] ———, « Connexions méromorphes, II : le réseau canonique », *Invent. Math.* **124** (1996), p. 367–387.

[6] C. Sabbah – *Équations différentielles à points singuliers irréguliers et phénomène de Stokes en dimension* 2, Astérisque, vol. 263, Société Mathématique de France, Paris, 2000.