$\mathcal{D}$-MODULES ET CYCLES EVANESCENTS

(d'après B. Malgrange et M. Kashiwara)

C. SABBAH

INTRODUCTION.

B. Malgrange a montré dans [M_1] comment construire, étant donnée une fonction analytique $f : X \to \mathbb{C}$ sur une variété, un système différentiel holonome dont le complexe de de Rham soit quasi-isomorphe au complexe des cycles proches (ou évanescents) du faisceau constant sur X. Ce résultat a été généralisé par M. Kashiwara ([K_3]) pour tout $\mathcal{D}$-module holonome régulier. Pour cela il a introduit pour tout module holonome régulier sur X, et pour toute fonction lisse $f : X \to \mathbb{C}$ une filtration $V_k(M)_{k\in\mathbb{Z}}$, admettant un polynôme de Bernstein (voir § 2). En fait une telle filtration existe pour tout module holonome d'après ([Be], [K_2], [Bj_2], [La]).

Dans le premier paragraphe sont données quelques propriétés des $\mathcal{D}_X$-modules cohérents dont une filtration admet un polynôme de Bernstein. Ensuite j'étudie les propriétés de dualité dans cette catégorie en utilisant l'idée de M. Kashiwara qui consiste à résoudre un tel module par des modules dits élémentaires (§ 2).

Suivant M. Kashiwara, j'introduis une condition de régularité le long de $f^{-1}(0)=Y$, et j'explicite la démonstration du théorème de Malgrange et Kashiwara (essentiellement donnée dans [K_3]) pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers au sens de [K-K_2].

Dans le dernier paragraphe, j'applique ces résultats pour calculer les cycles évanescents du faisceau constant quand f est une fonction à croisements normaux, ce qui permet de retrouver des résultats de J. Steenbrink ([St_1], [St_2]). J'ai seulement voulu mettre en évidence le fait que la construction de la filtration de Hodge dans ce cas se fait exactement de la même manière que sur le système de Gauss-Manin d'une fonction à singularité isolée comme il est expliqué dans [Ph_2], ou [Sa_2], [St-Sch]. C'est pourquoi les démonstrations ne sont pas complètement détaillées. Pour des résultats plus précis, et la comparaison directe des deux constructions, voir [Sa_3]. Je signale enfin que ce point de vue permet de donner une définition directe de la structure de Hodge mixte sur les cycles évanescents d'une fonction à singularité isolée (ou de la structure de Hodge mixte limite associée à une fonction projective), définition qui ne fait pas intervenir une résolution des singularités (voir [Sa_5]).

Comme on le constate, les résultats rassemblés ici ne sont pas nouveaux (les calculs pour un diviseur à croisements normaux ont été faits indépendamment par M. Saito, qui a aussi donné des résultats analogues à ceux décrits plus haut (à paraitre)), mais il ne m'a pas semblé inutile d'en donner la présentation qui suit.

1. BONNES FILTRATIONS.

On considère dans la suite la situation suivante : $f : X \to \mathbb{C}$ est un morphisme lisse d'une variété lisse X dans $\mathbb{C}$. On ne s'intéressera en fait qu'au germe de f le long de $Y = f^{-1}(0)$. On notera par S un petit disque centré à l'origine, et on choisira une coordonnée t sur S.

On rappelle rapidement dans ce paragraphe des résultats de G. Laumon [L] et M. Kashiwara [K_3].

Soit I l'idéal de Y dans X, c'est-à-dire l'idéal $(t).\mathcal{O}_X$, et $\mathcal{D}_X$ l'anneau des opérateurs différentiels sur X. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$V_k(\mathcal{D}_X) = \{P \in \mathcal{D}_X / PI^j \subset I^{j-k}\} \quad \text{où} \quad I^{j-k} = \mathcal{O}_X \text{ si } j-k \leq 0 \quad .$$

Alors $(V_k(\mathcal{D}_X))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une filtration croissante de $\mathcal{D}_X$, la multiplication par t est d'ordre -1 et la multiplication par ∂_t d'ordre 1. L'anneau $gr_o^V(\mathcal{D}_X)$ s'identifie à $\mathcal{D}_Y[s]$, si on pose $s = \partial_t t$ et on remarque que la multiplication par $t : gr_o^V(\mathcal{D}_X) \to gr_{-1}^V(\mathcal{D}_X)$ et $\partial_t : gr_o^V(\mathcal{D}_X) \to gr_1^V(\mathcal{D}_X)$ sont des isomorphismes de $\mathcal{D}_Y$-modules. On a aussi pour $k > 0$:

$$V_{-k}(\mathcal{D}_X) = t^k V_o(\mathcal{D}_X) \quad .$$

On considère l'anneau de Rees $R_V(\mathcal{D}_X) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V_k(\mathcal{D}_X)\, \tau^k \subset \mathcal{D}_X[\tau,\tau^{-1}]$. Soit $\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ le morphisme naturel de déformation de X sur le fibré normal de Y dans X. On a une projection naturelle $p : \mathcal{X} \to X$ qui est un morphisme affine. On a alors $R_V(\mathcal{D}_X) = p_*(\mathcal{D}_{\mathcal{X}/\mathbb{C}})$ où $\mathcal{D}_{\mathcal{X}/\mathbb{C}}$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels relatifs au morphisme φ.

On considère d'autre part sur $\mathcal{D}_X$ la filtration $(F_\ell(\mathcal{D}_X))_{\ell\in\mathbb{N}}$ par l'ordre des opérateurs. On en déduit une bifiltration $(VF)_{k,\ell}(\mathcal{D}_X) = V_k(\mathcal{D}_X) \cap F_\ell(\mathcal{D}_X)$. Cette bifiltration permet de filtrer $R_V(\mathcal{D}_X)$ en posant

- $(VF)_{k,\ell}(\mathcal{D}_X) \,.\, (UF)_{k_o,\ell_o}(\mathcal{M}) = (UF)_{k+k_o,\ell+\ell_o}(\mathcal{M})$ pour $k \geq 0$, $\ell \geq 0$ et
  $(VF)_{k,\ell}(\mathcal{D}_X) \,.\, (UF)_{-k_o,\ell_o}(\mathcal{M}) = (UF)_{k-k_o,\ell+\ell_o}(\mathcal{M})$ pour $k \geq 0$, $\ell \geq 0$.

De plus $(VF)_{o,\ell}(\mathcal{D}_X)\; UF_{k,\ell_o}(\mathcal{M}) = (UF)_{k,\ell+\ell_o}(\mathcal{M})$ pour $k \in [-k_o,k_o]$ et $\ell \geq 0$ et

$(VF)_{k,o}(\mathcal{D}_X)\,(UF)_{k_o,\ell}(\mathcal{M}) = U_{k+k_o,\ell}(\mathcal{M})$

$(VF)_{-k,o}(\mathcal{D}_X)\; UF_{-k_o,\ell}(\mathcal{M}) = UF_{-k-k_o,\ell}(\mathcal{M})$ pour $k \geq 0$, $\ell \in [o,\ell_o]$.

On remarque que si on pose $U_k(\mathcal{M}) = \bigcup_\ell (UF)_{k,\ell}(\mathcal{M})$, $(U_k(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ définit une filtration de $\mathcal{M}$ bonne pour $V.(\mathcal{D}_X)$, et de même $F_\ell(\mathcal{M}) = \bigcup_k UF_{k,\ell}(\mathcal{M})$ est bonne pour $F.(\mathcal{D}_X)$.

Enfin, on montre comme dans [M_2] que la filtration $U.(\mathcal{M})$ est bonne pour $V.(\mathcal{D}_X)$ si et seulement si $R_U(\mathcal{M})$ est cohérent sur $R_V(\mathcal{D}_X)$, et la filtration $UF(\mathcal{M})$ est bonne pour $VF(\mathcal{D}_X)$ si et seulement si $R_{UF}(\mathcal{M})$ est cohérent sur $R_{VF}(\mathcal{D}_X)$ ou encore si et seulement si $gr^F R_U(\mathcal{M})$ est cohérent sur $gr^F R_V(\mathcal{D}_X)$.

On en déduit le lemme d'Artin-Rees :

(1.1) Lemme : Soit $U.(\mathcal{M})$ (resp. $UF(\mathcal{M})$) une bonne filtration (resp. une bonne bifiltration) d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$. Elle induit sur tout sous-quotient une bonne filtration (resp. une bonne bifiltration). ∎

(1.2) Remarque : On obtient à partir de $UF(\mathcal{M})$ une bonne filtration de $gr^U(\mathcal{M})$ en posant $F_\ell gr^U(\mathcal{M}) = \bigoplus_k F_\ell gr_k^U(\mathcal{M})$ avec $F_\ell gr_k^U(\mathcal{M}) = UF_{k,\ell}/UF_{k,\ell} \cap U_{k-1}$.

***

$$F_\ell(R_V(\mathcal{D}_X)) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (VF)_{k,\ell}(\mathcal{D}_X)\,\tau^k .$$

On a alors : $\mathrm{gr}^F(R_V(\mathcal{D}_X)) = p_*\,\pi_*\,\mathcal{D}_{T^*(X/\mathbb{C})}$ où $\pi : T^*(X/\mathbb{C}) \to X$ est la projection naturelle du fibré cotangent aux fibres de φ. Ceci permet de montrer que pour tout $x \in X$, $R_V(\mathcal{D}_X)_x$ est nœtherien.

Considérons enfin l'anneau de Rees associé à la bifiltration VF :

$$R_{VF}(\mathcal{D}_X) = \bigoplus_{\ell\in\mathbb{N}} \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (VF)_{k,\ell}(\mathcal{D}_X)\,\tau^k\,\theta^\ell .$$

Par définition, on a $R_{VF}(\mathcal{D}_X) = R_F(R_V(\mathcal{D}_X))$. Si on filtre $R_{VF}(\mathcal{D}_X)$ par la filtration suivante :

$$F_\ell(R_F(R_V(\mathcal{D}_X))) = \bigoplus_{j\geq 0} F_\ell(R_V(\mathcal{D}_X)) \cap F_j(R_V(\mathcal{D}_X))\,\theta^j ,$$

on voit que $\mathrm{gr}^F(R_{VF}(\mathcal{D}_X))$ est isomorphe à $\mathrm{gr}^F(R_V(\mathcal{D}_X)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\theta]$. On en déduit que pour tout $x \in X$, $R_{VF}(\mathcal{D}_X)_x$ est nœtherien.

On peut alors comme dans [M_2] montrer la cohérence des faisceaux $R_V(\mathcal{D}_X)$ et $R_{VF}(\mathcal{D}_X)$.

Soit maintenant $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent. Une filtration croissante $(U_k(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ sera dite bonne par rapport à $V.(\mathcal{D}_X)$ si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- $U_k(\mathcal{M})$ est $V_o(\mathcal{D}_X)$-cohérent pour tout $k\in\mathbb{Z}$;
- $\mathcal{M} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} U_k(\mathcal{M})$;
- $V_{k'}(\mathcal{D}_X).U_k(\mathcal{M}) \subset U_{k'+k}(\mathcal{M})$ pour tous $k,k'\in\mathbb{Z}$,

  avec égalité pour $k'\geq 0$ et $k\geq k_o \gg 0$, et $k'\leq 0$ et $k\leq -k_o$.

On a de même la notion de bifiltration $((UF)_{k,\ell}(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z},\ell\in\mathbb{N}}$ bonne pour $VF(\mathcal{D}_X)$:

- $(UF)_{k,\ell}(\mathcal{M})$ est $\mathcal{O}_X$-cohérent (ici $\mathcal{O}_X = VF_{0,0}(\mathcal{D}_X)$) ;
- $\bigcup_{k,\ell} (UF)_{k,\ell}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$;
- $(VF)_{k',\ell'}(\mathcal{D}_X).\,F_{k,\ell}(\mathcal{M}) \subset UF_{k+k',\ell+\ell'}(\mathcal{M})$.
- Il existe deux entiers positifs k_o et ℓ_o avec les propriétés suivantes :

$U'_k \subset U_{k+\ell}$ et $U_h \subset U'_{k-1}$. Donc si on pose $b'_k(s) = b(s+k+\ell)\ldots b(s+h+1)$, on a $b'_k(\partial_t t)\,U'_k \subset U'_{k-1}$. Le polynôme $b'(s) = \prod_{-k_o}^{k_o} b'_k(s-k)$ est alors un polynôme de Bernstein pour U'. ∎

(2.1.4) <u>Conséquence</u> : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module dans $\mathcal{B}_Y$ et u une section locale de $\mathcal{M}$. Il existe un unique polynôme unitaire minimal $b(s;u)$ vérifiant $b(\partial_t t;u).u = P.u$ avec $P \in V_{-1}(\mathcal{D}_X)$.

En effet le $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{D}_X.u$ est dans $\mathcal{B}_Y$ d'après (2.1.2) et la filtration $U.(\mathcal{D}_X.u) = V.(\mathcal{D}_X).u$ est bonne pour $V.(\mathcal{D}_X)$. Elle admet donc un polynôme de Bernstein, d'où le résultat. ∎

(2.1.5) <u>Proposition</u> ([K_3]) : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module dans $\mathcal{B}_Y$ et soit $G\subset\mathbb{C}$ l'image d'une section de $\mathbb{C}\to\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Il existe alors une unique filtration $V^G_{.}(\mathcal{M})$ bonne pour $V.(\mathcal{D}_X)$ et un polynôme unitaire $b\in\mathbb{C}[s]$ tels que $b^{-1}(0)\subset G$ et pour tout $k\in\mathbb{Z}$ $b(\partial_t t+k)\,V^G_k(\mathcal{M}) \subset V^G_{k-1}(\mathcal{M})$. ∎

(2.1.6) <u>Corollaire</u> : Pour toute suite exacte de $\mathcal{D}_X$-modules dans $\mathcal{B}_Y$, $0\to\mathcal{M}'\to\mathcal{M}\to\mathcal{M}''\to 0$, la suite graduée

$$0 \longrightarrow \mathrm{gr}_k^{V^G}(\mathcal{M}') \longrightarrow \mathrm{gr}_k^{V^G}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{gr}_k^{V^G}(\mathcal{M}'') \longrightarrow 0$$

est exacte si G est une section de $\mathbb{C}\to\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. ∎

Dans la suite, on notera simplement $V.(\mathcal{M})$ la filtration $V^G_{.}(\mathcal{M})$ où $G = \{s\in\mathbb{C} \,/\, 0\leq s<1\}$ (l'ordre est l'ordre lexicographique sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}\oplus i\mathbb{R}$).

(2.1.7) <u>Proposition</u> : Si $k\geq 0$, on a $V_k(\mathcal{M}) = V_k(\mathcal{D}_X)\,.\,V_o(\mathcal{M})$,

et si $k\leq -1$, on a $V_k(\mathcal{M}) = V_{k+1}(\mathcal{D}_X)\,.\,V_{-1}(\mathcal{M})$.

2. LA CATEGORIE $\mathcal{B}_Y$.

On note $\mathcal{B}_Y$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules à gauche, cohérents, qui vérifient la propriété suivante :

(2.1.1) Il existe, localement sur Y, une filtration $(U_k(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ bonne pour $V.(\mathcal{D}_X)$ et un polynôme non nul $b\in\mathbb{C}[s]$ tels que, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on ait

$$b(\partial_t t+k)\ U_k(\mathcal{M})\subset U_{k-1}(\mathcal{M}) \quad .$$

Etant donnée une telle bonne filtration, on notera $b(s;U.)$ le polynôme minimal unitaire associé à cette filtration. On dira aussi que la bonne filtration admet un polynôme de Bernstein.

(2.1.2) Proposition : Dans une suite exacte de $\mathcal{D}_X$-modules cohérents $0\to\mathcal{M}'\to\mathcal{M}\to\mathcal{M}''\to 0$, le module $\mathcal{M}$ est dans $\mathcal{B}_Y$ si et seulement si $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ le sont.

Preuve : Si $\mathcal{M}$ est dans $\mathcal{B}_Y$, Soit $U.(\mathcal{M})$ une bonne filtration admettant un polynôme de Bernstein. Elle induit sur $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ des bonnes filtrations (lemme (1.1)) qui admettent tout autant un polynôme de Bernstein. Inversement, une bonne filtration $U.(\mathcal{M})$ induit des bonnes filtrations $U.(\mathcal{M}')$ et $U.(\mathcal{M}'')$. D'après le lemme ci-dessous, ces filtrations admettent un polynôme de Bernstein. Il en est de même pour $U.(\mathcal{M})$. ■

(2.1.3) Lemme : Soit $U.(\mathcal{M})$ une bonne filtration de $\mathcal{M}$ admettant un polynôme de Bernstein. Alors toute bonne filtration $U'.(\mathcal{M})$ en admet un aussi.

Preuve : On sait qu'il existe $k_o\geq 0$ tel que pour tout $k\geq 0$ on ait $U'_{k+k_o}(\mathcal{M})=V_k(\mathcal{D}_X).U'_{k_o}(\mathcal{M})$ et $U'_{-k-k_o}(\mathcal{M})=V_{-k}(\mathcal{D}_X)\ U_{-k_o}(\mathcal{M})$. On en déduit qu'il suffit de trouver un polynôme $b'\in\mathbb{C}[s]$ tel que pour tout $k\in[-k_o,k_o]$ on ait $b'(\partial_t t+k)\ U_k(\mathcal{M})\subset U_{k-1}(\mathcal{M})$. Il existe par ailleurs deux entiers h et ℓ tels que

Soit Λ la matrice

$$\begin{bmatrix} (\partial_t t)^{\ell}\mathrm{Id} & Q \\ 0 & b(t\partial_t)\ \mathrm{Id}-P \end{bmatrix}$$

On a donc un morphisme surjectif

$$\mathcal{D}_X^{p+q}/\mathcal{D}_X^{p+q}.\Lambda \longrightarrow \mathcal{M}\longrightarrow 0 \quad .$$

Définition : Un $\mathcal{D}_X$-module cohérent est élémentaire s'il admet localement une présentation

$$\mathcal{D}_X^p\oplus\mathcal{D}_X^q \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D}_X^p\oplus\mathcal{D}_X^q\longrightarrow L\longrightarrow 0$$

où φ est la multiplication à droite par une matrice Λ comme ci-dessus.

On notera $V.(h)$ la filtration sur $\mathcal{D}_X$ définie par $V_k(h)(\mathcal{D}_X)=V_{k+h}(\mathcal{D}_X)$. Si on considère sur $\mathcal{D}_X^p\oplus\mathcal{D}_X^q$ la filtration $U.(\mathcal{D}_X^p\oplus\mathcal{D}_X^q)=V.(\mathcal{D}_X^p)\oplus V.(-1)(\mathcal{D}_X^q)$, on voit que le morphisme φ est filtré, et si $b^{-1}(0)\subset\{s\,/\,0\leqslant s<1\}$, la filtration induite sur L est la filtration $V.(L)$. De plus, en graduant, on voit que gr φ est injectif, donc aussi φ, et par suite φ induit un résolution de L. Enfin on a une suite exacte

$$0\longrightarrow\mathcal{D}_X^q/\mathcal{D}_X^q(b(t\partial_t)\ \mathrm{Id}-P)\longrightarrow L\longrightarrow\mathcal{D}_X^p/\mathcal{D}_X^p(\partial_t t)^{\ell}\longrightarrow 0 \quad .$$

Remarque : On aurait pu donner la définition suivante pour un $\mathcal{D}_X$-module élémentaire, mais nous ne nous en servirons pas pour la catégorie $\mathcal{B}_Y$:

Il existe une présentation locale $\bigoplus_j L_j\xrightarrow{\varphi}\bigoplus_j L_j\to L\to 0$, où L_j est un $\mathcal{D}_X$-module libre muni de la filtration $V.(j)$, et $\varphi=\varphi_o+\psi$, où φ_o est la multiplication par $b(\partial_t t+j)$ sur L_j et ψ est d'ordre -1 par rapport à la filtration $V.(\bigoplus_j L_j)$.

Preuve : Pour tout entier k on a des morphismes de $\mathcal{D}_{X/S}$-modules

$$\partial_t : V_k(\mathcal{M}) \longrightarrow V_{k+1}(\mathcal{M})$$

et

$$t : V_k(\mathcal{M}) \longrightarrow V_{k-1}(\mathcal{M})$$

et donc un couple de morphismes $gr^V_{k-1}(\mathcal{M}) \underset{t}{\overset{\partial_t}{\rightleftarrows}} gr^V_k(\mathcal{M})$.

L'endomorphisme $\partial_t t : gr^V_k(\mathcal{M}) \to gr^V_k(\mathcal{M})$ admet un polynôme minimal avec racines dans $\{s \in \mathbb{C} / -k \leq s < k+1\}$. Donc si $k \neq 0$, c'est un isomorphisme. De même, si $k \neq 0$, l'endomorphisme $t\partial_t : gr^V_{k-1}(\mathcal{M}) \to gr^V_{k-1}(\mathcal{M})$ est un isomorphisme. Par suite $\partial_t : gr^V_k(\mathcal{M}) \to gr^V_{k+1}(\mathcal{M})$ est un isomorphisme pour $k \geq 0$ et $k \leq -2$. On en déduit que pour $k \geq 0$ on a $V_{k+1}(\mathcal{M}) = V_1(\mathcal{D}_X)\ V_k(\mathcal{M})$, d'où la première assertion. De même, si $k \leq -1$, le morphisme $t : gr^V_k(\mathcal{M}) \to gr^V_{k-1}(\mathcal{M})$ est un isomorphisme. On en déduit que $V_{k-1}(\mathcal{M}) = t\ V_k(\mathcal{M}) + V_{k-2}(\mathcal{M})$. De plus, il existe un entier $k_o > 0$ tel que, pour $k' \geq 0$ on ait $V_{-k_o-k'}(\mathcal{M}) = V_{-k'}(\mathcal{D}_X)\ V_{-k_o}(\mathcal{M})$. Par suite $V_{-k_o}(\mathcal{M}) = t\ V_{-k_o+1}(\mathcal{M}) + V_{-k_o-1}(\mathcal{M}) = t.V_{-k_o+1}(\mathcal{M})$. On en déduit par récurrence que pour tout entier $k \leq -1$ on a $V_{k-1}(\mathcal{M}) = t.V_k(\mathcal{M})$. ∎

(2.1.8) $\mathcal{D}_X$-modules élémentaires.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module dans B_Y. On choisit localement un système de générateurs de $\mathcal{M}$ de la manière suivante :

$v_1,\dots,v_q$ sont des générateurs de $V_{-1}(\mathcal{M})$ comme $V_o(\mathcal{D}_X)$-module. Soit $\mathcal{M}'$ le $\mathcal{D}_X$-module cohérent engendré par $V_{-1}(\mathcal{M})$ et $\mathcal{M}''$ le quotient $\mathcal{M}/\mathcal{M}'$. On remarque que $\mathcal{M}''$ est à support dans Y et par conséquent le polynôme de Bernstein de $V.(\mathcal{M}'')$ est s^ℓ pour en certain entier ℓ. On considère des éléments $(u_1,\dots,u_p)$ de $V_o(\mathcal{M})$ dont les images engendrent $V_o(\mathcal{M}'')$ comme $V_o(\mathcal{D}_X)$-module. Il existe alors une matrice à éléments P_{ij} $(1 \leq i,\ j \leq q)$ dans $V_{-1}(\mathcal{D}_X)$ telle que l'on ait $b(\partial_t t-1)v_i = \sum_j P_{ij}\ v_j$ $(i=1,\dots,q)$, et une matrice à éléments $Q_{k,j}$ $(1 \leq k \leq p,\ 1 \leq j \leq q)$ dans $V_o(\mathcal{D}_X)$ telle que l'on ait $(\partial_t t)^\ell u_k = \Sigma\ Q_{k,j}\ v_j$ $(1 \leq k \leq p)$.

(2.1.9) Proposition : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module dans B_Y, et ℓ un entier. Il existe localement sur X une résolution $\mathcal{L}.$ de $\mathcal{M}$ par des $\mathcal{D}_X$-modules élémentaires :

$$\mathcal{L}_{-\ell} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{L}_{-1} \longrightarrow \mathcal{L}_o \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0 ,$$

où tous les $\mathcal{L}_i$ ont pour polynôme de Bernstein $b(s;V.(\mathcal{M}))$. De plus le complexe induit pour tout entier k un complexe $gr^V_k(\mathcal{L}.)$ qui est une résolution libre du $\mathcal{D}_Y$-module $gr^V_k(\mathcal{M})$. ∎

Remarque : Cela montre, s'il en était besoin, que $gr^V_k(\mathcal{M})$ est $\mathcal{D}_Y$-cohérent.

(2.2) Localisation et microlocalisation le long de Y.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module. Le localisé de $\mathcal{M}$ le long de Y est le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}[1/t]$ (voir [P_1] ou [K_2]). On dira que $\mathcal{M}$ est local si la multiplication par t est inversible, autrement dit si $\mathcal{M}$ est égal à son localisé.

(2.2.1) Proposition : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module dans B_Y. Alors sont localisé le long de Y est aussi dans B_Y (en particulier est cohérent).

Il suffit de montrer ce résultat pour un $\mathcal{D}_X$-module élémentaire puisque le foncteur de localisation est exact (Y est de codimension 1).

(2.2.2) Lemme : Soit $\mathcal{L}'$ le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{D}^p_X/\mathcal{D}^p_X(b(\partial_t t)\ I - P)$ où $b^{-1}(0) \subset \{s / 0 \leq s < 1\}$, et P est une matrice $p \times p$ à coefficients dans $V_{-1}(\mathcal{D}_X)$. Alors $\mathcal{L}'$ est local.

On remarque que pour tout entier k, le morphisme induit par la multiplication à gauche par $t : gr^V_k(\mathcal{L}') \to gr^V_{k-1}(\mathcal{L}')$ est un isomorphisme : c'est clair pour $k \neq 0$, et pour $k = 0$ on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow V_o(\mathcal{D}_X^p) \xrightarrow{b(\partial_t t)I-P} V_o(\mathcal{D}_X^p) \longrightarrow V_o(L') \longrightarrow 0 \quad .$$

Comme $t : V_o(\mathcal{D}_X) \to V_{-1}(\mathcal{D}_X)$ est un isomorphisme, on en déduit l'assertion.

Par suite, la multiplication à gauche par $t : L' \to L'$ est injective. D'autre part, pour tout entier $k \geqslant 0$ on a $V_{k-1}(L') = t\, V_k(L') + V_{k-2}(L')$ et par récurrence $V_{k-1}(L') = t\, V_k(L') + V_{-2}(L')$. Comme $V_{-2}(L') = t\, V_{-1}(L')$, on voit que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $V_{k-1}(L') = t\, V_k(L')$ et t est surjectif. ▪

(2.2.3) <u>Lemme</u> : Le localisé d'un $\mathcal{D}_X$-module élémentaire $L_1 = \mathcal{D}_X^q / \mathcal{D}_X^q (b(t\partial_t)\ I - P)$ est isomorphe au $\mathcal{D}_X$-module $L' = \mathcal{D}_X^q / \mathcal{D}_X^q (b(\partial_t t)\ I - P')$ où P et P' sont deux matrices à coefficients dans $V_{-1}(\mathcal{D}_X)$.

<u>Preuve</u> : On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_X^q \arrow[r, ".(b(t\partial_t)\ I-P)"] \arrow[d, ".t"'] & \mathcal{D}_X^q \arrow[d, ".t"] \\
\mathcal{D}_X^q \arrow[r, ".(b(\partial_t t)\ I-P')"'] & \mathcal{D}_X^q
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont la multiplication <u>à droite</u> par t, et où on a posé $P = t\,.\,R$ et $P' = R\,.\,t$.

On en déduit un morphisme $\lambda : L \to L'$ qui induit un isomorphisme $V_{-1}(L) \to V_{-1}(L')$. Cela montre que $\mathrm{Ker}\ \lambda$ et $\mathrm{coker}\ \lambda$ sont à support dans Y, et λ induit un isomorphisme au niveau des localisées. ▪

<u>Preuve de (2.2.1)</u> : Si L est un $\mathcal{D}_X$-module élémentaire, on a une suite exacte $0 \to L_1 \to L \to L_2 \to 0$ (cf. (2.1.8)), d'où une suite exacte $0 \to L_{1\,\mathrm{loc}} \to L_{\mathrm{loc}} \to L_{2\,\mathrm{loc}} \to 0$. Mais le morphisme $L_2 \to L_{2\,\mathrm{loc}}$ est un isomorphisme et $L_{1\,\mathrm{loc}}$ est dans $\mathcal{B}_Y$ d'après (2.2.3), donc L_{loc} aussi. ▪

<u>Remarque</u> : On dit qu'un $\mathcal{D}_X$-module est microlocal si ∂_t y est inversible. Le module L_1 ci-dessus n'est pas microlocal, mais son gradué l'est (on le voit en utilisant le fait que $\partial_t : \mathrm{gr}_o^V(\mathcal{D}_X) \to \mathrm{gr}_1^V(\mathcal{D}_X)$ est un isomorphisme). C'est pourquoi au § 3 on travaillera avec le gradué plutôt qu'avec le module lui-même. On notera $\mathcal{M}_{\mu\ \mathrm{loc}} = \mathcal{M}[\partial_t^{-1}]$ le microlocalisé d'un $\dot{\mathcal{D}}_X$-module. On voit alors :

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module dans $\mathcal{B}_Y$. Alors $(\mathrm{gr}^V(\mathcal{M})_{\mu\ \mathrm{loc}}$ est un $\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_X)$-module dans $\mathcal{B}_Y$. Soit L un $\mathcal{D}_X$-module élémentaire dans $\mathcal{B}_Y$. Alors $\mathrm{gr}^V(L)$ est un $\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_X)$-module somme directe d'un module local et d'un module microlocal. On a

$$\mathrm{gr}^V(L) = L' \oplus L'' \quad \text{où} \quad L' = \mathcal{D}_X^p / \mathcal{D}_X^p\, b(\partial_t t) \quad \text{et} \quad L'' = \mathcal{D}_X^q / \mathcal{D}_X^q\, b(t\partial_t)$$

Pour L', la localisation est un isomorphisme et la microlocalisation est la multiplication à droite par ∂_t ; pour L'', la localisation est la multiplication à droite par t et la microlocalisation est un isomorphisme.

(2.3) <u>Filtration par l'ordre local relatif à</u> Y (voir [K-K$_2$] § (1.5) ou [L]).

Dans la suite on va considérer des filtrations indexées par $\mathbb{C}$ avec l'ordre lexicographique. La notion de bonne filtration est analogue à celle définie au § 1. On notera $U_{<\alpha}(\mathcal{M}) = \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta(\mathcal{M})$ et $\overline{\mathrm{gr}}^U_\alpha(\mathcal{M}) = U_\alpha(\mathcal{M}) / U_{<\alpha}(\mathcal{M})$. L'intérêt de cette notion a été montré par M. Saito ([Sa$_{1,\dots,4}$]).

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module dans $\mathcal{B}_Y$ et u une section locale de $\mathcal{M}$. On a défini le polynôme $b(s;u)$ en (2.1.4).

(2.3.1) <u>Définition</u> : L'ordre de u le long de Y est le sous-ensemble suivant de $\mathbb{C}$

$$\mathrm{ord}_Y\, u = \{ s \in \mathbb{C} \ /\ b(s;u) = 0 \} \ .$$

(2.3.2) <u>Proposition</u> : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module dans $\mathcal{B}_Y$. Il existe une unique filtration $(V_\alpha(\mathcal{M}))_{\alpha\in\mathbb{C}}$ bonne par rapport à $V.(\mathcal{D}_X)$ telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, l'opérateur

$\partial_t t$ sur $\overline{gr}^V_\alpha(M)$ ait pour polynôme minimal une puissance de $(s+\alpha)$. De plus on a localement $V_\alpha(M) = \{u \in M \,/\, \mathrm{ord}_Y\, u \in s \,/\, s \geqslant -\alpha\}$. Enfin, si α est entier, $V_\alpha(M)$ coïncide avec $V_\alpha(M)$ défini en (2.1.7).

Preuve : Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et posons $G_\alpha = \{s \in \mathbb{C} \,/\, -\alpha \leqslant s < -\alpha+1\}$, et $G_\alpha^- = \{s \in \mathbb{C} \,/\, -\alpha < s \leqslant -\alpha+1\}$. On pose aussi $V_\alpha(M) = \{u \in M \,/\, \mathrm{ord}_Y\, u \geqslant -\alpha\}$ et $V_{<\alpha}(M) = \{u \in M \,/\, \mathrm{ord}_Y\, u > -\alpha\}$.

Assertion : On a pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $V_\alpha(M) = V_o^{G_\alpha}(M)$ et $V_{<\alpha}(M) = V_o^{G_\alpha^-}(M)$.

Si cette assertion est montrée, on en déduit que $V_\alpha(M)$ est un $V_o(\mathcal{D}_X)$-module cohérent. De plus, il est clair que $V_o^{G_{\alpha+k}} = V_k^{G_\alpha}$ (cf. (2.1.5)) et par suite la filtration entière $(V_k(m))_{k\in\mathbb{Z}}$ coïncide avec celle définie en (2.1.7). On voit aussi qu'on a $V_{<\alpha}(M) = V_{\alpha-1}(M) + \gamma_\alpha(\partial_t t)\; V_\alpha(M)$, où γ_α est une puissance de $s+\alpha$ (comme en (2.1.5)), et par suite le polynôme minimal de $\partial_t t$ sur $\overline{gr}^V_\alpha(M)$ est une puissance de $s+\alpha$. Enfin, par le lemme ci-dessous, il n'existe qu'un nombre fini de $\alpha \in [-1,0]$ tels que $\overline{gr}^V_\alpha(M) \neq 0$. Ceci permet de conclure que $(V_\alpha(M))_{\alpha\in\mathbb{C}}$ est une bonne filtration.

(2.3.3) Lemme : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a une décomposition en somme directe

$$gr_k^V(M) = \bigoplus_{k-1<\alpha\leqslant k} \overline{gr}^V_\alpha(M) ,$$

et $\overline{gr}^V_\alpha(M)$ est isomorphe au sous-module de $gr_k^V(M)$ sur lequel le polynôme minimal de $\partial_t t$ est une puissance de $(s+\alpha)$. ∎

Preuve de l'assertion : On va montrer que $V_\alpha(M) = V_o^{G_\alpha}(M)$, et l'autre partie est analogue.

. On a $V_\alpha(M) \subset V_o^{G_\alpha}(M)$.

Soit $u \in V_\alpha(M)$. On a donc $\mathrm{ord}_Y\, u \subset \{s \,/\, s \geqslant -\alpha\}$. Soit $b(s) = b(s;u)$. Alors $b(\partial_t t-k) \ldots b(\partial_t t-1)\,.\,b(\partial_t t).\, u \in V_{-k-1}(\mathcal{D}_X)\,.\,u$. Mais pour k assez grand on a $V_{-k-1}(\mathcal{D}_X)\,.\,u \subset V_o^{G_\alpha}(M)$. On pose $\varphi(\partial_t t) = b(\partial_t t-k) \ldots b(\partial_t t)$. Les racines de φ sont $\geqslant -\alpha$. Par suite φ est premier au polynôme $b(s+h\,;V_\cdot^{G_\alpha}(M))$ pour tout $h \geqslant 1$. D'autre part il existe un entier N tel que $u \in V_N^{G_\alpha}(M)$. Si $N \geqslant 1$, on va montrer qu'en fait $u \in V_{N-1}^{G_\alpha}$: en effet $\varphi(\partial_t t)u \in V_o^{G_\alpha}(M)$, et $b(\partial_t t+N\,;V_\cdot^{G_\alpha})u \in V_{N-1}^{G_\alpha}$, donc $u \in V_{N-1}^{G_\alpha}$. Finalement, $u \in V_o^{G_\alpha}(M)$.

. On a $V_o^{G_\alpha}(M) \subset V_\alpha(M)$.

Soit $u \in V_o^{G_\alpha}(M)$. On pose $N = \mathcal{D}_X\,.\,u$. Alors $u \in V_o^{G_\alpha}(N)$ puisque $V_o^{G_\alpha}(N) = N \cap V_o^{G_\alpha}(M)$. Il existe alors un entier $k \geqslant 0$ tel que $V_{-1}(\mathcal{D}_X)\,.\,u \supset V_{-k}^{G_\alpha}(N)$. On en déduit que

$$b_{G_\alpha}(\partial_t t)\; b_{G_\alpha}(\partial_t t-1) \ldots b_{G_\alpha}(\partial_t t-k)\; u \in V_{-1}(\mathcal{D}_X)\,.\,u$$

et par suite $\mathrm{ord}_Y\, u \geqslant -\alpha$. ∎

(2.3.4) Exemples : Soit M une connexion régulière au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$. Si N désigne le module des germes de fonctions de classe de Nilsson à l'origine de $\mathbb{C}$, il existe un espace vectoriel E muni d'un automorphisme T tel que le germe à l'origine M_o soit égal à $(N \otimes_{\mathbb{C}} E)^T$ (voir [D_i], [P_1]). Autrement dit, si $N = -\frac{1}{2i\pi} \mathrm{Log}\, T_u$, où T_u est la partie unipotente de la monodromie T, tout élément u de M_o a un développement asymptotique

$$u = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}\\ \alpha\geqslant\alpha(u)}} t^\alpha\, t^N\, A_\alpha^u \quad , \qquad \text{avec } A_\alpha^u \in \mathrm{Ker}(T - e^{-2i\pi\alpha}\,\mathrm{Id})^p,\ p \gg 0 .$$

On a posé $\alpha(u) = \inf\{\alpha \,/\, A_\alpha^u \neq 0\}$. On voit alors que la filtration $(V_\beta(M_o))_{\beta\in\mathbb{C}}$ est définie par $V_\beta(M_o) = \{u \in M_o \,/\, \alpha(u) \geqslant -(\beta+1)\}$.

De même, si on considère un germe de système différentiel holonome régulier microlocal à l'origine, tout élément u de M_o a un développement asymptotique (cf. [P_1]) :

$$u = \sum_{\beta\leqslant\beta(u)} \delta^{\beta I - N}\, B_u^\beta \ ,$$

où δ est la microfonction de Dirac à l'origine et $V_\beta(M_o) = \{u \in M_o \,/\, \beta(u) \leqslant \beta\}$.

(2.4) Restriction à Y.

Soit M un $\mathcal{D}_X$-module. On note $i_Y^* M$ le complexe de $\mathcal{D}_Y$-modules $\mathcal{O}_Y \overset{L}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} M$ (cf. [K2]). Autrement dit, $i_Y^* M = \{0 \to M \xrightarrow{t} M \to 0\}$.

(2.4.1) Proposition : Si M est dans $\mathcal{B}_Y$, $i_Y^* M$ est à cohomologie cohérente, et représenté par le complexe $\overline{gr}_0^V(M) \xrightarrow{t} \overline{gr}_{-1}^V(M)$.

Preuve : On montre qu'on a des quasi-isomorphismes de complexes

$$\begin{array}{ccc} V_0(M) & \hookrightarrow & M \\ \downarrow t & & \downarrow t \\ V_{-1}(M) & \hookrightarrow & M \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} V_0(M) & \longrightarrow & \overline{gr}_0^V(M) \\ \downarrow t & & \downarrow t \\ V_{-1}(M) & \longrightarrow & \overline{gr}_{-1}^V(M) \end{array}$$

Pour cela, il suffit de montrer que $t : M/V_0(M) \to M/V_{-1}(M)$ et $t : V_{<0}(M) \to V_{<-1}(M)$ sont bijectifs, ce qui résulte facilement des définitions. ■

(2.5) $\mathcal{D}_X$-modules à droite.

On peut définir une catégorie $\mathcal{B}_Y^d$ de $\mathcal{D}_X$-modules à droite : on a une définition analogue de bonne filtration $U.(M)$. La propriété (2.1.1) se traduit par

$$U_k(M)\, b(\partial_t t - k) \subset U_{k-1}(M) \quad .$$

On note maintenant $V_\beta(M) = \{u \ / \ \mathrm{ord}_Y\, u \leq \beta\}$ et $V_{<\beta}(M) = \{u \ / \ \mathrm{ord}_Y\, u < \beta\}$, pour un module à droite M dans $\mathcal{B}_Y^d$. Soit M^g le $\mathcal{D}_X$-module à gauche associé à M. On peut supposer que $M = M^g$ et que la structure à gauche sur M est définie par $P\,.\,m = m\,.\,P^*$, où P^* est l'adjoint de P (par exemple $(\partial_t t)^* = -t\partial_t$). On a alors : $V_\beta(M) = V_{-\beta+1}(M^g)$.

Notons maintenant $V_k(M)$ (resp. $V_k(M^g)$) la filtration de M définie par la section de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ donnée par $\{s \in \mathbb{C} \ / \ 0 \leq s < 1\}$, et $V_k^*(M)$ (resp. $V_k^*(M^g)$) celle définie par $\{s \ / \ 0 < s \leq 1\}$. On a alors

$$V_k(M) = V_k^*(M^g) \qquad \text{et} \qquad V_k^*(M) = V_k(M^g) \quad .$$

***

3. DUALITE DANS LA CATEGORIE $\mathcal{B}_Y$.

(3.1) Stabilité de la catégorie $\mathcal{B}_Y$ par dualité.

Soit M un $\mathcal{D}_X$-module cohérent sur une variété X. On notera M^* le complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche associé au complexe $\mathbb{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M,\mathcal{D}_X)$ de $\mathcal{D}_X$-modules à droite, décalé de dim X, autrement dit

$$M^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\omega_X, \mathbb{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M,\mathcal{D}_X))[\dim X] \quad ,$$

où $\omega_X = \Omega_X^{\dim X}$ est le faisceau des formes différentielles de degré maximum, vu comme $\mathcal{D}_X$-module à droite (cf. [K2] par exemple).

(3.1.1) Proposition : Soit M un $\mathcal{D}_X$-module dans $\mathcal{B}_Y$. Alors les groupes de cohomologie $H^j(M^*)$ sont aussi dans $\mathcal{B}_Y$.

Preuve : On commence d'abord par traiter le cas d'un $\mathcal{D}_X$-module élémentaire. Soit L un tel module. On a une résolution locale

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_X^p \oplus \mathcal{D}_X^q \xrightarrow{\cdot\Lambda} \mathcal{D}_X^p \oplus \mathcal{D}_X^q \longrightarrow L \longrightarrow 0 \quad ,$$

où Λ est une matrice comme en (2.1.8). On en déduit que le complexe $\mathbb{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(L,\mathcal{D}_X)$ est quasi-isomorphe au complexe

$$0 \longleftarrow \mathcal{D}_X^p \oplus \mathcal{D}_X^q \xleftarrow{\Lambda\cdot} \mathcal{D}_X^p \oplus \mathcal{D}_X^q \longleftarrow 0$$

et on en déduit les résultats suivants :

- $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(L,\mathcal{D}_X) = 0$ sauf pour $j = 1$;
- si $L^\vee$ est le $\mathcal{D}_X$-module à gauche associé à $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(L,\mathcal{D}_X)$, alors $L^\vee$ est dans $\mathcal{B}_Y$.

On en déduit aussi le résultat suivant, et donc la proposition :

(3.1.2) Lemme : Soit M un $\mathcal{D}_X$-module dans $\mathcal{B}_Y$ et soit $L_\cdot \to M \to 0$ une résolution locale de M par des modules élémentaires. Alors les morphismes naturels $L^\vee_{-i-1} \leftarrow L^\vee_{-i}$ définissent un complexe $L^\vee_\cdot$ quasi-isomorphe à $M^*[-\dim X + 1]$. ∎

(3.2) Dualité sur les gradués.

Soit M un $\mathcal{D}_X$-module dans $\mathcal{B}_Y$. Rappelons que la multiplication par $t : \overline{gr}^V_{-1}(M) \to \overline{gr}^V_{-2}(M)$ est inversible, la multiplication par $\partial_t : \overline{gr}^V_o(M) \to \overline{gr}^V_1(M)$ l'est aussi, ainsi que le sont pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}$ la multiplication par $t : \overline{gr}^V_\alpha(M) \to \overline{gr}^V_{\alpha-1}(M)$ et par $\partial_t : \overline{gr}^V_\alpha(M) \to \overline{gr}^V_{\alpha+1}(M)$.

(3.2.1) Proposition : Etant donné un $\mathcal{D}_X$-module dans $\mathcal{B}_Y$, il existe des isomorphismes de $\mathcal{D}_Y$-modules définis localement :

$$\delta_{-1} : \overline{gr}^V_{-1}(H^j(M^*)) \longrightarrow H^j(\overline{gr}^V_{-1}(M)^*)$$

et

$$\delta_o : \overline{gr}^V_o(H^j(M^*)) \longrightarrow H^j(\overline{gr}^V_o(M)^*)$$

qui vérifient : ${}^t(N) \circ \delta_{-1} = \delta_{-1} \circ (-N)$ et ${}^t(N) \circ \delta_o = \delta_o \circ (-N)$. De plus, par ces isomorphismes le transposé du morphisme $\partial_t : \overline{gr}^V_{-1} \to \overline{gr}^V_o$ correspond au morphisme $t : \overline{gr}^V_{-1} \to \overline{gr}^V_o$ et celui de $t : \overline{gr}^V_o \to \overline{gr}^V_{-1}$ au morphisme $-\partial_t : \overline{gr}^V_{-1} \to \overline{gr}^V_o$ (on a posé N = partie nilpotente de l'opérateur $\partial_t t$).

Pour les $\mathcal{D}_Y$-modules $\overline{gr}^V_\alpha(M)$, on dispose simultanément de dualités de nature locale (du type de δ_{-1}) et de nature microlocale (du type de δ_o).

(3.2.2) Proposition : Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $-1 < \alpha < 0$, on a des isomorphismes locaux :

$$\delta_{-1} : \overline{gr}^V_\alpha(H^j(M^*)) \longrightarrow H^j(\overline{gr}^V_{-1-\alpha}(M)^*)$$

et

$$\delta_o^\cdot : \overline{gr}^V_\alpha(H^j(M^*)) \longrightarrow H^j(\overline{gr}^V_{-1-\alpha}(M)^*)$$

qui vérifient ${}^t(N) \circ \delta_{-1} = \delta_{-1} \circ (-N)$ et ${}^t(N) \circ \delta_o = \delta_o \circ (-N)$.

(3.2.4) Réduction au cas d'un $gr^V(\mathcal{D}_X)$-module élémentaire gradué.

Soit M un $\mathcal{D}_X$-module dans $\mathcal{B}_Y$ muni de sa filtration V. Une résolution locale de M par des $\mathcal{D}_X$-modules libres filtrés par V., telle que les morphismes de ce complexe soient strictement compatibles à la filtration V, permet de définir sur chaque groupe $H^j(M^*)$ une bonne filtration V' qui ne dépend pas du choix d'une telle résolution.

On a alors un isomorphisme naturel qui ne dépend pas non plus du choix de la résolution (à un isomorphisme local près) :

$$gr^{V'}(H^j(M^*)) \xrightarrow{\sim} H^j(gr^V(M)^*) \quad .$$

Cet isomorphisme est bien sûr strict pour les filtrations V des deux membres et d'autre part on a

$$\overline{gr}^V_\alpha(gr^{V'}(H^j(M^*))) = \overline{gr}^V_\alpha(H^j(M^*))\ .$$

Ceci permet de ramener la construction des isomorphismes δ au cas où M est un $gr^V(\mathcal{D}_X)$-module gradué.

Dans ce cas, on choisit une résolution locale de M par des $gr^V(\mathcal{D}_X)$-modules élémentaires gradués $L. \to M \to 0$, de polynôme de Bernstein égal à $b(s;V.(M))$. On remarque qu'un tel module élémentaire est projectif dans la catégorie des $gr^V(\mathcal{D}_X)$-modules gradués de polynôme de Bernstein divisant b. Par suite, si on a construit de manière naturelle les isomorphismes δ pour les L, on en déduit des isomorphismes δ pour M, qui ne dépendent pas de la résolution choisie du fait de la projectivité.

(3.3) <u>Preuve des propositions</u> (3.2.1) <u>et</u> (3.2.2) <u>dans le cas des</u> $gr^V(\mathcal{D}_X)$<u>-modules élémentaires gradués</u>.

Soit L un $\mathcal{D}_X$-module élémentaire dans B_Y. On a vu que $gr^V(L)$ est somme directe d'un module local et d'un module microlocal (2.2). Dans ce paragraphe on considère un $gr^V(\mathcal{D}_X)$-module gradué L.

(3.3.1) <u>Lemme</u> : Le morphisme de localisation $loc : L \to L_{loc}$ induit un isomorphisme $\overline{gr}^V_{-1}(L) \to \overline{gr}^V_{-1}(L_{loc})$ et pour tout $\alpha \notin \mathbb{Z}$ un isomorphisme $\overline{gr}^V_\alpha(L) \to \overline{gr}^V_\alpha(L_{loc})$ et son transposé $loc^\vee : L^\vee_{loc} \to L^\vee$ un isomorphisme $\overline{gr}^V_{-1}(L^\vee_{loc}) \to \overline{gr}^V_{-1}(L^\vee)$ et $\overline{gr}^V_\alpha(L^\vee_{loc}) \to \overline{gr}^V_\alpha(L^\vee)$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$. On a un résultat analogue avec le morphisme de microlocalisation et $\overline{gr}^V_o(L)$.

Il suffit de montrer le lemme pour le morphisme loc et un module microlocal L. Un tel module admet une résolution

$$0 \longrightarrow gr^V(\mathcal{D}_X)^p \xrightarrow{b(t\partial_t)} gr^V(\mathcal{D}_X)^p \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

et loc est donné par le morphisme de complexes (cf. (2.2)) :

$$\begin{tikzcd} gr^V(\mathcal{D}_X)^p \arrow[r, ".b(t\partial_t)"] \arrow[d, ".t"'] & gr^V(\mathcal{D}_X)^p \arrow[d, ".t"] \\ gr^V(\mathcal{D}_X)^p \arrow[r, ".b(\partial_t t)"'] & gr^V(\mathcal{D}_X)^p \end{tikzcd}$$

et induit donc un isomorphisme de complexes

$$\begin{tikzcd} gr^V_o(\mathcal{D}_X)^p \arrow[r, "b(t\partial_t)"] \arrow[d, "\wr"'] & gr^V_o(\mathcal{D}_X)^p \arrow[d, "\wr"] \\ gr^V_{-1}(\mathcal{D}_X)^p \arrow[r, "b(\partial_t t)"] & gr^V_{-1}(\mathcal{D}_X)^p \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire un isomorphisme $gr^V_{-1}(L) \to gr^V_{-1}(L_{loc})$.

De même le transposé (à droite) $loc^\dagger : L^\dagger_{loc} \to L^\dagger$ (ici $L^\dagger = Ext^1_{gr^V(\mathcal{D})}(L, gr^V(\mathcal{D}))$ est donné par le morphisme de complexes de $\mathcal{D}_X$-modules à droite

$$\begin{tikzcd} gr^V(\mathcal{D}_X)^p & gr^V(\mathcal{D}_X)^p \arrow[l, "b(t\partial_t)."'] \\ gr^V(\mathcal{D}_X)^p \arrow[u, "t."] & gr^V(\mathcal{D}_X)^p \arrow[l, "b(\partial_t t)."'] \arrow[u, "t."'] \end{tikzcd}$$

qui induit un isomorphisme de complexes

$$\begin{tikzcd} gr^V_{-1}(\mathcal{D}_X)^p & gr^V_{-1}(\mathcal{D}_X)^p \arrow[l, "b(t\partial_t)"'] \\ gr^V_o(\mathcal{D}_X)^p \arrow[u, "t."] & gr^V_o(\mathcal{D}_X)^p \arrow[l, "b(\partial_t t)"'] \arrow[u, "t."'] \end{tikzcd}$$

C'est-à-dire un isomorphisme $gr^V_o(L^\dagger_{loc}) \to gr^V_o(L^\dagger)$.

En passant aux $\mathcal{D}_X$-modules à gauche, on trouve un isomorphisme (cf. (2.5))

$$gr^{V*}_o(L^\vee_{loc}) \longrightarrow gr^{V*}_o(L^\vee)\ ,$$

d'où un isomorphisme $\overline{gr}^V_{-1}(L^\vee_{loc}) \to \overline{gr}^V_{-1}(L^\vee)$. Le reste se montre de la même manière. ∎

Ce lemme permet de ramener la construction des isomorphismes δ au cas d'un module local ou microlocal : si par exemple on a construit δ_{-1} pour un module local, on en déduit δ_{-1} pour L par

$$\begin{tikzcd} \overline{gr}^V_{-1}(L^\vee) \arrow[r, dashed, "\delta_{-1}"] & \overline{gr}^V_{-1}(L)^\vee \\ gr^V_{-1}(L^\vee_{loc}) \arrow[u, "loc^\vee", "\wr"'] \arrow[r, "\delta_{-1}"] & gr^V_{-1}(L^\vee_{loc}) \arrow[u, "\wr", "{}^t(loc)"'] \end{tikzcd}$$

(3.3.2) Définition de δ_o et δ_{-1}.

On va construire δ_o et δ_{-1} pour la proposition (3.2.1). On laisse au lecteur le soin d'examiner la proposition (3.2.2).

Remarquons d'abord qu'on a un isomorphisme naturel

$$u_o : gr^V_o(Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}^p_X,\mathcal{D}_X)) \longrightarrow Hom_{gr^V_o(\mathcal{D}_X)}(gr^V_o(\mathcal{D}^p_X), gr^V_o(\mathcal{D}_X)) \quad .$$

Soit L un $gr^V(\mathcal{D}_X)$-module élémentaire local. On a une présentation

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}^p_X \xrightarrow{b(\partial_t t)} \mathcal{D}^p_X \longrightarrow L \longrightarrow 0 \quad .$$

L'isomorphisme u_o induit donc un isomorphisme

$$gr^V_o(L^+) \xrightarrow{\sim} Ext^1_{gr^V_o(\mathcal{D}_X)}(gr^V_o(L), gr^V_o(\mathcal{D}_X)) \quad \text{de } gr^V_o(\mathcal{D}_X)\text{-modules.}$$

Si on pose $s = \partial_t t$, on a $gr^V_o(\mathcal{D}_X) = \mathcal{D}_Y[s]$ et $gr^V_o(L)$ est isomorphe à $\mathcal{D}^p_Y \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[s]/b(s)\,\mathbb{C}[s]$.
On a alors un isomorphisme naturel de $\mathcal{D}_Y$-modules qui préserve l'action de s :

$$Ext^1_{gr^V_o(\mathcal{D}_X)}(gr^V_o(L), gr^V_o(\mathcal{D}_X)) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}_Y}(gr^V_o(L),\mathcal{D}_Y) = gr^V_o(L)^+ \quad ,$$

où l'action de s sur $Hom_{\mathcal{D}_Y}(gr^V_o(L),\mathcal{D}_Y)$ est transposée de celle de s sur $gr^V_o(L)$.
Explicitons cet isomorphisme dans le cas où Y est un point, le cas général s'en déduit immédiatement :

Soient $E = \mathbb{C}[s]/b(s)\mathbb{C}[s]$ et $E' = Ext^1_{\mathbb{C}[s]}(E,\mathbb{C}[s]) \simeq \mathbb{C}[s]/b(s)\mathbb{C}[s]$. On a un isomorphisme naturel $E' \to Hom_{\mathbb{C}}(E,\mathbb{C})$ construit comme suit : on décompose E en $\oplus E_\alpha$ avec $E_\alpha \simeq \mathbb{C}[s]/(s+\alpha)^\ell\,\mathbb{C}[s]$ puis on fait sur chaque E_α une translation de s pour se ramener au cas où $b(s) = s^\ell$. On considère l'accouplement parfait

$$\mathbb{C}[\partial/\partial s] \times \mathbb{C}[s] \longrightarrow \mathbb{C}$$

donné par $(P(\partial/\partial s),Q(s)) \to P(\partial/\partial s)(Q(s))|_{s=0}$.
L'orthogonal de l'idéal $s^\ell\,\mathbb{C}[s]$ dans $\mathbb{C}[\partial/\partial s]$ se projette bijectivement sur $\mathbb{C}[\partial/\partial s]/(\partial/\partial s)^\ell\,\mathbb{C}[\partial/\partial s]$. L'isomorphisme $E' \to Hom_{\mathbb{C}}(E,\mathbb{C})$ est donné par $s^k \to (\partial/\partial s)^{\ell-1-k}(.)|_{s=0}$.

On a donc maintenant un isomorphisme de $\mathcal{D}_Y$-modules qui préserve l'action de s : $\varphi_o : gr^V_o(L^+) \to gr^V_o(L)^+$. Enfin, puisque L est local, on a un isomorphisme de $\mathcal{D}_Y$-modules

$${}^t(t.^{-1}) : gr^V_o(L)^+ \longrightarrow gr^V_{-1}(L)^+$$

qui décale de 1 l'action de s, d'où un isomorphisme $\lambda_{-1} = {}^t(t.^{-1}) \circ \varphi_o$. En passant aux modules à gauche, on obtient

$$\delta_{-1} : gr^{V*}_o(L^\vee) \longrightarrow gr^V_{-1}(L)^\vee$$

qui transforme l'action de s en celle de $-s+2$, d'où un isomorphisme

$$\delta_{-1} : \overline{gr}^V_{-1}(L^\vee) \longrightarrow gr^V_{-1}(L)^\vee$$

tel que ${}^t(N) \circ \delta_{-1} = \delta_{-1} \circ (-N)$.

Le cas microlocal se traite de même : soit L admettant une présentation

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_X^p \xrightarrow{b(t\partial_t)} \mathcal{D}_X^p \longrightarrow L \longrightarrow 0 \ .$$

Alors u_o induit un isomorphisme

$$\psi_1 \ : \ \mathrm{gr}_1^V(L^\dagger) \longrightarrow \mathrm{gr}_{-1}^V(L)^\dagger$$

et en composant à droite par ${}^t(\partial_t^{-1}) : \mathrm{gr}_{-1}^V(L)^\dagger \to \mathrm{gr}_o^V(L)^\dagger$, puis en passant aux modules à gauche, on obtient un isomorphisme $\delta_o : \mathrm{gr}_1^{V*}(L^\vee) \to \mathrm{gr}_o^V(L)^\vee$ qui transforme l'action de s en celle de -s. D'où un isomorphisme

$$\delta_o \ : \ \overline{\mathrm{gr}}_o^V(L^\vee) \longrightarrow \overline{\mathrm{gr}}_o^V(L)^\vee \ .$$

Il reste enfin à vérifier que les isomorphismes δ_{-1} et δ_o ainsi construits sont naturels. Cela résulte du fait qu'un morphisme $L \to L'$ se relève en un morphisme des résolutions et de ce que les constructions faites ci-dessus sont naturelles au niveau des résolutions.

Calculons maintenant le transposé des morphismes t. et ∂_t. .

On se ramène par exemple au cas d'un module élémentaire gradué local. Il suffit de montrer, en reprenant les notations précédentes, qu'on a ${}^t(t.) \circ \delta_{-1} = \delta_o \circ (-\partial_t.)$. On note par τ_{+1} (resp. τ_{-1}) l'automorphisme du $\mathcal{D}_Y$-module $\mathcal{D}_Y[s]$ défini par $s \mapsto s+1$ (resp. $s \mapsto s-1$). On a alors sur $\mathrm{gr}_o^V(\mathcal{D}_X)$: $(\partial_t.) = (.\partial_t) \circ \tau_{+1}$ et $(t.) = (.t) \circ \tau_{-1}$. Soit $L^+ = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(L, \mathcal{D}_X)$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}_o^V(L^\dagger) \arrow[r, "\varphi_o", "\sim"'] \arrow[d, dashed, "?"'] & \mathrm{gr}_o^V(L)^\dagger \arrow[r, "{}^t(t^{-1}.)", "\sim"'] & \mathrm{gr}_{-1}^V(L)^\dagger \arrow[d, "{}^t(t.)", "\wr"'] \\
\mathrm{gr}_o^V(L^\dagger) \arrow[rr, "\lambda_o", "\sim"'] & & \mathrm{gr}_o^V(L)^\dagger \\
\mathrm{gr}_1^V(L^\dagger_{\mu\ \mathrm{loc}}) \arrow[u, "(\partial_t.)"] \arrow[r, "\sim", "\psi_1"'] & \mathrm{gr}_{-1}^V(L_{\mu\ \mathrm{loc}})^\dagger \arrow[r, "\sim", "{}^t(\partial_t^{-1}.)"'] & \mathrm{gr}_o^V(L_{\mu\ \mathrm{loc}})^\dagger \arrow[u, "{}^t(\partial_t.)={}^t(\mu\ \mathrm{loc})"']
\end{tikzcd}$$

On doit calculer " ? ". Rappelons que sur $\mathrm{gr}_o^V(\mathcal{D}_X)$ on a $b(\partial_t t) \circ \tau_{-1} = \tau_{+1} \circ b(t\partial_t)$ et par suite $\varphi_o \circ \tau_{+1} = {}^t(\tau_{-1}) \circ \psi_1$. Donc

$$? = (\partial_t.) \circ \psi_1^{-1} \circ {}^t(\tau_{+1}) \circ \varphi_o = (\partial_t.) \circ (\tau_{-1}) = (.\partial_t) \ .$$

En passant aux modules à gauche, on en déduit le résultat voulu. ∎

***

4. PARENTHESE.

Dans le but d'être complet, je donne dans ce paragraphe une preuve du fait que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome alors $\mathcal{M}$ est dans $\mathcal{B}_Y$, ce qui a été démontré en ces termes par J.E. Björk [Bj$_2$] et Y. Laurent [La]. En fait la démonstration ci-dessous suit exactement celle donée par M. Kashiwara pour un énoncé analogue ([K$_1$]).

(4.1) Théorème : Si $\mathcal{M}$ est holonome et si $U.(\mathcal{M})$ est une filtration de $\mathcal{M}$ bonne pour $V.(\mathcal{D}_X)$, alors $\mathrm{gr}^U(\mathcal{M})$ est $\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_X)$-holonome, et par suite $\mathcal{M}$ est dans $\mathcal{B}_Y$.

Preuve : Soit N un $\mathcal{D}_{X/S}$-module cohérent sur lequel la multiplication par t est injective et dont la variété caractéristique relative est relativement holonome en dehors de t=0. Il résulte du théorème (2.5) de $[K_2]$ que le $\mathcal{D}_Y$-module N/tN est holonome: Pour le voir, on plonge X dans X×S comme graphe de f et on remarque que l'image directe N' de N peut aussi être vu comme un $\mathcal{D}_X$-module sous-holonome hors de t=0. Soit maintenant $\phi: \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ la déformation de X sur le fibré normal de Y dans X. En coordonnées, $\mathcal{X}$ est l'hypersurface de $X\times\mathbb{C}^2$ d'équation t-uv=0 et ϕ est la projection définie par v. Si $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, conoyau de $\mathcal{O}_X[u,v] \xrightarrow{t-uv} \mathcal{O}_X[u,v]$, le module de Rees $R_U(M)$ est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}/\mathbb{C}}$-module cohérent qui vérifie les propriétés ci-dessus. On en déduit que $gr^U(M) = R_U(M)/tR_U(M)$ est holonome.

***

5. LA CATEGORIE R_Y.

On considère dans ce paragraphe la sous-catégorie R_Y de la catégorie B_Y, formée des $\mathcal{D}_X$-modules qui vérifient une condition de régularité supplémentaire, introduite par M. Kashiwara ($[K_1]$, $[K_3]$). Il résulte en particulier de $[K\text{-}K_1]$ lemme 4.1.5 que tout $\mathcal{D}$-module holonome régulier au sens de $[K\text{-}K_2]$ est dans R_Y. On verra que pour M dans R_Y, $V_k(M)$ est $\mathcal{D}_{X/S}$-cohérent, ce qui, quand X = S et Y = {0}, est équivalent à la condition de régularité habituelle (voir par exemple $[P_1]$).

(5.1) Condition de régularité.

Soit M un $\mathcal{D}_X$-module dans B_Y, et considérons une bifiltration $(UF)_{k,\ell}(M)$ bonne pour $(VF)(\mathcal{D}_X)$. Il existe alors un polynôme b non nul et un entier $\lambda \geq 0$ tels que

$$b(\partial_t t + k)(UF)_{k,\ell} \subset (UF)_{k-1,\ell+\lambda} .$$

On peut décaler la bifiltration UF et obtenir comme dans la prop. (2.1.5) une bifiltration VF telle que $b^{-1}(0) \subset \{s/0 \leq s < 1\}$.

(5.1.1) Définition : On dira que M est dans R_Y si M est dans B_Y et si il existe une bifiltration UF telle que l'entier λ soit $\leq$ deg b.

On vérifie alors que la propriété est aussi satisfaite pour la bifiltration VF.

(5.1.2) Proposition : Dans une suite exacte de $\mathcal{D}_X$-modules cohérents

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 ,$$

M est dans R_Y si et seulement si M' et M'' le sont.

Si M est dans R_Y, on déduit de (1.1) que M' et M'' le sont aussi. Inversement, étant données deux bonnes bifiltrations $VF_{k,\ell}(M')$ et $VF_{k,\ell}(M'')$ satisfaisant (5.1.1), il suffit de construire une bonne filtration de M qui induise les bifiltrations $VF(M')$ et $VF(M'')$ (à un décalage près). Rappelons d'abord la définition suivante :

(5.1.3) Définition : Un morphisme $\varphi : M \to M'$ est strictement bifiltré si on a $\varphi(UF_{k,\ell}(M)) = UF_{k,\ell}(M') \cap \varphi(M)$.

On peut construire localement un morphisme surjectif strictement bifiltré $\varphi : L \to M'' \to 0$ où L est un $\mathcal{D}_X$-module libre de la forme $L = \bigoplus_{\substack{-k_o \leq k \leq k_o \\ 0 \leq \ell \leq \ell_o}} L_{k,\ell}$, où $L_{k,\ell}$ est un $\mathcal{D}_X$-module libre muni de la bifiltration naturelle décalée de (k,ℓ), et L est muni de la bifiltration somme directe. Soit K le noyau de φ. Un relèvement de φ en un morphisme $L \to M$ permet de construire un morphisme $K \to M'$. Si on munit K de la bifiltration induite de celle de L, on peut, quitte à décaler la bifiltration de M', supposer que ce morphisme est bifiltré. On met alors sur M la bifiltration qui provient de celle de $L \oplus M'$, qui convient. ■

On a la notion de $\mathcal{D}_X$-module élémentaire dans la catégorie $\mathcal{R}_Y$: soit b un polynôme non nul dans $\mathbb{C}[s]$. Un $\mathcal{D}_X$-module élémentaire de polynôme b est un $\mathcal{D}_X$-module qui admet localement la présentation suivante :

$$\bigoplus_{\substack{-k_o \leqslant k \leqslant k_o \\ 0 \leqslant \ell \leqslant \ell_o}} L_{k,\ell} \xrightarrow{\varphi} \oplus L_{k,\ell}(0,\deg b) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

où $L_{k,\ell}$ est un $\mathcal{D}_X$-module libre muni de la bifiltration naturelle décalée de (k,ℓ); i.e. $L_{k,\ell} \simeq \mathcal{D}_X^p$ et $VF_{k',\ell'}(L_{k,\ell}) = VF_{k+k',\ell+\ell'}(\mathcal{D}_X^p)$. On a aussi noté $L_{k,\ell}(0, \deg b)$ le module $L_{k,\ell}$ décalé de $(0,\deg b)$.

De plus, le morphisme φ vérifie les conditions suivantes :

on a $\varphi = \varphi_o + \psi$, où φ_o est la multiplication par $b(\partial_t t + k)$ sur $L_{k,\ell}$, et ψ est de degré $(-1,0)$ par rapport à VF. De plus, on a

$$\psi(L_{k,\ell}) \subset \bigoplus_{\ell'} L_{k-1,\ell'} \quad ,$$

sauf pour $k = -k_o$, auquel cas

$$\psi(L_{-k_o,\ell}) \subset \bigoplus_{\ell'} L_{-k_o,\ell'} \quad .$$

On voit comme en (2.1.8) que le morphisme φ est injectif et induit une résolution libre de $\mathcal{L}$. Enfin pour tout $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{R}_Y$, il existe localement un $\mathcal{D}_X$-module élémentaire $\mathcal{L}$ et un morphisme surjectif $\mathcal{L} \to \mathcal{M} \to 0$. On en déduit l'existence locale d'une résolution de $\mathcal{M}$, strictement bifiltrée par des $\mathcal{D}_X$-modules élémentaires dans $\mathcal{R}_Y$. On obtient ainsi :

(5.1.4) Corollaire : Si $\mathcal{M}$ est dans $\mathcal{R}_Y$, les groupes de cohomologie $H^j(\mathcal{M}^*)$ sont aussi dans $\mathcal{R}_Y$. ∎

(5.1.5) Proposition : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module dans $\mathcal{R}_Y$. Alors pour tout k, $V_k(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{D}_{X/S}$-module cohérent.

On considère sur $\mathcal{D}_X$ la filtration $F_{S,\cdot}(\mathcal{D}_X)$ par le degré en ∂_t uniquement. On a $F_{S,o}(\mathcal{D}_X) = \mathcal{D}_{X/S}$. Si $F_{S,\cdot}(\mathcal{M})$ est une bonne filtration sur $\mathcal{M}$, $F_{S,\ell}(\mathcal{M})$ est donc $\mathcal{D}_{X/S}$-cohérent pour tout ℓ. On va montrer que si $\mathcal{M}$ est dans $\mathcal{R}_Y$, il existe une filtration $F_{S,\cdot}(\mathcal{M})$ pour laquelle $V_k(\mathcal{M}) \subset F_{S,\ell}(\mathcal{M})$ pour un entier $\ell = \ell(k)$, ce qui prouvera la proposition. On se ramène au cas d'un $\mathcal{D}_X$-module élémentaire $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{R}_Y$, avec une présentation locale comme plus haut. On considère sur $L_{k,\ell}$ la filtration F_S, filtration naturelle sur $L_{k,\ell} \simeq \mathcal{D}_X^p$. On voit alors en considérant l'action de $(\partial_t t)^{\deg b}$ sur les générateurs de $L_{k,\ell}$ qu'on a :

$$F_{S,\deg b}(L_{k,\ell}) \cap V_{-k}(L_{k,\ell}) \subset \varphi(V_{-k}(L_{k,\ell})) + F_{S,\mathrm{deb}\ b-1}(L_{k,\ell}) \cap V_{-k}(L_{k,\ell})$$

$$+ \bigoplus_{\ell'} F_{S,\deg b}(L_{k-1,\ell'}) \cap V_{-(k-1),\ell'}(L_{k-1,\ell'})$$

si $k \neq -k_o$, et

$$F_{S,\deg b}(L_{-k_o,\ell}) \cap V_{k_o}(L_{-k_o,\ell}) \subset \varphi(V_{k_o}(L_{-k_o,\ell}))$$

$$+ \bigoplus_{\ell'} F_{S,\deg b-1}(L_{-k_o,\ell'}) \cap V_{k_o}(L_{-k_o,\ell'}) \quad ,$$

puisque sur $L_{-k_o,\ell}$ on a $\varphi = b(\partial_t t) - t.P$, et donc $(\partial_t t)^{\deg b} = \varphi + \eta$ avec $\eta \in F_{S,\deg b-1}$.
On en déduit que pour tout entier $j \geqslant 0$, on a

$$F_{S,\deg b+j}(L_{k,\ell}) \cap V_{-k}(L_{k,\ell}) \subset \mathrm{Im}\ \varphi + F_{S,\deg b-1}(L)$$

et par suite

$$V_o(L) \subset \mathrm{Im}\ \varphi + F_{S,\deg b-1}(L)$$

ce qui montre que $V_o(\mathcal{L}) \subset F_{S,\deg b-1}(\mathcal{L})$. On en déduit le résultat. ∎

6. CYCLES EVANESCENTS ET $\mathcal{D}_X$-MODULES ([M_1], [K_3]).

(6.0) Rappelons rapidement la construction de Deligne des cycles évanescents (cf. [D_1], [Br_2]).

Soit $F^\cdot$ un complexe de faisceaux d'espaces vectoriels sur X. On note $S^* = S \setminus \{0\}$ et $\widetilde{S}^* \to S^*$ le revêtement universel. Soit $p : \widetilde{S}^* \to S$ l'application naturelle. On note de même $\widetilde{X}^*$ le produit fibré de $\widetilde{S}^* \to S$ par $f : X \to S$, et $\pi : \widetilde{X}^* \to X$ l'application naturelle. On pose $\psi_f(F^\cdot) = i^{-1}\ \mathbb{R}\pi_*\pi^* F^\cdot$, où $i : f^{-1}(0) \to X$ est l'inclusion. On a un morphisme naturel

$$i^{-1} F^\cdot \longrightarrow \psi_f(F^\cdot) \quad .$$

Le cône de ce morphisme est noté $\Phi_f(F^\cdot)$. C'est le complexe simple associé à ce complexe double. On a un morphisme canonique

$$\psi_f(F^\cdot) \longrightarrow \Phi_f(F^\cdot)$$

et un morphisme de variation $\Phi_f(F) \to \psi_f(F^\cdot)$ donné par le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccc} i^{-1}(F^\cdot) & \longrightarrow & \psi_f(F^\cdot) \\ \downarrow & & \downarrow \text{T-id} \\ 0 & \longrightarrow & \psi_f(F^\cdot) \end{array}$$

où T désigne la monodromie sur $\psi_f(F^\cdot)$.

On montrera dans ce paragraphe le résultat suivant :

(6.0.1) Théorème ([M_1], [K_3]) : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome dans R_Y. On a des quasi-isomorphismes canoniques

$$\psi_f(DR(\mathcal{M})) \longrightarrow DR\Big(\bigoplus_{-1 \leq \alpha < 0} \overline{gr}^V_\alpha(\mathcal{M})\Big)$$

$$\Phi_f(DR(\mathcal{M})) \longrightarrow DR\Big(\bigoplus_{-1 < \alpha \leq 0} \overline{gr}^V_\alpha(\mathcal{M})\Big)$$

de sorte que la monodromie soit donnée par $\exp 2i\pi\ \partial_t t$, le morphisme canonique par ∂_t sur $\overline{gr}^V_{-1}(\mathcal{M})$ et par Id sur $\overline{gr}^V_\alpha(\mathcal{M})$, pour $-1 < \alpha < 0$, et le morphisme variation par $t \, . \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2i\pi}{n!}\right)^n (\partial_t t)^{n-1}$ sur $\overline{gr}^V_o(\mathcal{M})$ et T - Id sur $\overline{gr}^V_\alpha(\mathcal{M})$, $-1 < \alpha < 0$.

On peut alors déduire facilement de ce résultat, de ceux des § 3 et 4 et de [Me]:

(6.0.2) Corollaire : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module dans R_Y. On a alors des quasi-isomorphismes (localement sur X) :

$$\psi_f(D(DR(\mathcal{M})))[-2] \longrightarrow D\ \psi_f(DR(\mathcal{M}))$$

et

$$\Phi_f(D(DR(\mathcal{M})))[-2] \longrightarrow D\ \Phi_f(DR(\mathcal{M}))$$

où D désigne la dualité de Verdier. De plus le couple

$$D\ \psi_f(DR(\mathcal{M})) \underset{{}^t(\text{Var})}{\overset{{}^t(\text{Can})}{\leftrightarrows}} D\ \Phi_f(DR(\mathcal{M}))$$

est isomorphe au couple

$$\psi_f(D(DR(\mathcal{M})))[-2] \underset{\text{Can}}{\overset{-T \circ \text{Var}}{\leftrightarrows}} \Phi_f(D(DR(\mathcal{M})))[-2] \ . \quad \blacksquare$$

(6.0.3) Remarque : On obtient ainsi des quasi-isomorphismes locaux analogues à ceux de (6.0.1) en remplaçant le foncteur DR par le foncteur des solutions holomorphes (cf. [Me]). Une autre démonstration est donnée dans [Br_2] .

(6.1) Cas où f l'est l'identité.

On suppose donc que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_S$-module holonome régulier.

On a $DR(\mathcal{M}) = \{\mathcal{M} \to \Omega_S^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}\}$ où $\mathcal{O} = \mathcal{O}_S$. On va calculer $\psi_{Id}(\mathcal{M})$.

(6.1.1) Lemme : On a $\psi_{Id}(\mathcal{M}) = i^{-1} p_*(\Omega^{\cdot}_{\widetilde{S}^*} \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{S}^*}} p^* \mathcal{M})$.

En effet, $p^*\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{\widetilde{S}^*}$-module cohérent (c'est une connexion), et par suite comme l'image inverse par p d'un ouvert de Stein de S est un ouvert de Stein, on a $\mathbb{R}^i p_*(\Omega^k_{\widetilde{S}^*} \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{S}^*}} p^*\mathcal{M}) = 0$ pour $k = 0,1$, d'où le résultat. ∎

Une fois choisie une coordonnée t sur S, et une coordonnée τ sur $\widetilde{S}^*$, de sorte que $t = \exp 2i\pi\,\tau$, on a

$$\psi_{Id}(\mathcal{M}) = \{0 \to \widetilde{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_o \xrightarrow{\partial_\tau} \widetilde{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_o \to 0\} ,$$

où $\widetilde{\mathcal{O}} = (p_*\mathcal{O}_{\widetilde{S}^*})_o$, et où ∂_τ opère sur $\mathcal{M}_o$ par $2i\pi\, t\partial_t$.

On considère le sous-complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_o \xrightarrow[2i\pi\, t\partial_t]{} \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_o \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{N}$ désigne l'anneau des germes de fonctions de classe de Nilsson en 0.

On a alors le résultat classique (voir par exemple $[M_1]$) :

(6.1.2) Proposition : Si $\mathcal{M}$ est régulier en 0, le morphisme naturel de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_o & \longrightarrow & \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_o & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_o & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_o & \longrightarrow 0 \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme. ∎

Remarquons maintenant que puisque $p^*\mathcal{M}$ est une connexion, le complexe $0 \to \widetilde{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_o \to \widetilde{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_o \to 0$ n'a de cohomologie qu'en degré 0. Autrement dit, on a un quasi-isomorphisme naturel

$$\psi_{Id}(DR(\mathcal{M})) \longrightarrow \mathrm{Ker}[(2i\pi\, t\partial_t) : \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_o \to \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_o] .$$

On vérifie alors qu'un élément de $\mathrm{Ker}(2i\pi\, t\partial_t)$ s'écrit de manière unique $u = \sum_{-1 \leqslant \alpha < 0} e_\alpha\, t^\alpha\, t^N$ avec $N = (-2i\pi\, t\partial_t) : \overline{gr}^V_\alpha(\mathcal{M}) \to \overline{gr}^V_\alpha(\mathcal{M})$ et $e_\alpha \in \overline{gr}^V_\alpha(\mathcal{M})$.
On a donc une application naturelle $\mathrm{Ker}(2i\pi\, t\partial_t) \to \bigoplus_{-1 \leqslant \alpha < 0} \overline{gr}^V_\alpha(\mathcal{M})$ qui à un élément de $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ associe le coefficient de t^α, et c'est un isomorphisme. On a ainsi décrit le quasi-isomorphisme

$$\psi_{Id}(DR(\mathcal{M})) \longrightarrow \bigoplus_{-1 \leqslant \alpha < 0} \overline{gr}^V_\alpha(\mathcal{M}) .$$

Le reste du théorème (6.0.1) se démontre de la même manière. ∎

(6.2) Cas général.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome dans $\mathcal{R}_Y$. Commençons d'abord par remarquer le fait général suivant :

$DR(\mathcal{M})$ est le complexe simple associé au complexe double

$$\Omega^{\cdot}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \xrightarrow{ds} f^{-1}(\Omega^1_S) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} (\Omega^{\cdot}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) .$$

On va montrer qu'on a un quasi-isomorphisme $\psi_f(DR(\mathcal{M})) \to DR(\bigoplus_{-1 \leqslant \alpha < 0} \overline{gr}^V_\alpha(\mathcal{M}))$, et laisser le reste de la preuve au lecteur. Pour cela, on va d'abord décrire le morphisme ci-dessus, puis on montrera que c'est un isomorphisme.

(6.2.1) Description du morphisme :

$$
\begin{array}{c}
\psi_f(\mathrm{DR}(\mathcal{M})) \\
\uparrow \\
i^{-1}\pi_*(f^{-1}(\Omega^{\cdot}_{S^*}) \underset{f^{-1}(\mathcal{O}_S)}{\otimes} \pi_*^{-1}\mathrm{DR}_{X/S}(\mathcal{M})) \\
\wr\| \\
i^{-1}\pi_*\{(0 \to f^{-1}(\mathcal{O}_{\tilde{S}^*}) \underset{f^{-1}(\mathcal{O}_S)}{\otimes} \pi^{-1}(\mathrm{DR}_{X/S}(\mathcal{M})) \to f^{-1}(\mathcal{O}_{\tilde{S}^*}) \underset{f^{-1}(\mathcal{O}_S)}{\otimes} \pi^{-1}(\mathrm{DR}_{X/S}(\mathcal{M})) \to 0\} \\
\wr\| \\
\{0 \to f^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}) \underset{f^{-1}(\mathcal{O})}{\otimes} \mathrm{DR}_{X/S}(\mathcal{M}) \longrightarrow f^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}) \underset{f^{-1}(\mathcal{O})}{\otimes} \mathrm{DR}_{X/S}(\mathcal{M}) \longrightarrow 0\} \\
\uparrow \\
\{0 \to f^{-1}(\mathcal{N}) \underset{f^{-1}(\mathcal{O})}{\otimes} \mathrm{DR}_{X/S}(\mathcal{M}) \xrightarrow{2i\pi t\partial_t} f^{-1}(\mathcal{N}) \underset{f^{-1}(\mathcal{O})}{\otimes} \mathrm{DR}_{X/S}(\mathcal{M}) \longrightarrow 0\} \\
\uparrow \\
\mathrm{Ker}\ 2i\pi\ t\partial_t \\
\downarrow \\
\underset{-1 \leq \alpha < 0}{\oplus} \mathrm{DR}(\overline{\mathrm{gr}}^V_\alpha(\mathcal{M}))
\end{array}
$$

Pour montrer que tous les morphismes sont des quasi-isomorphismes, on le vérifie en chaque point $x \in f^{-1}(0)$. On est alors ramené à montrer les résultats de (6.1) pour le complexe $\int_{f|_U} \mathcal{M}$, où U est un polydisque assez petit au voisinage de x. Choisissons une résolution de $\mathcal{M}$ par des $\mathcal{D}_X$-modules élémentaires dans $\mathcal{R}_Y$. Il suffit de montrer les résultats pour $\int_{f|_U} L$, si L est un tel module. Si L admet une présentation comme en (5.2)

$$\oplus\, \mathcal{D}_X^{p_{k,\ell}}(k,\ell) \xrightarrow{\ \varphi\ } \oplus\, \mathcal{D}_X^{p_{k,\ell}}(k,\ell+\deg b) \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

on voit que $\int_{f|_U} L$ admet la présentation

$$\oplus\mathcal{D}_S^{p_{k,\ell}}(k,\ell)\,\hat{\otimes}\,F \xrightarrow{\int_{f|_U}\varphi} \oplus\mathcal{D}_S^{p_{k,\ell}}(k,\ell+\deg b)\,\hat{\otimes}\,F \longrightarrow \int_{f|_U} L \longrightarrow 0$$

où $F = \Gamma(U \cap Y, \omega_Y)$,

et en particulier est concentré en un seul degré. De plus, cette présentation est aussi une résolution. Enfin $\int_{f|_U}\varphi = \varphi_o + \psi$, où φ_o est la multiplication par $b(\partial_t t + k)$ sur $\mathcal{D}_X^{p_{k,\ell}}$, et ψ est de degré -1 par rapport à la filtration V.

(6.2.2) Lemme : Si le module L est isomorphe à son localisé, le module $\int_{f|_U} L$ est isomorphe au module Λ de présentation

$$\oplus\mathcal{D}_S^{p_{k,\ell}}(k,\ell)\,\hat{\otimes}\,F \xrightarrow{\ \varphi_o\ } \oplus\mathcal{D}_S^{p_{k,\ell}}(k,\ell+\deg b)\,\hat{\otimes}\,F \quad .$$

Si ce lemme est montré, on démontre le théorème comme suit : on vérifie que tous les morphismes (6.2.1) sont compatibles à la localisation, et on sait que $\psi_f(\mathrm{DR}(\mathcal{M})) \cong \psi_f(\mathrm{DR}(\mathcal{M}_{loc}))$, et $\overline{\mathrm{gr}}^V_\alpha(\mathcal{M}) \simeq \overline{\mathrm{gr}}^V_\alpha(\mathcal{M}_{loc})$ pour $-1 \leq \alpha < 0$. On peut donc supposer que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{loc}$ et $L = L_{loc}$. De plus, on a $\Lambda = \Lambda_1 \hat{\otimes} F$, où Λ_1 est élémentaire dans $\mathcal{R}_{\{0\}}(S)$. On peut appliquer alors sans difficulté les résultats de (6.1) au module Λ, et par suite au module $\int_{f|_U} L$. Ceci prouve le théorème.

Preuve du lemme : Ce lemme est (mis à part l'espace F) un résultat classique concernant la régularité (cf. [M_3] ou [Wa]). Nous en donnerons rapidement la démonstration par souci d'être complet.

Comme L est isomorphe à son localisé, on peut remplacer, dans la présentation de $\int_{f|_U} L$, $\mathcal{D}_S$ par $\mathcal{D}_S[1/t]$, muni de la filtration V. telle que t soit de degré -1, ∂_t et 1/t de degré 1.

On peut alors écrire φ comme un polynôme de degré $\leq \deg b$ en $\partial_t t$ dont les coefficients sont des homomorphismes continus $\mathcal{O}[1/t]\,\hat{\otimes}\,F^p \to \mathcal{O}[1/t]\,\hat{\otimes}\,F^p$. Si on munit

$\mathcal{O}[1/t]$ de la filtration telle que t soit d'ordre -1 et $1/t$ d'ordre 1, et si on filtre $\mathcal{O}[1/t]\hat{\otimes}F^p$ comme somme directe de modules $\mathcal{O}[1/t]\hat{\otimes}F$ décalés convenablement, le coefficient M_i de $(\partial_t t)^i$ dans φ est égal à la somme de celui de $(\partial_t t)^i$ dans $b(\partial_t t)\hat{\otimes}\mathrm{Id}$ et d'un morphisme N_i d'ordre -1.

On peut supposer que le coefficient de $(\partial_t t)^{\deg b}$ est $1\hat{\otimes}\mathrm{Id}$ puisque celui-ci est inversible, de sorte qu'on peut remplacer la présentation de $\int_{f|_U}\varphi$ par celle donnée par la matrice

$$t\partial_t\hat{\otimes}\mathrm{Id} - P \quad , \qquad \text{où} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & \mathrm{Id} \\ M_o & \cdots & \cdots & M_{\deg b-1} \end{bmatrix}$$

On peut alors appliquer les résultats de [Wa] chap. II, avec quelques légères modifications. ∎

***

7. CYCLES EVANESCENTS ET STRUCTURES DE HODGE LIMITES.

(7.1) Calculs locaux pour un diviseur à croisements normaux.

Dans ce paragraphe, on considère une fonction $f : X \to S$ telle que $f^{-1}(0)$ soit un diviseur à croisements normaux : on écrira dans des coordonnées locales $f(x) = x_o^{e_o}\ldots x_\nu^{e_\nu}$. On considère le $\mathcal{D}_{X\times S}$-module $\mathcal{M}$ image directe de $\mathcal{O}_X$ par le plongement du graphe de $f : x\mapsto (x,f(x))$ dans $X\times S$. Ayant choisi une coordonnée t sur S, on a un générateur $\delta(t-f)$ de $\mathcal{M}$. Dans la suite, on considèrera $\mathcal{M}$ comme un $\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_{X\times S}) = \mathcal{D}_X[t,\partial_t]$-module, autrement dit

$$\mathcal{M} = \mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_{X\times S})/\mathcal{I} \qquad \text{où} \quad \mathcal{I} = \mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_{X\times S})(t-f) + \sum_i \mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_{X\times S})(\partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\partial_t) .$$

On a sur $\mathcal{M}$ une bonne filtration F. naturelle. Rappelons qu'on a $\mathcal{M} = \bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{O}_X\partial_t^k\delta$ et la filtration par le degré en ∂_t. On peut donc écrire aussi $\mathcal{M} = \bigoplus_{k\geq 0}\frac{1}{f^k}\mathcal{O}_X\partial_t^k t^k\delta$. On considère alors sur $\mathcal{O}_X[*D]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\partial_t t]$, où $\mathcal{O}_X[*D]$ désigne le faisceau des fonctions méromorphes sur X à pôles le long de $D = |f^{-1}(0)|$, "l'action" suivante de $\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_{X\times S})$:

- . $\partial_t t$ opère par multiplication ;
- . t opère par $t(\varphi\otimes P(\partial_t t)) = f\varphi\otimes P(\partial_t t-1)$;
- . ∂_t opère par $\partial_t(\varphi\otimes P(\partial_t t)) = \frac{\varphi}{f}\otimes\partial_t t\, P(\partial_t t+1)$;

et si x est une coodonnée locale sur X, on pose

- . $\partial_x(\varphi\otimes P(\partial_t t)) = \partial_x\varphi\otimes P(\partial_t t) - \partial_x(\log f)\varphi\otimes\partial_t t\, P(\partial_t t)$;
- . enfin, $\mathcal{O}_X$ opère par multiplication sur $\mathcal{O}_X[*D]$.

Cette "action" induit sur sa structure de $\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_{X\times S})$-module.

(7.1.1) Lemme : Le morphisme naturel $\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_{X\times S})\to\mathcal{O}_X[*D]\otimes\mathbb{C}[\partial_t t]$ défini par $P\mapsto P.1$ induit un isomorphisme de $\mathcal{M}$ sur le sous-$\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_{X\times S})$-module $\mathcal{N}$ de $\mathcal{O}_X[*D]\otimes\mathbb{C}[\partial_t t]$ engendré par 1. De plus cet isomorphisme est strictement filtré, si on munit $\mathcal{M}$ de la bonne filtration naturelle F. et $\mathcal{N}$ de la filtration par le degré en $\partial_t t$ induite par celle de $\mathcal{O}_X[*D]\otimes\mathbb{C}[\partial_t t]$. ∎

On va calculer la filtration V. de $\mathcal{M}$.

On remarque d'abord, en calculant le polynôme de Bernstein :

(7.1.2) Lemme : On a $V_{<o}(\mathcal{M}) = V_o(\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_{X\times S}))\,.\,\delta(t-f)$. ∎

On considère maintenant une composante Γ de l'ensemble des points de D qui sont dans l'intersection d'exactement k composantes de D (k= $1,\dots,n+1$). On note $(D_j)_{j\in J}$ l'ensemble des composantes de D, et on considère des multi-indices $p=(p_j)_{j\in J}$. On définit une famille de polynômes comme suit:

-Pour $-1\leq\alpha<0$ on pose:

$$P^{\alpha}_{p,\Gamma}(s) = C \prod_{\{j/\Gamma\subset D_j \text{ et } p_j\geq 1-\lfloor-\alpha e_j\rfloor\}} (e_j s-\alpha e_j-\lfloor-\alpha e_j\rfloor) \dots (e_j s-\alpha e_j+p_j-1)$$

où pour $\beta\in\mathbb{R}$, $\lfloor\beta\rfloor = \max\{n/\ n\in\mathbb{Z} \text{ et } n<\beta\}$ et la constante C est choisie pour que $P^{\alpha}_{p,\Gamma}(0)=1$. Remarquons que les zéros de $P^{\alpha}_{p,\Gamma}$ sont strictement négatifs.

-Pour $-1\leq\alpha\leq 0$ on pose

$$P^{<\alpha}_{p,\Gamma}(s)= C \prod_{\{j/\Gamma\subset D_j \text{ et } p_j\geq 1-[-\alpha e_j]\}} (e_j s-\alpha e_j-[-\alpha e_j]) \dots (e_j s-\alpha e_j+p_j-1)$$

où $[\beta]$ est la partie entière de β, et C est une constante telle qu on ait la propriété suivante:

Posons $\ell^{\alpha}_{\Gamma}(p) = \{j/\Gamma\subset D_j,\ \alpha e_j\in\mathbb{Z} \text{ et } p_j\geq 1+\alpha e_j\}$.

Alors on a la relation $P^{<\alpha}_{p,\Gamma}(s) = s^{\ell^{\alpha}_{\Gamma}(p)}\, P^{\alpha}_{p,\Gamma}(s)$.

-Enfin on pose

$$\begin{aligned} P^{o}_{p,\Gamma}(s) &= 1 \text{ si pour tout j tel que } \Gamma\subset D_j \text{ on a } p_j\leq 1,\\ &= s \text{ si } \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \ p_j<2, \text{ et il existe j tel que}\\ &\qquad \Gamma\subset D_j \text{ et } p_j=1,\\ &= C \prod_{\{j/\Gamma\subset D_j \text{ et } p_j\geq 2\}} (e_j s+1)\dots(e_j s+p_j-1) \end{aligned}$$

de sorte qu'on a $P^{<o}_{p,\Gamma}(s) = s^{(\ell^{o}_{\Gamma}(p)-1)}\, P^{o}_{p,\Gamma}(s)$.

Ces polynômes permettent d'exprimer la filtration $V.(\mathcal{M})$:

(7.1.3) <u>Lemme</u> : Pour $\alpha\in[-1,0]$, on a:

$$V_{\alpha}(\mathcal{M})_{|\Gamma} = \sum_{p} \mathcal{O}_X(\Sigma p_j D_j)_{|\Gamma} \otimes P^{\alpha}_{p,\Gamma}(\partial_t t+\alpha)\ \mathbb{C}[\partial_t t+\alpha]$$
$$V_{<\alpha}(\mathcal{M})_{|\Gamma} = \sum_{p} \mathcal{O}_X(\Sigma p_j D_j)_{|\Gamma} \otimes P^{<\alpha}_{p,\Gamma}(\partial_t t+\alpha)\ \mathbb{C}[\partial_t t+\alpha]\ .$$

Preuve: On commence par montrer l'égalité pour $V_{<o}$. Elle résulte du lemme (7.1.2). On peut alors calculer $V_{<-1}(\mathcal{M}) = tV_{<o}(\mathcal{M})$ et $V_{<1}(\mathcal{M}) = V_{<o}(\mathcal{M})+\partial_t V_{<o}(\mathcal{M})$.

Ensuite on en déduit pour $\alpha\in[-1,0[$:

$$V_{\alpha}(\mathcal{M})_{|\Gamma} = V_{<-1}(\mathcal{M})_{|\Gamma}+b_{\alpha,\Gamma}(\partial_t t)V_{<o}(\mathcal{M})_{|\Gamma} \quad \text{avec}$$
$$b_{\alpha,\Gamma}(s) = \prod_{\{j/D_j\subset\Gamma\}} \ \prod_{k\in]0,-\alpha e_j[\cap\mathbb{N}} (e_j s-k)$$

en utilisant la proposition (2.1.5) et les résultats du §(2.3). Un calcul analogue donne $V_{<\alpha}(\mathcal{M})$ puis $V_o(\mathcal{M})$.

(7.1.4) <u>Remarque</u> : Pour $\alpha\in[-1,0]$ on note N l'opérateur nilpotent sur $\overline{gr}^V_{\alpha}(\mathcal{M})$ induit par $\partial_t t+\alpha$. Alors N est nilpotent d'ordre au plus dim X sur $\overline{gr}^V_{\alpha}(\mathcal{M})$ pour $\alpha\in[-1,0[$ et d'ordre au plus dim X − 1 sur $\overline{gr}^V_{o}(\mathcal{M})$. Soit alors $f: X\to S$ une fonction analytique quelconque. Pour tout $x\in f^{-1}(0)$, soit F_x la fibre de Milnor en x. Soit $H^p(F_x)_1$ le sous-espace de $H^p(F_x)$ invariant par la monodromie. Autrement dit, si $\mathcal{M}$ est le $\mathcal{D}_{X\times\mathbb{C}}$-module engendré par $\delta(t-f)$, on a $H^p(F_x) = H^p(DR(gr^V_{-1}(\mathcal{M}))_x$ et $H^p(F_x)_1 = H^p(DR(\overline{gr}^V_{-1}(\mathcal{M})))_x$. Comme X est lisse, on a aussi pour $p>0$, $H^p(F_x)_1 = H^p(DR(\overline{gr}^V_{o}(\mathcal{M})))_x$, puisque $H^p(\psi_f(\mathbb{C})) = H^p(\phi_f(\mathbb{C}))$ pour $p>0$.

En particulier, si f est à croisements normaux, l'opérateur nilpotent T − Id est d'ordre au plus dim X − 1 sur $H^p(\psi_f(\mathbb{C})_1)$ pour tout $p\geq 0$. On en déduit que le même résultat est vrai pour f quelconque en utilisant une résolution des singularités $\pi:\tilde{X}\to X$ rendant f à croisements normaux, et le fait que $R\pi_*(\psi_{f\circ\pi}(\mathbb{C}_X) = \psi_f(\mathbb{C}_X)$. Ce résultat a été démontré par D. Barlet par d'autres méthodes ([B]). De plus, en utilisant une section plane générique de codimension p, on voit que pour tout $p>0$ T − I est d'ordre au plus p − 1 sur $H^p(F_x)_1$.

(7.2) Structure de Hodge mixte sur les cycles évanescents d'une fonction à croisements normaux.

Rappelons d'abord quelques résultats. Fixons $\alpha\in[-1,0]$. On considère sur $\mathcal{O}_X[*D]$ la structure de $\mathcal{D}_X$-module tordue par f^α et on note ce module $\mathcal{O}_X[*D]_\alpha$. Formellement on considère le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{D}_X f^\alpha \otimes \mathcal{O}_X[*D]$ et on utilise l'isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\mathcal{O}_X[*D]_\alpha \xrightarrow{f^\alpha} \mathcal{D}_X f^\alpha \otimes \mathcal{O}_X[*D]$$

pour transporter la structure de $\mathcal{D}_X$-module. On définit les filtrations suivantes:

- $W_k\mathcal{O}_X[*D]_\alpha$ est tel que $W_k\mathcal{O}_X[*D]_{\alpha|\Gamma} = \{\phi\in \mathcal{O}_X[*D]/\ell^\alpha_\Gamma(\phi)\leqslant k\}$, $(-1\leqslant\alpha<0)$, où $\ell^\alpha_\Gamma(\phi) = \ell^\alpha_\Gamma(p(\phi))$ si $p(\phi)$ désigne le multi-indice des ordres de ϕ le long des composantes de D,et Γ est choisi comme en (7.1).

Pour $\alpha=0$, on considère la filtration décalée, c'est à dire définie par $\lambda^0_\Gamma(\phi)=\ell^0_\Gamma(\phi)-1$.
Autrement dit $W.\mathcal{O}_X[*D]_o = W[1].\mathcal{O}_X[*D]$.

- Etant donné un multi-indice $p\geq 0$ (i.e. $p_j\geq 0$ pour tout j) on définit:

$G_p\mathcal{O}_X[*D]_\alpha = \{\phi\in\mathcal{O}_X[*D]_\alpha \ / \ p_j(\phi)+[-\alpha e_j]\leqslant p_j$ pour tout $j\}$, et

$F_k\mathcal{O}_X[*D]_\alpha = \sum_{|p|\leqslant k} G_p\mathcal{O}_X[*D]_\alpha$

Rappelons aussi qu'étant donné un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ muni de filtrations W. et F. comme ci-dessus, on peut filtrer le complexe de de Rham de $\mathcal{M}$ en posant:

$W_\ell DR(\mathcal{M}) = \{0 \to W_\ell(\mathcal{M}) \to W_\ell(\mathcal{M})\otimes\Omega^1_X \to \dots \to W_\ell(\mathcal{M})\otimes\Omega^{\dim X}_X \to 0\}$ et

$F^k DR(\mathcal{M}) = \{0 \to F_{-k}(\mathcal{M}) \to F_{-k+1}(\mathcal{M})\otimes\Omega^1_X \to \dots \to F_{-k+\dim X}\otimes\Omega^{\dim X}_X \to 0\}$.

Pour interpréter $\mathcal{O}_X[*D]_\alpha$, on considère un revêtement ramifié de S de degré e tel que $\alpha e\in\mathbb{Z}$ et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{S} & \to & S \end{array}$$

où $\tilde{X}$ est la normalisation du produit fibré de X par S. Alors X est une V-variété (voir[St_2]). Soit $\Omega^\cdot_{\tilde{X}}[\log\tilde{D}]$ le complexe logarithmique sur $\tilde{X}$ associé au diviseur $\tilde{D}$ image inverse de D par π. Soit $U=X\setminus\bigcup(D_i\cap D_j)$, $\tilde{U}=\pi^{-1}(U)$ et $\tilde{j}:\tilde{U}\to\tilde{X}$ l'inclusion naturelle. On a:

$$\Omega^\cdot_{\tilde{X}}[\log\tilde{D}] = \tilde{j}_*\Omega^\cdot_{\tilde{U}}[\log\tilde{D}] = \tilde{j}_*\Omega^\cdot_{\tilde{U}}[*\tilde{D}].$$

On notera aussi ce complexe $\Omega^\cdot_{\tilde{X}}[*\tilde{D}]$. On peut définir pour tout k des filtrations $F.\Omega^k_{\tilde{X}}[*\tilde{D}]$ et $W.\Omega^k_{\tilde{X}}[*\tilde{D}]$ par l'ordre du pôle et par le nombre de composantes sur lesquelles une forme a un pôle. Ces filtrations coïncident avec les filtrations habituelles sur $\Omega^\cdot_{\tilde{X}}[\log\tilde{D}]$.

Soit α un rationnelcompris entre -1 et 0 et vérifiant $\alpha e\in\mathbb{Z}$, et soit $\pi_*(\Omega^k_{\tilde{X}}[*\tilde{D}])_\alpha$ le faisceau des formes qui se transforment en $\omega\to e^{2i\pi\alpha}\omega$ quand on considère l'action $z\to e^{2i\pi/e}z$ du groupe $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$. On définit une application

$$\pi_*(\Omega^k_{\tilde{X}}[*\tilde{D}])_\alpha \to \Omega^k_X[*D]_\alpha$$

comme la composée de la multiplication par $f^{-\alpha}$ et de la trace. Pour vérifier que cette application définit bien ainsi un morphisme de complexes et que celui-ci est strictement bifiltré en restriction à D, il suffit de se placer au voisinage d'un point de la partie lisse de D. Montrons que cette application est strictement bifiltrée: On peut supposer que X est de dimension 1 et que $f(x)=x^{e_i}$. Alors on décompose π en $\pi_2\circ\pi_1$: $z\to z^{\varepsilon_i}\to z^{e_i}$ où $\varepsilon_i=e/e_i$. On voit que $((\pi_2\circ\pi_1)_*\Omega^\cdot_{\tilde{X}}[*\tilde{D}])_\alpha \subset \pi_{2*}(\pi_{1*}(\Omega^\cdot_{\tilde{X}}[*\tilde{D}])_{\alpha e_i})$ et si $\alpha e_i\notin\mathbb{Z}$ le complexe $(\pi_{1*}\Omega^\cdot_{\tilde{X}}[*\tilde{D}])_{\alpha e_i|D}$ est nul. Ainsi on se ramène au cas où $\pi=\pi_2$ et là le résultat est clair.
On vérifie de même que $\mathrm{Trace}\circ f^{-\alpha}$ préserve les différentielles.

On déduit de ces faits ainsi que des résultats de [Br_1], [D_2], [St_2]:

(7.2.1) Théorème : On suppose que D est projectif. Pour tout k>0, les complexes filtrés suivants sont des $\mathbb{C}$-complexes de Hodge: $(DR(gr^W_k\mathcal{O}[*D]_{-1}), F^\cdot(-k))[k]$, $(DR(gr^W_k(\mathcal{O}[*D]_\alpha\oplus\mathcal{O}[*D]_{-1-\alpha})), F^\cdot(-k))[k]$, $(-1<\alpha<0)$, $(DR(gr^{W[-1]}_k\mathcal{O}[*D]_o), F^\cdot(-k))[k]$.

Reprenons maintenant la situation du paragraphe précédent. L'endomrphisme nilpotent N sur $\overline{gr}^V_\alpha(\mathcal{M})$ permet de définir une filtration croissante $M.\overline{gr}^V_\alpha(\mathcal{M})$ par des sous-$\mathcal{D}_X$-modules, caractérisée par les propriétés suivantes: $N(M_k)\subset M_{k-2}$ et pour tout k>0, N^k: $gr^M_k\to gr^M_{-k}$ est un isomorphisme. On définit $M.V_\alpha(\mathcal{M})$ comme l'image inverse de $M.\overline{gr}^V_\alpha(\mathcal{M})$. Pour tout k, $M_kV_\alpha(\mathcal{M})$ est un sous-$V_o(\mathcal{D}_{X\times S})$-module de $V_\alpha(\mathcal{M})$.

Fixons une variété Γ comme au §(7.1). On note (pour $-1\leqslant\alpha<0$)

$$M^\Gamma_\ell V_\alpha(\mathcal{M}) = \sum_p G_p\mathcal{O}[*D]_{|\Gamma}\otimes(\partial_t t+\alpha)^{\left[\frac{\ell^\alpha_\Gamma(p)-\ell}{2}\right]} P^\alpha_{p,\Gamma}(\partial_t t+\alpha)\,\mathbb{C}[\partial_t t+\alpha]$$

et pour =0 on remplace $\ell^\alpha_\Gamma(p)$ par $\lambda^o_\Gamma(p)$.

On va montrer que $M^{\Gamma}_{\ell}V_{\alpha}(\mathcal{M}) = M_{\ell}V_{\alpha}(\mathcal{M})_{|\Gamma}$.

Il est clair que $N\, M^{\Gamma}_{\ell} \subset M^{\Gamma}_{\ell-2}$. D'autre part on peut écrire tout élément $m \in M^{\Gamma}_{\ell}$ de la manière suivante: $m = m'+m''$ avec $m'' \in M^{\Gamma}_{\ell-1}$ et $m' = \sum_{k,j} \phi_{k,j} \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p,\Gamma}(\partial_t t+\alpha)$, où $p = p(\phi_{k,j})$ et $j = \left[\frac{\ell^{\alpha}_{\Gamma}(p)-\ell}{2}\right]$. La somme est prise pour $j \geqslant 0$ et $j \leqslant 2j+\ell = \ell^{\alpha}_{\Gamma}(p)-1$.

Commençons par remarquer le fait suivant:

(7.2.2) <u>Lemme</u> : Soit $m = \sum_{k,j} \phi_{k,j} \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(\phi_{k,j})}$ avec $\phi_{k,j} \in W_{2j+\ell+1}\mathcal{O}_X[*D]_{\alpha}$ pour tout $j \geqslant 0$ et posons $\phi_j = \sum_k \phi_{k,j}$. Alors on a:

$$m = \sum_j \phi_j \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(\phi_j)} \quad \text{mod. } M^{\Gamma}_{\ell-1}.$$

<u>Preuve</u> : Soit d'abord $\phi \in W_{2j+\ell+1}\mathcal{O}_X[*D]_{\alpha}$. Si on écrit $\phi = \psi+\psi'$ avec $p(\psi)$ et $p(\psi')$ inférieurs où égaux à $p(\phi)$, ψ et ψ' sont aussi dans $W_{2j+\ell+1}$ et de plus on a:

$$\phi \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(\phi)} = \psi \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(\psi)} + \psi' \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(\psi')} \text{mod. } M^{\Gamma}_{\ell-1}$$

puisque si $p \geqslant q$ on a $P^{\alpha}_{p} = P^{\alpha}_{q}.Q$ avec $Q = 1+(\partial_t t+\alpha)\, R$.

D'autre part, si on choisit des coordonnées locales, on peut écrire ϕ comme une somme de "monômes" de la manière suivante:

$\phi = \sum_q x^{-q}h_q$ où q est un multi-indice et h_q est une fonction holomorphe des variables qui n'interviennent pas dans x^{-q}, et on impose que $p(x^{-q}h_q) = (q_1,\dots,q_r,p_1,\dots,p_s)$ vérifie: $p(x^{-q}h_q) \leqslant p(\phi)$ et si $D_j \subset \Gamma$ alors $p_j < 1+\alpha e_j$.

Ainsi $P^{\alpha}_{p(x^{-q}h_q)}$ ne dépend que de q. On a donc pour $\phi \in W_{2j+\ell+1}$:

$\phi \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(\phi)} = \sum_q x^{-q}h_q \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(x^{-q}h_q)}$ mod. $M^{\Gamma}_{\ell-1}$ et si l'on revient à la situation du lemme, on en déduit:

$$\begin{aligned}\sum_k \phi_{k,j} \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p_{k,j}} &= \sum_q \Big(\sum_k x^{-q}h_{k,j,q}\Big) \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(x^{-q}h_{k,j,q})} \text{mod. } M^{\Gamma}_{\ell-1} \\ &= \phi_j \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(\phi_j)} \quad \text{mod. } M^{\Gamma}_{\ell-1}.\end{aligned}$$

On peut maintenant montrer:

(7.2.3) <u>Lemme</u> : On a $M_{\ell}V_{\alpha}(\mathcal{M})_{|\Gamma} = M^{\Gamma}_{\ell}V_{\alpha}(\mathcal{M})$ et on a un isomorphisme de $\mathcal{D}_X$-modules filtrés (par $F.$):

$$I : \mathrm{gr}^{M}_{\ell}\mathrm{gr}^{V}_{\alpha}(\mathcal{M}) \to \bigoplus_{\substack{j \geqslant 0 \\ j \geqslant -\ell}} \mathrm{gr}^{W}_{2j+\ell+1}\mathcal{O}_X[*D]_{\alpha}\,(j+\ell+1).$$

<u>Preuve</u> : Définissons d'abord le morphisme I le long de Γ et sur $\mathrm{gr}^{M^{\Gamma}}_{\ell}\mathrm{gr}^{V}_{\alpha}(\mathcal{M})$.

Soit $m \in M^{\Gamma}_{\ell}$. On écrit $m = \sum_j \phi_j \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(\phi_j)}$ mod. $M^{\Gamma}_{\ell-1}$ avec $\phi_j \in W_{2j+\ell+1}$. On pose $I([m]) = \bigoplus_j \phi_j \in \bigoplus_{\substack{j \geqslant 0 \\ j \geqslant -\ell}} \mathrm{gr}^{W}_{2j+\ell+1}\mathcal{O}_X[*D]_{\alpha}$.

Montrons d'abord que I est bien défini:

Si $m = \sum_j \psi_j \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(\psi_j)}$ mod. $M^{\Gamma}_{\ell-1}$, alors

$$\begin{aligned}0 = m - m &= \sum \psi_j \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(\psi_j)} - \sum \phi_j \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(\phi_j)} \quad \text{mod. } M^{\Gamma}_{\ell-1} \\ &= \sum (\psi_j - \phi_j) \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(\psi_j - \phi_j)} \quad \text{mod. } M^{\Gamma}_{\ell-1} \quad \text{(d'après (7.2.2))}\end{aligned}$$

et donc $(\psi_j - \phi_j) \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(\psi_j - \phi_j)}$ est contenu dans $M_{\ell-1}$. On en déduit en particulier que le coéfficient du terme de plus bas degré en $\partial_t t+\alpha$ est dans $W_{2j+\ell}$. Donc si j_o est ce degré, $\psi_{j_o} - \phi_{j_o}$ est dans $W_{2j_o+\ell}$ et par récurrence sur j on voit que $[\phi_j] = [\psi_j]$ dans $\mathrm{gr}^{W}_{2j+\ell+1}\mathcal{O}_X[*D]_{\alpha}$.

La $\mathcal{D}_X$-linéarité provient de la définition même de la structure de $\mathcal{D}_X$-module sur $\mathcal{O}_X[*D]_{\alpha}$. Il est clair que I est surjectif, et I est injectif par le même argument que ci-dessus.

Ceci permet de voir que $N^{\ell} : M^{\Gamma}_{\ell}/M^{\Gamma}_{\ell-1} \to M^{\Gamma}_{-\ell}/M^{\Gamma}_{-\ell-1}$ est un isomorphisme, et donc on a bien $M_{\ell|\Gamma} = M^{\Gamma}_{\ell}$. On vérifie aussi que I est défini globalement et ne dépend pas de Γ par les mêmes arguments.

Considérons enfin la filtration $F.$: Sur $M_{\ell}/M_{\ell-1}$ c'est la filtration induite par la filtration par le degré en $\partial_t t$ sur $V_{\alpha}(\mathcal{M})$, et sur $\mathrm{gr}^{W}_{k}\mathcal{O}_X[*D]_{\alpha}$ celle induite par $F.\mathcal{O}_X[*D]_{\alpha}$.

Le degré de $\phi_j \otimes (\partial_t t+\alpha)^j\, P^{\alpha}_{p(\phi_j),\Gamma}$ est $j + \deg P^{\alpha}_{p,\Gamma} = j + \sum_{\{j/D_j \supset \Gamma \text{ et } p_j \geqslant 1-\lfloor -\alpha e_j \rfloor\}} (p_j + \lfloor -\alpha e_j \rfloor)$

et le degré de l'image de cet élément par I est $\sum_{\{j/D_j \supset \Gamma \text{ et } p_j+[-\alpha e_j]>0\}} (p_j + [-\alpha e_j])$.

La différence est donc $-j + \{j/D_j \supset \Gamma,\ \alpha e_j \in \mathbb{Z},\ p_j \geqslant 1+\alpha e_j\} = -j + \ell^{\alpha}_{\Gamma}(p) = j+\ell+1$ $(\alpha \neq 0)$.

Le morphisme I décale les filtrations comme indiqué et on vérifie qu'il est strict en construisant son inverse. Pour $\alpha=0$, un calcul analogue donne aussi une différence de $j+\ell+1$.

On peut maintenant reformuler le résultat de Steenbrink ($[St_1]$, $[St_2]$) :

(7.2.4) <u>Théorème</u> : Si le morphisme f est propre, alors les complexes bifiltrés suivants : $(DR(\overline{gr}^V_{-1}(\mathcal{M}))[-1], M, F)$, $(DR\ \overline{gr}^V_{o}(\mathcal{M})[-1], M[-1], F)$ et $(DR(\overline{gr}^V_{\alpha}(\mathcal{M}) \oplus \overline{gr}^V_{-\alpha-1}(\mathcal{M}))[-1], M, F)$, $\alpha \in]-1,0[$, sont des $\mathbb{C}$-complexes de Hodge mixtes.

<u>Remarque</u> : Il suffit de supposer que les modules $\overline{gr}^V_{\alpha}(\mathcal{M})$ sont à support projectif. C'est par exemple le cas pour les modules $\overline{gr}^V_{\alpha}(\mathcal{M})$, $\alpha \in]-1,0]$ si f se factorise par une fonction analytique à point critique isolé sur un espace lisse et une modification projective.

Commençons par le premier complexe : d'après les lemmes (7.2.1) et (7.2.3), on a $F^p\ \mathbb{H}^q(D, DR\, gr^M_\ell\ \overline{gr}^V_{-1}(\mathcal{M})) = \bigoplus_{\substack{j\geqslant 0 \\ j\geqslant -\ell}} F(-j-\ell-1)^p\ \mathbb{H}^q(X, DR(gr^W_{2j+\ell+1}\ \mathcal{O}[*D])[-1])$ et définit une structure de Hodge de poids $q+\ell+1$. On utilise le même argument pour les autres complexes.

BIBLIOGRAPHIE

[B] D. BARLET, Contribution du cup produit de la fibre de Milnor aux pôles de $|f|^{2\lambda}$, Ann. Inst. Fourier <u>34</u>, 4 (1984), 75-107.

$[Bj_1]$ J.E. BJÖRK, Rings of differential operators, North Holland (1979).

$[Bj_2]$ J.E. BJÖRK, livre à paraître.

$[Br_1]$ J.L. BRYLINSKI, Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge I, Springer Lect. Notes in Math. n° 981 (1983).

$[Br_2]$ J.L. BRYLINSKI, Transformations canoniques, ..., à paraître dans Astérisque.

$[D_1]$ P. DELIGNE, Le formalisme des cycles évanescents, SGA 7 II, exposés 13 et 14, Springer Lect. Notes in Math. n° 340 (1973).

$[D_2]$ P. DELIGNE, Théorie de Hodge II, Publ. Math. I.H.E.S. n° 40 (1971), 5-58.

[G] V. GINZBURG, Characteristic varieties and vanishing cycles preprint 1983.

[H-M-S] J.P. HENRY, M. MERLE et C. SABBAH, Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique, Annales Sc. de l'E.N.S. (1984).

[H-S] C. HOUZEL et P. SCHAPIRA, Images directes de modules différentiels, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, série I, <u>298</u> (1984), 461-464.

$[K_1]$ M. KASHIWARA, B-functions and holonomic systems, Inv. Math., <u>38</u> (1976), 33-53.

$[K_2]$ M. KASHIWARA, On the holonomic systems of differential equations II, Inv. Math. <u>48</u> (1978), 121-135.

$[K_3]$ M. KASHIWARA, Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations, Springer Lect. Notes in Math. n° 1016 (1983).

[K-S] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, Microlocal study of sheaves, prepublication de l'Université Paris-Nord, 1983.

$[K\text{-}K_1]$ M. KASHIWARA et T. KAWAI, Second microlocalization and asymptotic expansions, Springer Lect. Notes in Physics n° 126 (1980), 21-76.

$[K\text{-}K_2]$ M. KASHIWARA et T. KAWAI, On the holonomic systems of differential equations (systems with regular singularities) III, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 17 (1981), 813-979.

[L] G. LAUMON, Transformations canoniques et spécialisation pour les $\mathcal{D}$-modules filtrés, à paraître dans Conférence de Luminy 1983, Astérisque.

[La] Y. LAURENT, Calcul d'indices et irrégularité pour les systèmes holonomes, idem.

[Lê-Me] Lê D.T. et Z. MEBKHOUT, Variétés caractéristiques et variétés polaires, Note aux C.R. Acad. Sc., t. 296 (17 janvier 1983).

[M_1] B. MALGRANGE, Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente, Astérisque n° 101-102 (1983).

[M_2] B. MALGRANGE, Séminaire Opérateurs Différentiels, prépublication de l'Institut Fourier, Grenoble (19).

[M_3] B. MALGRANGE, Sur les points singuliers des équations différentielles, Enseignement Math. (19).

[Me] Z. MEBKHOUT, Théorèmes de bidualité locale, Arkiv för Math. vol. 20 (1982).

[P_1] F. PHAM, Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, Progress in Math. n° 2, Birkhäuser 1979.

[P_2] F. PHAM, Structures de Hodge limites d'un point critique isolé, Astérisque n° 101-102 (1983).

[S] C. SABBAH, Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux, à paraître dans Conférence de Luminy 1983, Astérisque.

[Sa] M. SAITO, Gauss-Manin system and mixed Hodge structures, Proc. Jap. Acad. of Sc. (1982).

[Sa_2] M. SAITO, Hodge filtration on Gauss-Manin systems, prépublication R.I.M.S. , Kyoto Univ. (19).

[Sa_3] M. SAITO, manuscrit (1983).

[Sa_4] M. SAITO, On the structure of Brieskorn lattice, prépublication de l'Institut Fourier, Grenoble (1983).

[Sa_5] M. SAITO, Hodge filtrations via $\mathcal{D}$-modules, preprint Univ. de Leiden (1984).

[Sch-St] J. SCHERK et J. STEENBRINK, On the mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor fiber, Preprint Univ. de Leiden (1984).

[St_1] J. STEENBRINK, Limit of Hodge structures, Inv. Math. 31 (1976), 229-257.

[St_2] J. STEENBRINK, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology in Real and Complex Singularities, Proc. of the Nordic Summer School Oslo 1976, Sijthoff & Noodhoff 1977.

[V] J.L. VERDIER, Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée, Astérisque n° 101-102 (1983).

[Wa] W. WASOW, Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience Publ., 1965.

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex (France)

U.A. du C.N.R.S.n° 169