EXAMEN FINAL

26 MARS 2010

Durée : 3h.
Tous les documents sont autorisés.
On pourra utiliser les énoncés donnés dans les notes, ainsi que les résultats du problème et des exercices, en y référant de manière précise.

E.1. Soient $k, \ell \in \mathbb{Z}$ deux entiers *distincts.*

(1) Quel est le type du fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ présenté par

$$\big(\mathbb{C}[z]^2, \mathbb{C}['z]^2, \Psi\big), \quad \text{avec } \Psi = \begin{pmatrix} z^{-k} & 0 \\ 0 & z^{-\ell} \end{pmatrix}.$$

(2) Soit $\psi \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Montrer que le type du fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ présenté par

$$\big(\mathbb{C}[z]^2, \mathbb{C}['z]^2, \Psi\big), \quad \text{avec } \Psi = \begin{pmatrix} z^{-k} & \psi \\ 0 & z^{-\ell} \end{pmatrix}$$

ne dépend pas de ψ si $k \geqslant \ell - 1$.

(3) Donner un exemple d'entiers k, ℓ tels que $k \leqslant \ell - 2$ pour lesquels le type dépend de ψ.

(4) Soit m un entier. Montrer une relation entre les types des fibrés vectoriels $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ de matrices respectives

$$\Psi = \begin{pmatrix} z^{-k} & \psi \\ 0 & z^{-\ell} \end{pmatrix}, \quad \Psi_m = \begin{pmatrix} z^{-k-m} & z^{-m}\psi \\ 0 & z^{-\ell-m} \end{pmatrix}.$$

(5) Donner, *pour tout couple d'entiers* (k, ℓ) *tels que* $k \leqslant \ell - 2$, un exemple de ψ pour lequel le type n'est pas celui pour $\psi = 0$.

Solution.

(1) Le fibré est somme directe $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$, donc le type est $\max(k, \ell) > \min(k, \ell)$, avec inégalité stricte puisque $k \neq \ell$.

(2) On a vu à l'exercice 4.1.8 que les classes d'isomorphisme d'extensions de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$ par $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ est en bijection avec $H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k - \ell))$. Si $k \geqslant \ell - 1$, cet espace est réduit à 0 (*cf.* la remarque après la définition 4.1.7), donc toute extension est isomorphe à l'extension scindée $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$, et le type est $\max(k, \ell) > \min(k, \ell)$ indépendamment de ψ.

(3) Si $k \leqslant \ell - 2$, le type dépend de ψ. Un exemple pour $k = -1$ et $\ell = 1$ est donné dans l'exercice 4.1.8.

(4) On a $\Psi_m = z^{-m}\Psi$, donc $\mathscr{E}' = \mathscr{E}(m)$ et si (a_1, a_2) est le type de $\mathscr{E}$, celui de $\mathscr{E}'$ est $(a_1 + m, a_2 + m)$.

(5) D'après la question précédente, si on a un exemple pour un couple d'entiers (k,ℓ), alors on en déduit un pour tous les couples $k+m,\ell+m$ pour $m\in\mathbb{Z}$. Il suffit donc de trouver un exemple lorsque $k=-1$ et $\ell\geqslant 1$. On reprend le même argument que lorsque $\ell=1$: si $\psi=1$, posons

$$P=\begin{pmatrix}1&0\\-z&1\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}[z]),\quad Q=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-z'\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}[z']).$$

Alors on a la relation

$$\begin{pmatrix}z&1\\0&z^{-\ell}\end{pmatrix}\cdot P=\begin{pmatrix}0&1\\-z'^{\ell-1}&-z'^{\ell}\end{pmatrix}=Q\cdot\begin{pmatrix}z'^{\ell-1}&0\\0&1\end{pmatrix},$$

montrant que le fibré $\mathscr{E}$ isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell-1)\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$, donc de type $(\ell-1,0)$, distinct de $(\ell,-1)$ qui est le type pour $\psi=0$. □

E.2. Soit λ un nombre complexe. On considère les trois matrices

$$A_0(\lambda)=\begin{pmatrix}1&\lambda^2\\1&\lambda\end{pmatrix},\quad A_1(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda&0\\-2&\lambda^2\end{pmatrix},\quad A_\infty(\lambda)=\begin{pmatrix}0&\lambda\\\lambda^2&0\end{pmatrix}.$$

(1) Donner une condition nécessaire sur λ pour qu'il existe un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ de rang 2 sur $\mathbb{P}^1$, une connexion ∇ sur $\mathscr{E}(\mathbb{P}^1\smallsetminus\{0,1,\infty\})$ à pôles simples relativement à $\mathscr{E}$, tels que les endomorphismes $\mathrm{Rés}_\alpha(\nabla,\mathscr{E})$, pour $\alpha=0,1,\infty$, aient pour matrice $A_\alpha(\lambda)$ dans une base convenable de la fibre $\mathscr{E}_\alpha$?

(2) Pour $\lambda=-1$, donner un exemple de tels $\mathscr{E},\nabla$.

***Solution*.**

(1) La trace d'un endomorphisme est la trace de sa matrice dans une quelconque base de l'espace vectoriel sur lequel il agit. Le théorème des résidus 5.3.3 nous dit que, s'il existe une solution $\mathscr{E},\nabla$ au problème, alors $\sum_\alpha\operatorname{tr}\mathrm{Rés}_\alpha(\nabla,\mathscr{E})=-\deg\mathscr{E}\in\mathbb{Z}$. On a $\operatorname{tr}A_0+\operatorname{tr}A_1+\operatorname{tr}A_\infty=(\lambda+1)^2$. Une condition nécessaire est que $(\lambda+1)^2\in\mathbb{Z}$.

(2) On considère le fibré trivial $\mathscr{E}=\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}^2$ et la dérivation ∇_{∂_z} de matrice dans la base canonique $\boldsymbol{e}_0$:

$$A^{\boldsymbol{e}_0}=\frac{A_0(-1)}{z}+\frac{A_1(-1)}{z-1}.$$

On a alors $A'^{\boldsymbol{e}_\infty}=-z^2A^{\boldsymbol{e}_0}$ (puisque le fibré est trivial, donc $\Psi=\mathrm{Id}$), c'est-à-dire

$$A'^{\boldsymbol{e}_\infty}=-\frac{A_0(-1)+(1-z')^{-1}A_1(-1)}{z'},$$

et le résidu en $z'=0$ de $A'^{\boldsymbol{e}_\infty}$ est $-[A_0(-1)+A_1(-1)]$. Il suffit de remarquer que cette matrice n'est autre que $A_\infty(-1)$. □

E.3. Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$, $U\subsetneq\mathbb{P}^1$ un ouvert de Zariski et ∇ une connexion sur $\mathscr{E}(U)$ de rang n, qui est à pôles simples relativement à $\mathscr{E}$. Soit $z^o\in U$ et $U'=U\smallsetminus\{z^o\}$. Alors ∇ définit une connexion ∇' sur $\mathscr{E}(U')$.

(1) Indiquer pourquoi ∇' est encore à pôles simples relativement à $\mathscr{E}$.

(2) On suppose pour fixer les idées que $z^o\in U_0$ et on pose $\zeta=z-z^o$. Soit $\boldsymbol{e}_0$ une base de $\mathscr{E}(U_0)$. Montrer qu'il il existe une matrice $\mathcal{Q}(\zeta)\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}\{\zeta\})$ telle qu'après le changement de base de matrice $\mathcal{Q}(\zeta)$, la matrice de la connexion soit nulle.

(3) Montrer qu'il existe un fibré *trivial* $\mathscr{E}'$ relativement auquel ∇' est à pôles simples.

Solution.

(1) On peut supposer que $z^o \in U_0$ pour fixer les idées. Soit $\boldsymbol{e}_0$ une base de $\mathscr{E}(U_0)$ et $A^{\boldsymbol{e}_0}$ la matrice de ∇_{∂_z} dans la base induite par $\boldsymbol{e}_0$ sur $\mathscr{E}(U \cap U_0)$. Alors la matrice de ∇'_{∂_z} est encore $A^{\boldsymbol{e}_0}$ dans la base induite par $\boldsymbol{e}_0$ sur $\mathscr{E}(U' \cap U_0)$. Elle est donc à pôle au plus simple en z^o (puisque sans pôle). Il n'y a pas de modification hors de z^o, donc ∇'_{∂_z} est à pôle simple relativement à $\mathscr{E}(U_0)$. De même, $\nabla'_{\partial_{z'}}$ est à pôle simple relativement à $\mathscr{E}(U_\infty)$.

(2) On cherche à résoudre (voir Proposition 5.1.2(4)) l'équation

$$\mathcal{Q}^{-1} A^{\boldsymbol{e}_0} \mathcal{Q} + \mathcal{Q}^{-1} \frac{d\mathcal{Q}}{d\zeta} = 0$$

au voisinage de $\zeta = 0$. C'est une équation différentielle sur la matrice $\mathcal{Q}$, qu'on peut résoudre grâce au théorème de Cauchy 1.1.5 puisque $A^{\boldsymbol{e}_0}$ est holomorphe au voisinage de $\zeta = 0$ (car $z^o \in U$).

(3) Il suffit de montrer que la condition de Plemelj est satisfaite en z^o, pour appliquer le théorème 6.4.1. Mais la question précédente montre qu'elle est trivialement satisfaite, en prenant $A_0 = 0$ dans la définition 6.4.2. $\square$

E.4.

(1) On considère le système différentiel

$$\frac{du}{dz} = a(z)u(z), \quad a(z) \in \mathbb{C}(z).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a(z)$ pour que ce système soit à singularités régulières en tout pôle (à distance finie) de $a(z)$ et à l'infini.

(2) Si cette condition est satisfaite, donner une écriture simple de ce système, si $z_1, \dots, z_r$ sont les pôles (à distance finie) de $a(z)$.

(3) Si Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \dots, z_r\}$, décrire explicitement l'espace vectoriel des solutions de l'équation sur Ω.

(4) Soit $P \in \mathbb{C}(z)\langle\partial\rangle$ un opérateur différentiel de degré 2 qu'on écrit sous la forme $P = \partial^2 + a_1(z)\partial + a_0$ avec $a_0, a_1 \in \mathbb{C}(z)$ (et $\partial = d/dz$). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P soit à singularités régulières en tous les pôles de a_0, a_1 et à l'infini.

(5) On suppose que $P \in \mathbb{C}(z)\langle\partial\rangle$ est écrit sous la forme $P = (\partial + \alpha)(\partial + \beta)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}(z)$. Montrer que tout pôle de α qui n'est pas dans l'ensemble des pôles de a_0 et a_1 (qu'on appellera « singularité apparente » de la décomposition) est aussi un pôle de β et que c'est un pôle simple pour ces deux fractions. Calculer le résidu de α et β en ce pôle.

(6) Montrer que si P est à singularités régulières en tout ses pôles et à l'infini, alors les deux opérateurs $\partial + \alpha$ et $\partial + \beta$ aussi.

Solution.

(1) Puisque le système est de rang 1, la cns est que $a(z)$ soit à pôles simples en $z_1, \dots, z_r$ (d'après l'exercice 1.4.3) et $-z^2 a(z)$ soit à pôle simple à l'infini.

(2) On peut donc écrire $a(z) = p(z) + \sum_{i=1,\dots,r} a_i/(z - z_i)$ avec $a_i \in \mathbb{C}$ et $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, d'après la première condition. La seconde condition implique que $\deg a(z) \leqslant -1$, donc $p(z) = 0$.

(3) On choisit sur Ω une détermination de $\log(z - z_i)$ et l'espace vectoriel (de dimension 1) des solutions de l'équation sur Ω est engendré par $\exp\big(\sum_i a_i \log(z - z_i)\big)$ qu'on note aussi $\prod_i (z - z_i)^{a_i}$.

(4) Soit z^o un pôle de a_0 ou a_1. Au voisinage de z^o, on peut écrire $a_i(z) = (z - z^o)^\nu b_i(z - z^o)$ avec $\nu \in \mathbb{Z}$, $b_i(\zeta)$ holomorphe au voisinage de $\zeta = 0$ et $b_i(0) \neq 0$. On note $\nu = v_{z^o}(a_i)$ (ordre

du zéro ou $-$ ordre du pôle de a_i en z^o). La condition de singularité régulière à distance finie s'écrit (*cf.* théorème de Fuchs 1.4.9)

$$\forall\, z^o \in \mathbb{C}, \qquad v_{z^o}(a_0) \geqslant -2 \quad \text{et} \quad v_{z^o}(a_1) \geqslant -1.$$

La condition à l'infini s'écrit (*cf.* exercice 1.4.11)

$$\deg a_0 \leqslant -2 \quad \text{et} \quad \deg a_1 \leqslant -1.$$

(5) On a $\alpha+\beta=a_1$ et $\beta'+\alpha\beta=a_0$. Soit z^o un pôle de α qui n'est pas un pôle de a_0 ni un pôle de a_1. Alors z^o doit être un pôle de β, d'après la première équation, car les parties polaires en z^o de α et $-\beta$ coïncident. La deuxième équation implique que l'ordre du pôle de α et β en z^o est au plus égal à 1. Si on écrit $\alpha=\alpha_{-1}/(z-z^o)+\cdots$ et $\beta=-\alpha_{-1}/(z-z^o)+\cdots$, on a $\beta'+\alpha\beta=(\alpha_1-\alpha_1^2)/(z-z^o)^2+\cdots$, et donc $\alpha_1(1-\alpha_1)=0$. Si on suppose que $\alpha_1\neq 0$, c'est donc que $\alpha_1=\text{rés}_{z^o}(\alpha)=1$. On a aussi $\text{rés}_{z^o}(\beta)=-1$.

(6) D'après la question précédente, il suffit de montrer que l'ordre du pôle de α et de β en un pôle z^o de a_0 ou a_1, ou à l'infini, est simple.

Par hypothèse, $\alpha+\beta$ a un pôle simple au plus en $z^o\in\mathbb{C}$ et $\beta'+\alpha\beta$ un pôle double au plus en z^o. Si α a un pôle d'ordre $k\geqslant 2$ en z^o, alors β aussi et $\alpha\beta$ a un pôle d'ordre $2k\geqslant 4$, alors que β' a un pôle d'ordre $k+1<2k$, ce qui conduit à une contradiction.

À l'infini, la condition de singularité régulière implique que $\alpha+\beta$ n'a pas de partie polynomiale, et $\beta'+\alpha\beta$ non plus. Si α a une partie polynomiale $p(z)\in\mathbb{C}[z]$, alors celle de β est $-p(z)$, et celle de $\beta'+\alpha\beta$ est de degré $2\deg p$. Donc $p=0$. $\square$

E.5. On considère l'opérateur hypergéométrique $P=\partial^2+a_1\partial+a_0$, pour lequel

$$a_1=\frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)} \quad \text{et} \quad a_0=-\frac{ab}{z(1-z)}\,.$$

(1) Montrer que la connexion associée est à pôles simples relativement au fibré trivial de rang 2.

(2) Diviser P par $(\partial-b/(1-z))$ sous la forme

$$P=Q\Big(\partial-\frac{b}{(1-z)}\Big)+R$$

avec $Q\in\mathbb{C}(z)\langle\partial\rangle$ et $R\in\mathbb{C}(z)$ et en déduire que, si $c=a$, P est divisible par $(\partial-b/(1-z))$. (Comme a et b jouent un rôle symétrique dans P, le même résultat vaut en échangeant a et b.)

(3) Quelle est la fonction dont le développement en série dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 est la série ${}_2F_1(a,b,a;z)$.

Solution.

(1) On écrit la matrice de ∇_{∂_z} sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{pmatrix}$$

et on utilise le fait que $1/z(1-z)=1/z+1/(1-z)$ pour l'écrire sous la forme $A_0/z+A_1/(1-z)$ avec A_0 et A_1 constantes. On a donc bien une solution au problème de Riemann-Hilbert pour ce système.

(2) Dans la division, le terme dominant de Q doit être égal à 1, donc il faut chercher $\alpha, R \in \mathbb{C}(z)$ tels que $P = (\partial + \alpha)(\partial - b/(1-z)) + R$. On otient les équations

$$\alpha - \frac{b}{1-z} = \frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)}$$
$$-\frac{b}{(1-z)^2} - \alpha\,\frac{b}{1-z} + R = -\frac{ab}{z(1-z)}.$$

On en déduit

$$\alpha = \frac{c}{z(1-z)} - \frac{(a+1)}{1-z} \quad \text{et} \quad R = \frac{b}{1-z} \cdot \frac{(c-a)}{z(1-z)}.$$

(3) On a ${}_2F_1(a, b, a; z) = \sum_{k \geqslant 0} (b)_k z^k/k!$ et on reconnait le développement en $z = 0$ de $(1-z)^{-b}$, qui est justement solution de $(\partial - b/(1-z))u = 0$ sur ce disque. $\square$