REPRÉSENTATIONS DES GROUPES $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$ ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES

MARTIN ANDLER, CORINNE BLONDEL ET GUY HENNIART

Wiles a prouvé le "grand théorème" de Fermat en considérant un développement de Fourier

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n) \exp(2i\pi nz),$$

où les coefficients a(n) sont des entiers dépendant d'une solution éventuelle de l'équation $x^n + y^n = z^n$. Cette fonction de nature "arithmétique" est censée posséder des propriétés analytiques, des équations fonctionnelles principalement, qui en font une forme modulaire classique. Mais ces propriétés sont tellement belles qu'une telle forme modulaire n'existe pas !
La preuve par Wiles de ces propriétés passe par l'interprétation en termes de représentations de groupes, et plus particulièrement de groupes de Lie réels et p-adiques. La théorie des représentations des groupes de Lie, dont l'origine est motivée par la physique, a un intérêt propre indépendant de ses applications arithmétiques. Elle peut se voir comme la généralisation au cas non commutatif de la théorie de la transformation de Fourier, qui concerne les groupes commutatifs localement compacts. Notre but est d'en expliquer les principes les plus essentiels, et de montrer le rôle crucial qu'elle joue dans la démarche de Wiles.
Plus précisément, les formes modulaires classiques s'interprètent naturellement en termes de représentations de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, ce qui justifie en bonne partie l'étude de celles-ci (exposé 1). Le cas des représentations de groupes finis, en particulier de $G = \mathrm{GL}(2,k)$ quand k est un corps fini, se place dans un cadre purement algébrique (exposé 2). Dans l'exposé 3, on étudie la structure du groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$. Les exposés 2 et 3 aboutissent naturellement à l'étude des représentations de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$ (exposé 5), elles-mêmes le pendant des représentations de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ (exposé 4). Tout ce matériel convergera dans le dernier exposé en une présentation de la démonstration d'Andrew Wiles.

1. Introduction à la théorie des représentations (MA)

Nous commencerons par présenter, de manière très concise, la théorie de Fourier classique pour $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans le contexte de la théorie spectrale. Nous aborderons ensuite la théorie abstraite des représentations des groupes (en laissant de côté les représentations des groupes finis qui seront traitées dans le deuxième exposé). Nous donnerons quelques éléments sur les représentations de dimension infinie, en terminant par la formule de Plancherel abstraite pour les groupes (de Lie) vue comme décomposition spectrale de la représentation régulière. Enfin, nous préciserons les liens entre représentations de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ et formes modulaires.

2. Représentations linéaires de $\mathrm{GL}(2,k)$, k un corps fini (GH)

Nous décrirons brièvement la théorie générale des représentations linéaires des groupes finis et obtiendrons la liste complète des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(2,k)$, k fini.

3. Le groupe GL(2) sur le corps des nombres p-adiques (CB)

Nous présenterons le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques et décrirons ses propriétés arithmétiques et sa topologie, localement compacte et totalement discontinue. Nous décrirons également les quasi-caractères, ou représentations lisses de dimension 1, du groupe multiplicatif $\mathbb{Q}_p^\times = \mathrm{GL}(1,\mathbb{Q}_p)$. Nous étudierons ensuite le groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$, dont nous donnerons certaines décompositions remarquables.

4. Représentations unitaires irréductibles du groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ (MA)

Nous donnerons une description complète des représentations unitaires irréductibles de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ (série principale, série discrète, série complémentaire).

5. Les représentations lisses du groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$ (CB)

Nous définirons les représentations lisses du groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$ puis, après quelques exemples, nous expliquerons les principes de base de la classification des représentations lisses irréductibles de ce groupe, permettant une classification complète des représentations dites “de la série principale non ramifiée”.

6. Représentations automorphes, représentations galoisiennes et le grand théorème de Fermat (GH)

Nous conclurons en reprenant le cheminement aboutissant au théorème de Fermat, qui incorpore les ingrédients mis en place dans les exposés précédents.

Laboratoire de Mathématiques (UMR CNRS 8100), Université de Versailles Saint Quentin, 78035 Versailles Cedex
E-mail address: andler@math.uvsq.fr

Institut de mathématiques de Jussieu (UMR CNRS 7586), Université Paris-Diderot, 75205 Paris Cedex
E-mail address: blondel@math.jussieu.fr

Département de mathématiques (UMR CNRS 8628), Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex
E-mail address: henniart@math.u-psud.fr