TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Les groupes sont partout dans la nature, les sciences et les arts, à travers les invariances, les symétries d'objets matériels ou mathématiques. Bien des phénomènes mathématiques se démontrent ou s'interprètent par la possibilité de passer d'une configuration à une autre par l'action d'un groupe spécifique.

Les exposés d'Anne-Marie Aubert et Michel Broué développent quelques beaux exemples de ce principe, dans des situations ou apparaissent certains groupes finis simples remarquables.

Les groupes finis se prêtent évidemment au calcul sur ordinateur ; les participants aux journées X-UPS 2000 ont pu s'initier à l'un des logiciels les plus utilisés pour calculer dans les groupes : GAP (Groups, Algorithms and Programming). Le texte de Jean Michel est une introduction au langage GAP.

Un groupe simple est, par définition, un groupe qui n'admet pas d'autre « projection » (image par un homomorphisme) que lui-même ou le groupe réduit à un élément. Pour décrire tous les groupes finis, il est donc naturel de commencer par les groupes finis simples. Les mathématiciens sont à peu près convaincus que la liste des groupes finis simples est connue. C'est l'aboutissement de nombreux articles, et personne n'a mené à bien le travail considérable et ingrat de retracer de manière systématique le cheminement qui, à travers des milliers de pages, conduit à la classification complète. Il est d'autant plus étonnant que cette classification soit, somme toute, assez... simple. Outre les groupes cycliques et les groupes alternés, elle comporte des séries infinies de groupes qu'on peut décrire, en gros, comme des groupes de matrices sur les corps finis, et elle est complétée par une surprenante collection de 26 autres groupes, appelés les groupes sporadiques. L'existence du plus grand de ces groupes, appelé le « monstre », d'ordre approximativement 10^{54}, est restée conjecturale pendant de nombreuses années, avant d'être démontrée par Robert L. Griess en 1981. Les relations de ce groupe avec d'autres domaines des mathématiques forment un ensemble de résultats et de conjectures si merveilleux qu'on le désigne par l'expression de « rêveries au clair de lune ».

Depuis Frobenius[(1)], on comprend l'importance des représentations linéaires des groupes, et en particulier des représentations unitaires irréductibles, qui

[(1)]Ferdinand Georg Frobenius (26 Octobre 1849, Berlin, Prusse [Allemagne] — 3 Août 1917, Berlin) « Über die Gruppencharaktere » 1896.

sont à un groupe G ce que sont au groupe $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ les exponentielles $\theta \mapsto e^i n\theta$, point de départ de la théorie des séries de Fourier : lorsque G opère sur un ensemble E, il en résulte de manière naturelle une représentation linéaire de G dans l'espace vectoriel des fonctions sur E et, si G préserve une mesure sur E, cette représentation est unitaire pour la norme L^2. Sa décomposition en somme directe hilbertienne de représentations irréductibles est une généralisation de la décomposition des fonctions périodiques en série de Fourier.

Les réalisations des relations d'incertitude de Heisenberg peuvent s'interpréter comme les représentations d'un groupe, appelé groupe de Heisenberg sur le corps $\mathbb{R}$. Le théorème de Stone-Von Neuman, fondamental pour la mécanique quantique, affirme l'unicité — à normalisation près — d'une représentation irréductible de ce groupe. Une conséquence de cette unicité est l'existence d'un groupe remarquable, appelé le groupe « métaplectique » par André Weil, revêtement d'ordre 2 du groupe « symplectique » formé des transformations linéaires de $\mathbb{R}^{2n}$ qui préservent la forme bilinéaire alternée $\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i y_j - x_j y_i$. Le groupe métaplectique sur $\mathbb{R}$ joue un rôle profond dans les domaines de l'analyse et de la géométrie différentielle où interviennent des groupes de Lie. D'autre part, c'est en vue d'applications à la théorie des nombres que le groupe métaplectique sur un corps local a été introduit par André Weil [(2)].

Il est donc frappant de découvrir que l'un des mystérieux groupes sporadiques, le premier groupe de Conway, construit en 1968, apparaît dans un analogue de cette construction sur le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$. Ce résultat est exposé dans le chapitre 3 de l'article d'Anne-Marie Aubert. Elle se place dans le cadre des groupes « extra-spéciaux » qui est en gros une formulation abstraite des groupes de Heisenberg sur les corps finis.

Le chapitre 4 de cet article est consacré à la théorie des représentations irréductibles du groupe des permutations. C'est un chapitre central de la combinatoire, qui correspond, par dualité, à la décomposition des espaces tensoriels intervenant, entre autres domaines, en physique quantique : par exemple, le principe d'exclusion de Pauli traduit simplement le fait que le groupe des permutations n'a que deux représentations de dimension 1.

Michel Broué nous montre comment certains groupes simples sporadiques, les groupes de Mathieu M_{12} et M_{24} et le groupe de Conway, déjà mentionné, apparaissent en étudiant les automorphismes de certains réseaux très particuliers d'espaces euclidiens (problèmes d'empilement de sphères) et de certains « codes correcteurs d'erreurs » [(3)].

[(2)] Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math. 111, 1964

[(3)] Le lien entre réseaux et codes a déjà été abordé lors des journées X-UPS 1993, « Codes géométriques algébriques et arithmétique sur les corps finis », dans l'exposé « Algebraic curves and sphere packings » de M. A. Tsfasman

Nous tenons à remercier la direction de l'École polytechnique, et tout particulièrement la Direction des Études, pour l'aide matérielle importante qu'elles ont apportée à la préparation des journées X-UPS ainsi qu'à la publication de ce volume.

Nous remercions aussi les secrétaires du Centre de Mathématiques pour leur contribution à l'organisation des journées X-UPS, notamment Claudine Harmide, Carole Juppin et Michèle Lavallette, qui nous ont assisté de manière efficace pendant les journées.

Les journées 2000 ont comporté une après-midi de travaux pratiques sur ordinateurs, dirigés par Jean Michel et François Digne (CNRS, Université de Picardie), pour laquelle l'aide de Gérard Guillerm, responsable technique du Service Informatique et Télématique et de Jean-Luc Bellon, ingénieur de recherche au Centre de mathématiques, nous a été particulièrement précieuse.

Nicole Berline et Claude Sabbah