PAVAGES DU PLAN

par

Yves Benoist

Résumé. Ce texte a deux objectifs :

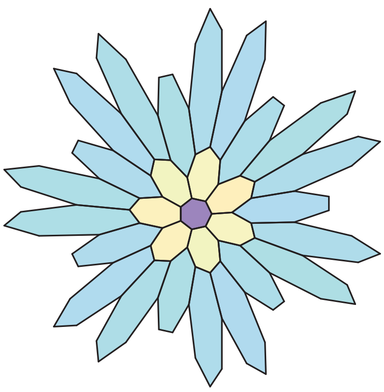
– D'une part, donner un survol sans démonstration de la théorie classique de Bieberbach des pavages euclidiens périodiques ainsi que de ses analogues hyperboliques, affines et projectifs.

– D'autre part, exhiber quelques exemples concrets de pavages périodiques et apériodiques en dimension 2 dans le contexte euclidien, mais aussi dans les contextes hyperboliques, affines et projectifs. En particulier, nous construisons des pavages affines du plan à l'aide d'heptagones affinement réguliers comme dans la fleur ci-dessous.

***Abstract* (Tiling the plane).** We survey without proofs Bieberbach's theory for euclidean periodic tilings and its hyperbolic, affine and projective analogs.

We also describe explicit examples of periodic and aperiodic 2-dimensional tilings in the euclidean setting as well as in the hyperbolic, the affine and the projective setting.

For instance, we construct aperiodic affine tilings of the plane with affinely regular heptagons as in the flower below.



1. Pavages

L'idée intuitive de pavage du plan est celle qui est familière au carreleur : à l'aide d'un nombre fini de types de carreaux, cet ouvrier recouvre tout un pan de mur en suivant le plus souvent un motif périodique.

1.1. Présentation générale

Les pavages que nous allons décrire dans ces exposés sont des généralisations de cette idée intuitive, généralisations qui ne seront probablement d'aucune utilité pour le carreleur ! Quelles sont alors nos motivations ? Les pavages ne seront pour nous qu'une des facettes très visuelle de la notion de groupe. Dans cette approche, ce sont en fait les groupes qui intéressent les mathématiciens.

L'intérêt des généralisations est alors évidente : elle permet l'étude d'une famille de groupes bien plus intéressants que « les groupes des pavages euclidiens du plan ». Ces groupes eux-mêmes tisseront des liens étroits avec d'autres domaines des mathématiques comme la théorie des nombres, la topologie ou les systèmes dynamiques mais aussi avec divers domaines de la physique.

Nous présentons dans ce texte un survol de ce sujet en nous attachant à construire explicitement quelques exemples de pavages périodiques et apériodiques en dimension 2 ou 3. En particulier, nous construirons, pour tout polygone convexe P_0 un pavage du plan affine dont dont les tuiles sont des images affines de P_0. La fleur, emblème de ce texte, en est l'exemple le plus joli : P_0 est un heptagone régulier et le pavage est de valence 3. L'existence de ces pavages, construits dans la section 5.4, semble nouvelle.

1.2. Pavés et groupes cristallographiques

Revenons sur l'idée intuitive de pavage : on se donne un nombre fini de tuiles polygonales $K_1, \ldots, K_\ell$ et on cherche à recouvrir le plan euclidien $E = \mathbb{R}^2$ à l'aide de tuiles $P_i = g_i(K_{a_i})$ images des précédentes par des éléments g_i du groupe G des isométries euclidiennes de E. On veut en outre que ces tuiles ne se touchent que sur leur bord. C'est cela un pavage du plan euclidien. Le pavage est dit périodique si le même motif se reproduit périodiquement dans deux directions (voir la figure 1 ou le livre [**19**] pour de jolies illustrations).

Les principales généralisations auxquelles nous allons nous intéresser consisteront à remplacer successivement le plan euclidien E par
– le plan hyperbolique,
– le plan affine,
– un ouvert convexe borné du plan.

Le groupe G sera alors, respectivement,
– le groupe des isométries du plan hyperbolique,
– le groupe des bijections affines du plan,
– le groupe des bijections projectives laissant stable cet ouvert convexe.

Avec uniquement ces exemples en tête, rappelons maintenant la définition d'un pavage de façon certainement trop formelle. On fixe un espace topologique E localement compact et un groupe G de bijections continues de E. On supposera pour simplifier que E est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ et que les éléments de G sont des difféomorphismes, ce qui est le cas dans tous nos exemples. On choisit des compacts $K_1, \ldots, K_\ell$ de E. Ces compacts K_i sont appelés « pavés standards » (l'usage du mot tuile étant réservé à la dimension 2). On appelle alors pavé un compact P de E de la forme $P = g(K_i)$ avec g dans G.

Un pavage est un ensemble $\mathcal{P}$ de pavés tels que
(i) $E = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$
(ii) $\forall\, P, Q \in \mathcal{P},\ \mathring{P} \cap \mathring{Q} = \varnothing$
(iii) Pour tout compact K de E, les pavés P de $\mathcal{P}$ qui rencontrent K sont en nombre fini.

Remarques
– Il est possible de décomposer la droite affine en une réunion dénombrable d'intervalles fermés deux à deux disjoints. Une telle décomposition n'est pas un pavage de la droite affine car elle ne vérifie pas la condition (iii).
– Pour les pavages euclidiens la condition (iii) est une conséquence des deux autres.

Pour tout g dans G, on note $g\mathcal{P}$ le pavage image : $g\mathcal{P} = \{g(P) \mid P \in \mathcal{P}\}$. Le groupe de symétrie du pavage est donc le groupe $\Gamma_{\mathcal{P}} = \{g \in G \mid g\mathcal{P} = \mathcal{P}\}$.

On dit que le pavage $\mathcal{P}$ est *périodique* si il existe un ensemble fini $\mathcal{F}$ de pavés de $\mathcal{P}$ tels que tout pavé de $\mathcal{P}$ est l'image d'un pavé de $\mathcal{F}$ *par un élément g du groupe de symétrie du pavage* $\Gamma_{\mathcal{P}}$. Si ce n'est pas le cas, on dit que le pavage est *non périodique.* On dit qu'un pavage est *apériodique* si son groupe de symétrie est fini.

Définition 1.1. On appelle groupe cristallographique, un sous-groupe Γ de G égal au groupe de symétrie d'un pavage périodique.

Comme souvent en mathématiques, derrière une (bonne) définition se cache une idée. L'idée ici est qu'il est souvent possible, de modifier la forme des pavés standards d'un pavage périodique : pensez à un pavage périodique du plan par des parallélogrammes que l'on modifie en un puzzle périodique (voir figure 1) ou pensez aux dessins d'Escher (voir [**15**]). Pour classifier les pavages périodiques, on va donc se concentrer sur leur groupe de symétrie.

Voici une autre définition des groupes cristallographiques.

Définition 1.2. Un sous-groupe Γ de G est dit cristallographique si
(i) Pour tout compact K de E, l'ensemble $\{g \in \Gamma \mid g(K) \cap K \neq \varnothing\}$ est fini.
(ii) Il existe un compact K_0 de E tel que $E = \bigcup_{g\in\Gamma} g(K_0)$.

Remarques
– Ces deux conditions sont exactement celles qui assurent que Γ est « discret » et que « l'espace des orbites » $\Gamma\backslash E$ est un espace compact.
– Pour faire référence à chacun de nos quatre exemples, on qualifiera le pavage et le groupe cristallographique d'euclidien, d'hyperbolique, d'affine ou de projectif.
– L'équivalence de ces deux définitions sera admise. La difficulté est de réduire K_0 de sorte que les compacts $g(K_0)$ soient d'intérieurs disjoints, ce qui permet de construire un pavage $\mathcal{P} := \{g(K_0) \mid g \in \Gamma\}$ avec un seul pavé standard K_0. L'idée, qui remonte essentiellement à Poincaré, consiste à construire une distance « riemannienne » Γ-invariante d sur E, à choisir un point x_0 dans E qui n'est fixé par aucun élément de Γ et à prendre $K_0 = \{x \in E \mid \forall g \in \Gamma \quad d(x, x_0) \leqslant d(x, gx_0)\}$. On déforme alors légèrement ce pavé standard pour que Γ soit exactement le groupe de symétrie du pavage.

On dit qu'un sous-groupe Γ' d'un groupe Γ est d'indice fini si l'ensemble quotient Γ/Γ' est fini. L'indice est le cardinal de ce quotient. Voici un corollaire immédiat de la définition 1.2.

Corollaire 1.3. *Soient $\Gamma' \subset \Gamma$ deux sous-groupes de G. On suppose que Γ' est d'indice fini dans Γ. Le groupe Γ' est cristallographique si et seulement si Γ l'est.*

L'objectif de la théorie des pavages périodiques est la classification des groupes cristallographiques. Nous verrons que cet objectif n'est atteint qu'en petite dimension. Faute de mieux, en dimension supérieure, on se contente d'un objectif moins ambitieux : une classification à sous-groupe d'indice fini près. Et nous verrons que cet objectif n'est atteint que pour les pavages euclidiens.

L'objectif de la théorie des pavages apériodiques est encore plus modeste. Nous nous contenterons de construire des exemples de pavés standards permettant de paver l'espace E mais pas de façon périodique. Nous n'aborderons pas les jolis aspects développés dans les exposés de F. Labourie et R. Kenyon (pavages autosimilaires, comptages...).

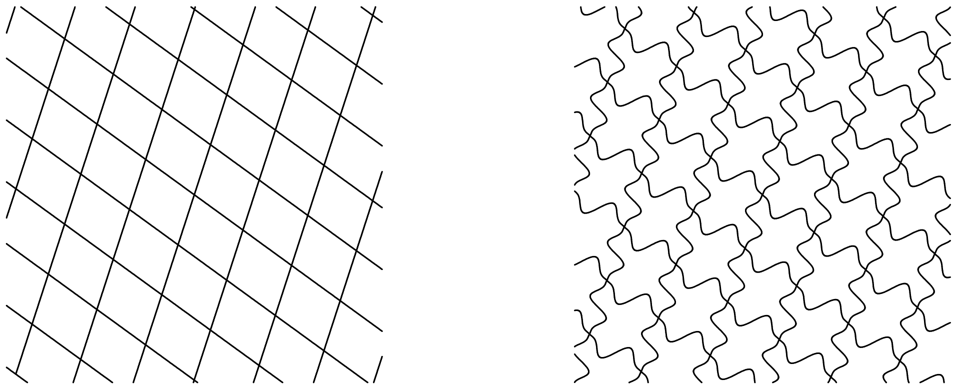


FIGURE 1. Déformation de la tuile standard d'un pavage

2. Pavages euclidiens

Oublions vite ces généralités, rappelons les trois théorèmes de Bieberbach qui décrivent les pavages euclidiens périodiques et donnons quelques exemples de pavages euclidiens apériodiques. Ces théorèmes et exemples nous serviront de point de comparaison pour l'étude de pavages plus généraux.

Dans cette partie, E est l'espace euclidien de dimension n et G est le groupe des isométries de E : produits d'une application linéaire orthogonale par une translation.

2.1. Pavages euclidiens périodiques

La description des groupes cristallographiques de l'espace euclidien est donnée par les trois théorèmes de Bieberbach qui datent des années 1910. Nous les énonçons sans démonstration.

***Théorème 2.1* (Bieberbach).** *Pour tout groupe cristallographique Γ de l'espace euclidien E de dimension n, le sous-groupe Γ' formé des translations est d'indice fini dans Γ et est engendré par n translations linéairement indépendantes.*

Remarques

– Le sous-groupe Γ' est donc un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.

– L'image $\mathcal{P}'$ d'un pavage euclidien périodique $\mathcal{P}$ par une bijection affine de E est donc encore un pavage euclidien périodique. Notons cependant que les groupes $\Gamma_{\mathcal{P}}$ et $\Gamma_{\mathcal{P}'}$ ne sont pas en général isomorphes ; en voici un exemple bien simple : prendre pour $\mathcal{P}$ un pavage carré et pour $\mathcal{P}'$ un pavage rectangulaire.

Le premier théorème de Bieberbach signifie donc qu'à sous-groupe d'indice fini près, et à transformation affine près, il n'y a qu'un seul groupe cristallographique euclidien.

Les deux autres théorèmes de Bieberbach décrivent ce passage à un sous-groupe d'indice fini près. Le deuxième théorème de Bieberbach affirme qu'un isomorphisme entre groupes cristallographiques est toujours induit par une bijection affine.

***Théorème 2.2* (Bieberbach).** *Tout isomorphisme de groupes abstraits $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ entre deux groupes cristallographiques de l'espace euclidien E est de la forme $\varphi(g) = h \circ g \circ h^{-1}$ où h est une bijection affine de E.*

Le dernier est un théorème de finitude.

***Théorème 2.3* (Bieberbach).** *Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de groupes cristallographiques de l'espace euclidien de dimension n.*

On peut donc tenter de dresser la table des classes d'isomorphismes de groupes cristallographiques : il y en a 17 en dimension 2, 219 en dimension 3. Dressées à la fin du 19$^{\text{ième}}$ siècle (voir [**20**]), une meilleure compréhension de ces tables est toujours un sujet d'actualité (voir [**13**]).

2.2. Pavages euclidiens apériodiques

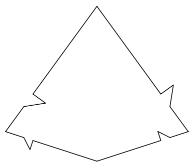
Les premiers exemples de pavages du plan euclidien par des pavés qui ne permettent pas de pavages périodiques sont dus à R. Berger (voir [**7**] et [**28**]). Cependant l'exemple le plus célèbre est dû à Penrose :

Le pavage de Penrose a deux pavés standards : le cerf-volant C et la flèche F ; ce sont, grosso modo, des quadrilatères obtenus comme réunion de deux triangles isocèles égaux, le premier de cotés 1, k et k, le deuxième de côtés 1, 1 et k où k est le nombre d'or : $k^2 = k + 1$ de sorte que leurs angles soient des multiples entiers de $\pi/5$ (voir figure 2.A). Les cotés sont échancrés pour forcer certaines règles de sélection. Le processus de construction de la figure 2.B consiste à remplacer de façon itérative chaque cerf-volant par deux cerf-volants plus une flèche et chaque flèche par un cerf-volant plus une flèche. C'est ce processus qui est utilisé pour dessiner les figures (voir le petit programme donné dans la section 7).

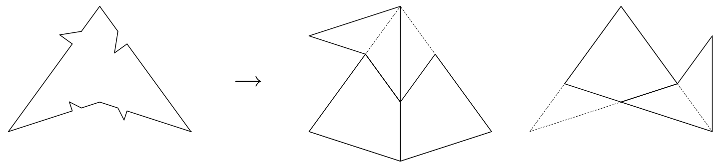
Exercice 2.4

a) Montrer que ce processus de construction permet de paver le plan euclidien avec C et F comme tuiles standard.

b) Montrer que tout pavage euclidien du plan à l'aide de C et F est apériodique.



A Le cerf-volant et la flèche



B Le processus de construction

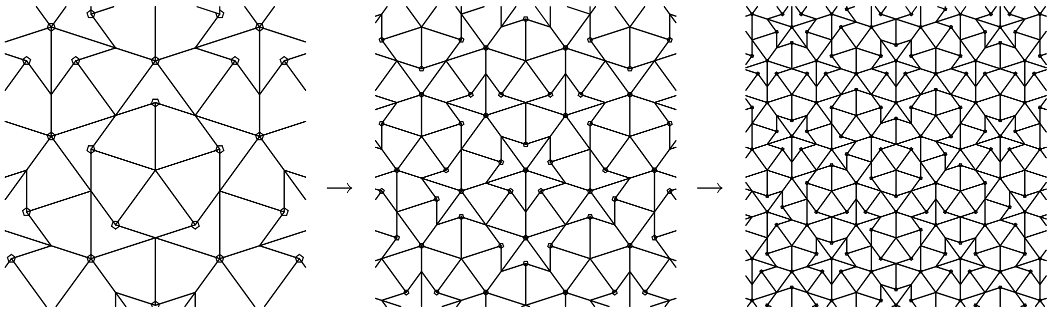


FIGURE 2. C Le pavage de Penrose

Indication

a) Remarquer que dans la figure 2.C, après quatre itérations du processus de construction, on retrouve, après homothétie, un pavage contenant le pavage initial.

b) Vérifier que les tuiles s'assemblent comme dans la figure 2.B, ce qui permet de remonter le processus de construction et d'obtenir un pavage ayant le même groupe de symétrie mais des tuiles plus grosses.

Pour plus de détails sur le procédé de construction, nous renvoyons à l'article de Penrose ([**27**]), ou au livre [**31**] pour cette très jolie construction.

L'existence d'une construction analogue avec un seul pavé standard n'est pas connue :

Question 2.5 **(Penrose, 1979).** *Existe-t-il un polygone qui permet un pavage euclidien du plan mais qui ne permet pas de pavage euclidien périodique ?*

Pour $p = 3, 4, 5$ ou 6, il existe des polygones convexes à p côtés qui permettent un pavage euclidien (périodique) du plan. Un argument classique de comptage prouve que cela n'est plus possible pour $p \geqslant 7$. Détaillons cet argument sous forme d'un exercice, exercice qui permet de réfléchir à la question ci-dessus.

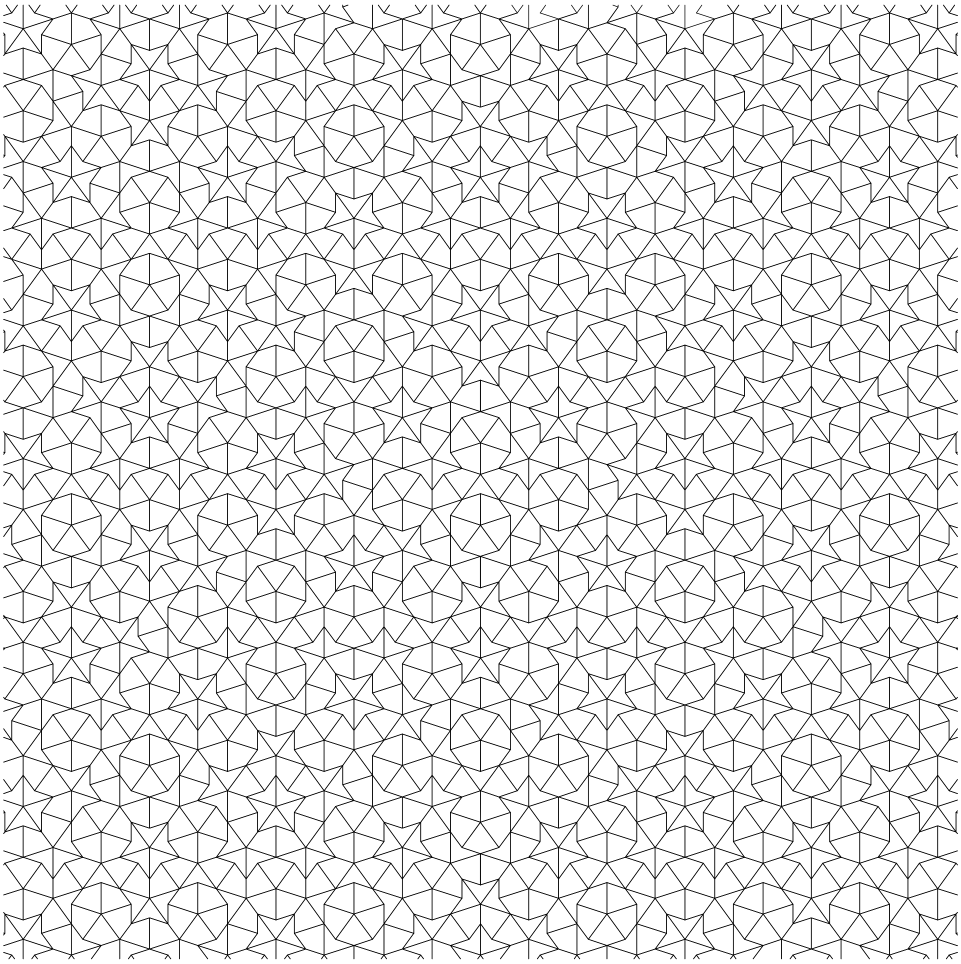


FIGURE 3. Suite de la figure 2

Exercice 2.6. Montrer qu'il n'existe pas de pavages euclidiens du plan avec un polygone convexe à p côtés lorsque $p \geqslant 7$.

Indication. Choisissons un grand carré de côté N et notons S_N, A_N et F_N les nombres de sommets, d'arêtes et de faces du pavage inclus dans ce carré. On montrera que
(i) $3S_N \leqslant 2A_N + \mathcal{O}(N)$ (chaque sommet est au moins de valence 3),
(ii) $(p-2)\pi A_N \leqslant 2p\pi S_N + \mathcal{O}(N)$ (étudier la somme des angles aux sommets) et
(iii) S_N n'est pas un $\mathcal{O}(N)$.

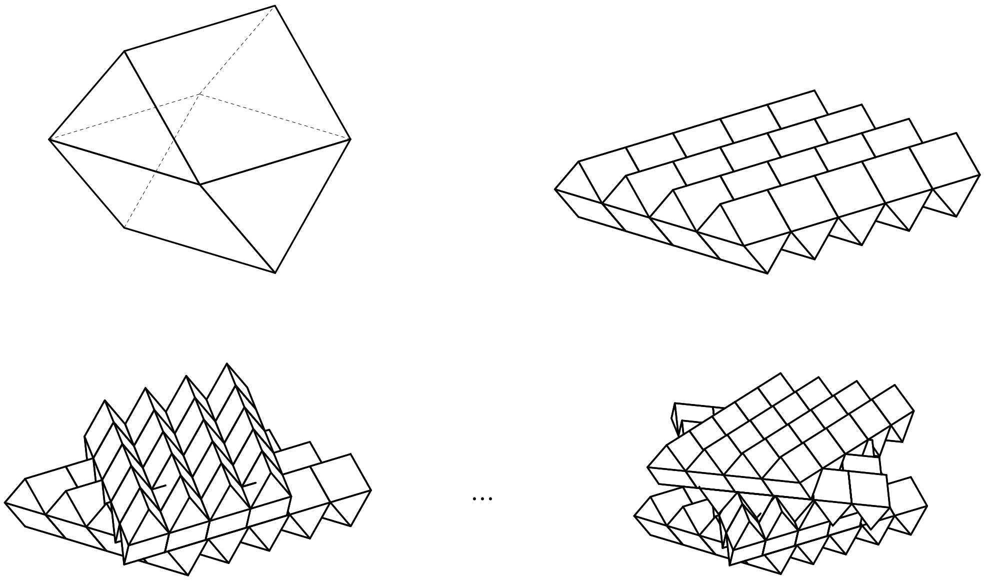


FIGURE 4. Le biprisme de Conway et son pavage non périodique

Notons cependant, qu'en dimension 3, on a le joli exemple suivant (cf. [**31**]).

Proposition 2.7 **(Conway & Schmid, 1988).** *Il existe un polyèdre convexe qui permet un pavage euclidien de l'espace* $\mathbb{R}^3$ *mais pas de pavage euclidien périodique.*

Remarques
– L'exemple de Conway améliore un exemple de Schmid qui n'était pas convexe (cf. [**31**]).
– On aimerait bien sûr trouver un exemple encore meilleur qui ne permettrait que des pavages apériodiques.

Pour construire le biprisme de Conway, on construit tout d'abord un prisme : on part d'un losange du plan horizontal, appelé base du prisme, dont l'angle α est irrationnel à π et on le « recouvre d'un toit dont les deux pentes font un angle $\pi/4$ avec l'horizontale ». Le polyèdre de Conway est obtenu en recollant deux copies de ce prisme le long de leur base. Ce polyèdre a donc huit faces : quatre triangles et quatre parallélogrammes qui sont deux à deux isométriques (voir figure 4).

Le pavage périodique du plan horizontal par ce losange fournit une « couche » de pavés de Conway dont les « toits » s'assemblent en un « plan plissé ». Les directions des plis des « plans plissés » supérieur et inférieur diffèrent de l'angle α.

Comme α est irrationnel, le pavage obtenu en superposant successivement de telles couches est non périodique. Il reste à montrer que ce pavage est le seul possible avec le polyèdre de Conway. Cela est laissé en exercice. □

3. Géométrie hyperbolique

Pour parler de pavage hyperbolique, nous aurons besoin d'un peu de familiarité avec la géométrie hyperbolique.

3.1. L'espace hyperbolique

Le plan hyperbolique, découvert par Bolyai et Lobachevski, est historiquement le premier exemple de géométrie qui prouve que le dernier axiome de la géométrie d'Euclide sur l'unicité de la parallèle à une droite issue d'un point est un axiome indépendant des autres axiomes d'Euclide. De nos jours, l'importance du plan hyperbolique dépasse de loin cette remarque. Il n'est pas trop fort de dire que le plan hyperbolique aura fasciné des mathématiciens pendant plus d'un siècle et demi (et ce n'est certainement pas fini !) à cause de ses interactions avec des sujets très variés comme les courbes algébriques, les fonctions holomorphes, les corps de quaternions, les groupes discrets...

Décrivons directement l'espace hyperbolique de dimension $n \geqslant 2$. Le plan hyperbolique étant bien sûr l'espace hyperbolique de dimension 2. L'espace hyperbolique est un espace métrique (E, d) homéomorphe à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ dont l'intérêt vient de la taille de son groupe d'isométrie qui est de dimension $n(n+1)/2$; seuls l'espace euclidien et la sphère font aussi bien. Il existe de nombreux modèles de cet espace métrique. Nous en décrirons cinq... chacun ayant son utilité :
⋆ Le modèle de la boule projective de Klein (Ω_n, d),
⋆ Le modèle du demi-hyperboloïde (H_n, d),
⋆ Le modèle de la boule conforme de Poincaré (B_n, d),
⋆ Le modèle de la demi-sphère conforme (Σ_n^+, d),
⋆ Le modèle du demi-espace conforme de Lobachevski (P_n, d).
Ces modèles sont bien sûr deux à deux isométriques.

3.1.1. La boule projective Ω_n

Ce modèle, aussi appelé modèle de Klein, est probablement le plus simple et le mieux adapté aux questions que nous aborderons dans la partie 6. Nous verrons que ce modèle respecte les « lignes droites » mais déforme les angles.

On a

$$\Omega_n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 < 1\}$$

où on a noté $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. La distance entre deux points x et x' de Ω_n est donnée par

$$d(x, x') = |\log([a, a', x, x'])|,$$

où a, a' sont les points du bord de Ω_n qui sont sur la même droite que x et x' et où $[a, a', x, x']$ est le birapport de ces quatre points alignés : dans un système de coordonnées affines, on a $[a, a', x, x'] = \frac{x'a \cdot xa'}{xa \cdot x'a'}$. L'exercice suivant montre que d est une distance. Elle est appelée distance de Hilbert.

Exercice 3.1. Montrer l'inégalité, pour tous x, y, z dans Ω_n, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ avec égalité si et seulement si y est sur le segment $[x, z]$.

Indication. Construire, en utilisant les propriétés du birapport, un point y' de Ω aligné avec x et z et tel que $d(x, y') \leqslant d(x, y)$ et $d(y', z) \leqslant d(y, z)$.

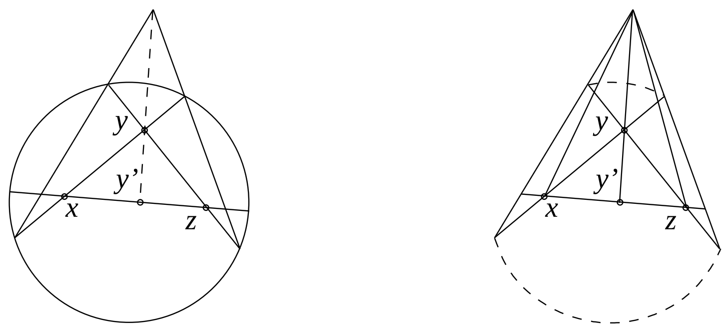


FIGURE 5. L'inégalité triangulaire pour la distance de Hilbert

On appelle chemin géodésique d'un espace métrique (E, d) une application c définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E telle que, pour tous t, t' dans I, on a $d(c(t), c(t')) = |t' - t|$. On appelle géodésique la courbe image d'un chemin géodésique : c'est l'analogue des « lignes droites » de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. L'exercice précédent prouve aussi que les géodésiques de Ω_n sont des segments de droites.

Dans l'espace hyperbolique, deux points sont donc toujours joints par une et une seule géodésique. Notons que cette propriété n'est pas satisfaite par tous les espaces métriques.

Exercice 3.2. Montrer que l'application $\mathbb{R} \to \Omega_n; t \mapsto (\tanh t/2, 0, \dots, 0)$ est un chemin géodésique.

3.1.2. Le demi-hyperboloïde H_n

> Ce modèle déforme les angles et les géodésiques... mais il sera très utile pour décrire le groupe des isométries de l'espace hyperbolique. Il jouera aussi un rôle crucial dans la construction de pavages affines apériodiques dans la section 5.4.

On note q la forme quadratique lorentzienne sur l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^{n+1}$ et b la forme bilinéaire associée : pour $v = (x_0, \ldots, x_n)$ et $w = (y_0, \ldots, y_n)$, on a

$$b(v, w) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \ \text{ et } \ q(v) = b(v, v).$$

On note C_n le cône du futur de cette forme lorentzienne et H_n la nappe supérieure de l'hyperboloïde :

$$C_n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q(v) < 0 \text{ et } x_0 > 0\},$$
$$H_n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q(v) = -1 \text{ et } x_0 > 0\}.$$

On définit encore la distance de deux points v et v' de H_n par

$$d(v, v') = |\log([p, p', v, v'])|,$$

où p, p' sont les points du bord du cône C_n qui sont sur la même droite que v et v' et où $[p, p', v, v']$ est le birapport de ces quatre points alignés.

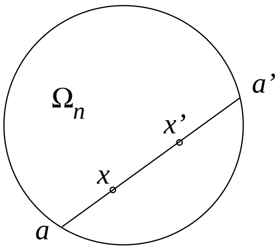


FIGURE 6. La boule projective

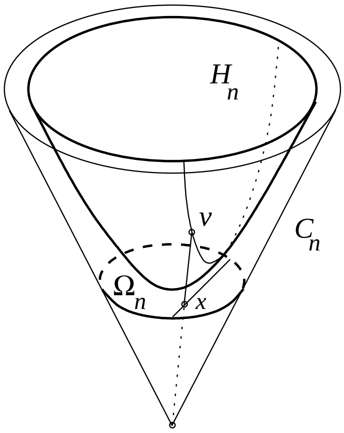


FIGURE 7. ... et le demi-hyperboloïde

L'exercice suivant prouve que ce modèle est isométrique au précédent.

Exercice 3.3. Montrer que la formule $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - |x|^2}}(1, x)$ définit une isométrie φ de la boule projective Ω_n sur le demi-hyperboloïde H_n.

Indication. On interprétera géométriquement l'application φ et on utilisera les propriétés du birapport pour montrer que, pour tous points x, x' de Ω_n, on a $d(\varphi(x), \varphi(x')) = d(x, x')$.

Exercice 3.4

a) Montrer que l'application $\mathbb{R} \to H_n; t \mapsto (\cosh t/2, \sinh t/2, 0, \ldots, 0)$ est un chemin géodésique.

b) Montrer que les géodésiques de H_n sont les arcs d'hyperboles obtenues par intersection de H_n avec un 2-plan.

c) Montrer que, pour tout v, v' dans H_n, on a

$$b(v, v') < 0 \quad \text{et} \quad \cosh(\tfrac{1}{2}d(v, v')) = -b(v, v').$$

3.1.3. La boule conforme B_n

Nous verrons que ce modèle, aussi appelé modèle de Poincaré, respecte les angles mais déforme les géodésiques.

On a, comme pour le modèle projectif,

$$B_n = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid |y|^2 < 1\}.$$

Pour définir la distance d sur B_n, on va décrire une isométrie ψ du modèle projectif Ω_n sur la boule B_n. Cette isométrie est donnée par la formule

$$\psi(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - |x|^2}}$$

Exercice 3.5

a) Interpréter géométriquement l'application ψ.

b) Montrer que l'application $\mathbb{R} \to B_n; t \mapsto (\tanh t/4, 0, \ldots, 0)$ est un chemin géodésique.

c) Montrer que les géodésiques de B_n sont les arcs de cercles ou de droites orthogonaux au bord de B_n.

Indication. Lire d'abord la construction du modèle suivant.

3.1.4. Le modèle de la demi-sphère Σ_n^+

Ce modèle permet de faire le lien entre les boules projective et conforme. Nous verrons que ce modèle respecte les angles mais déforme les géodésiques.

On a

$$\Sigma_n^+ = \{s = (s_1, \ldots, s_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s_1^2 + \cdots + s_{n+1}^2 = 1 \text{ et } s_{n+1} > 0\}.$$

Pour définir la distance d sur Σ_n^+, on décide que les identifications

$$\Omega_n \xrightarrow{\psi_1} \Sigma_n^+ \xrightarrow{\psi_2} B_n$$

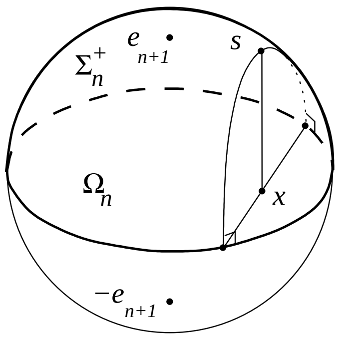


FIGURE 8. La boule projective et la demi-sphère

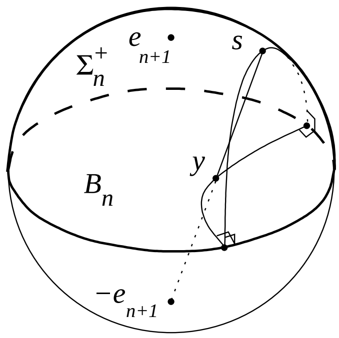


FIGURE 9. La boule conforme et la demi-sphère

données par les formules :

$$\psi_1(x) = (x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1-|x|^2}) \text{ et } \psi_2(s) = \frac{1}{1+s_{n+1}}(s_1, \ldots, s_n)$$

sont des isométries. On remarquera que $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$.

Exercice 3.6
a) Interpréter géométriquement les applications ψ_1 et ψ_2.
b) Montrer que l'application $\mathbb{R} \to \Sigma_n^+; t \mapsto (\tanh t/4, 0, \ldots, 0, (\cosh t/4)^{-1})$ est un chemin géodésique.
c) Montrer que les géodésiques de Σ_n^+ sont les arcs de cercles orthogonaux au bord de Σ_n^+.

3.1.5. Le demi-espace P_n

Nous utiliserons peu ce modèle dans la suite. Il est appelé modèle de Lobachevski mais parfois aussi modèle de Poincaré! Il est très utilisé en dimension $n = 2$: en effet, il est bien adapté à l'étude des « fonctions automorphes ». Comme pour la boule conforme, il respecte les angles et déforme les géodésiques.

On a

$$P_n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_1 > 0\}.$$

Pour définir la distance d sur P_n, on va décrire une isométrie η de la boule B_n sur le demi-espace P_n. Cette isométrie est donnée par la formule

$$\eta(y) = \frac{2(y+e_1)}{|y+e_1|^2} - e_1$$

où $e_1 = (1, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

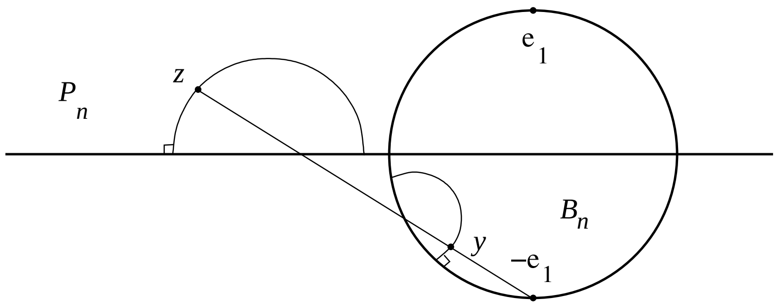


FIGURE 10. La boule et le demi-espace conformes

Exercice 3.7
a) Interpréter géométriquement l'application θ comme une inversion de centre $-e_1$.
b) Montrer que l'application $\mathbb{R} \to P_n; t \mapsto (e^{t/2}, 0, \ldots, 0)$ est un chemin géodésique.
c) Montrer que les géodésiques de P_n sont les arcs de cercles ou de droites orthogonaux au bord de P_n.

3.2. Le groupe des isométries de l'espace hyperbolique

Grâce au modèle de l'hyperboloïde, il est facile de décrire le groupe des isométries de l'espace hyperbolique.

Notons $O(q)$ le groupe orthogonal de la forme quadratique lorentzienne q.

$$O(q) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n+1}) \mid q \circ g = q\}.$$

Les éléments de $O(q)$ envoient le demi-hyperboloïde H_n sur $\pm H_n$. On introduit donc le sous-groupe d'indice 2.

$$O^+(q) = \{g \in O(q) \mid g(H_n) = H_n\}.$$

Comme les transformations linéaires préservent l'alignement et le birapport, les éléments de $O^+(q)$ sont des isométries de l'espace hyperbolique H_n. À l'inverse, on peut montrer que toutes les isométries de l'espace hyperbolique H_n sont données par des éléments de $O^+(q)$.

Dans l'exercice suivant, on identifie les éléments de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n+1})$ à leur matrice dans la base canonique $(e_0, \ldots, e_n)$.

Exercice 3.8. Soit J la matrice diagonale $\mathrm{diag}(-1, 1, 1, \ldots, 1)$ de taille $n+1$.
a) Montrer que $O(q) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n+1}) \mid g \circ J \circ {}^t g = J\}$.
b) En déduire que, pour tout g dans $O(q)$, on a $\det g = \pm 1$.

Pour tout sous-espace vectoriel W de $V = \mathbb{R}^{n+1}$, on note $W^\perp$ son orthogonal : $W^\perp = \{v \in V \mid \forall\, w \in W \;\; b(v,w) = 0\}$.

Exercice 3.9. Montrer que $\dim W + \dim W^\perp = n+1$ et que $(W^\perp)^\perp = W$.

L'exercice suivant affirme que l'espace hyperbolique est homogène sous l'action de son groupe d'isométrie.

Exercice 3.10
a) Montrer que, pour tout v dans H_n, la restriction de la forme quadratique q à l'orthogonal de la droite $\mathbb{R}v$ est définie positive.
b) En déduire que pour tout v, w dans H_n, il existe une isométrie $g \in O^+(q)$ telle que $g(v) = w$.

Indication. Utiliser le théorème de réduction des formes quadratiques réelles.

Certaines isométries nous seront très utiles pour construire des pavages en 4.1 : ce sont les symétries hyperplanes. On appelle hyperplan H de H_n l'intersection d'un hyperplan W de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec H_n, lorsqu'elle est non vide.

Exercice 3.11
a) Montrer qu'un hyperplan W de V rencontre H_n si et seulement si la droite $W^\perp$ vérifie $W^\perp \cap \overline{C} = \{0\}$. On dit alors que $W^\perp$ est de type espace.
b) Montrer de même qu'une droite Δ de V rencontre H_n si et seulement si l'hyperplan $\Delta^\perp$ vérifie $\Delta^\perp \cap \overline{C} = \{0\}$. On dit alors que $\Delta^\perp$ est de type espace.

Indication. Utiliser encore le théorème de réduction des formes quadratiques réelles.

On appelle symétrie hyperplane s_H l'unique élément de $O^+(q)$ égal à l'identité sur W et à moins l'identité sur $W^\perp$. Elle est donnée par la formule, pour tout v dans V,

$$s_H(v) = v - b(v_0, v)v_0$$

où v_0 est le vecteur, unique au signe près, de la droite $W^\perp$ tel que $q(v_0) = 1$.

En dimension $n = 2$, les hyperplans H sont des géodésiques. On parle alors de symétrie géodésique.

3.3. L'angle en géométrie hyperbolique

Par analogie avec la géométrie euclidienne, on va définir l'angle en géométrie hyperbolique. On vérifiera que, pour la boule conforme, il coïncide avec l'angle euclidien.

L'angle entre deux chemins géodésiques c_1 et c_2 de l'espace hyperbolique qui sont issus d'un même point $x_0 = c_1(0) = c_2(0)$ est le réel $\theta \in [0, \pi]$ défini par la formule de la corde :

$$2 \sin \theta/2 = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} d(c_1(t), c_2(t)).$$

Cette définition ne dépend pas du modèle choisi. Comme chacun des modèles est inclus dans un espace euclidien, on parlera d'*angle hyperbolique* pour différencier cet angle de l'angle euclidien.

Terminons cette section en esquissant la démonstration sous forme d'exercices de l'affirmation suivante que nous avions déjà annoncée :

L'angle hyperbolique est bien défini et coïncide avec l'angle euclidien dans les modèles B_n, Σ_n^+ et P_n.

Notons

$$\partial H_n = \{v = (v_0, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q(v) = 0 \text{ et } v_0 = 1\}.$$

C'est une sphère de dimension $n-1$ que l'on appelle *sphère conforme* ou *bord de l'espace hyperbolique*. L'action naturelle du groupe $O^+(q)$ sur H_n se prolonge à son bord : pour g dans $O^+(q)$ et v dans ∂H_n, $g \cdot v$ est l'unique élément de ∂H_n colinéaire à $g(v)$.

Exercice 3.12

a) Montrer que l'action de $O^+(q)$ sur le bord ∂H_n préserve les angles euclidiens entre les vecteurs tangents.
b) Montrer que l'action de $O^+(q)$ sur le modèle Σ_n^+ préserve les angles euclidiens entre les vecteurs tangents.
c) Montrer que l'action de $O^+(q)$ sur la boule conforme B_n préserve les angles euclidiens entre les vecteurs tangents.

Indication

a) On vérifiera que pour tout g dans $O^+(q)$ et tout v dans ∂H_n, la différentielle de g en v induit une similitude entre les espaces tangents.
b) Cela résulte de a) si on identifie Σ_n^+ à une demi-sphère de ∂H_{n+1} à l'aide de l'application $s \mapsto v := (1, s)$.
c) Cela résulte de b) car ψ_2 est une inversion et donc préserve les angles euclidiens.

Exercice 3.13

a) Montrer que l'angle hyperbolique est bien défini et que, dans la boule projective, si $x_0 = 0$ alors l'angle hyperbolique est égal à l'angle euclidien.
b) Montrer que, dans la boule conforme B_n, l'angle hyperbolique est égal à l'angle euclidien.
c) idem pour les modèles Σ_n^+ et P_n.

Indication

a) c'est un petit calcul.

b) Lorsque $x_0 = 0$, cela résulte du a). Le cas général s'en déduit car, d'une part, l'espace hyperbolique est homogène sous l'action de $O^+(q)$ (exercice 3.10) et, d'autre part, l'action de $O^+(q)$ sur la boule conforme B_n préserve les angles euclidiens (exercice 3.12) et les angles hyperboliques.

4. Pavages hyperboliques

Dans cette partie, nous commençons par la construction due à Poincaré des pavages périodiques du plan hyperbolique.

Nous présentons ensuite un panorama sans démonstration des analogues hyperboliques des théorèmes de Bieberbach, en commençant tout d'abord par la dimension 2.

Nous terminerons par des constructions de pavages non périodiques du plan hyperbolique à l'aide d'une seule tuile convexe.

Dans cette partie E est l'espace hyperbolique de dimension n et G est le groupe $O^+(q)$ des isométries de E.

4.1. Construction de pavages périodiques du plan hyperbolique

Commençons par décrire complètement la construction la plus simple de pavages périodiques pour le plan hyperbolique.

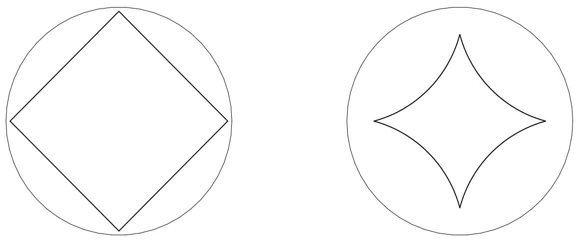


FIGURE 11. Un polygone convexe dans les boules projective et conforme

Définition 4.1. Un polygone hyperbolique P est une partie compacte connexe du plan hyperbolique délimitée par un nombre fini de géodésiques.
Le polygone P est dit convexe si il contient les segments géodésiques joignant deux de ses points.

On note p le nombre de sommets de P et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les angles en ces sommets. Lorsque $p = 3$, on parle de triangle hyperbolique.

Remarques
– Dans la boule projective, la notion de polygone hyperbolique coïncide avec la notion de polygone euclidien et la convexité coïncide avec la convexité euclidienne, mais les angles sont « faussés ». Dans la boule conforme, les côtés du polygone sont des arcs de cercles ou de droites orthogonaux au bord, la convexité ne coïncide donc plus avec la convexité euclidienne, mais les angles sont « bons ».
– Comme en géométrie euclidienne, un polygone hyperbolique est convexe si et seulement si tous ses angles sont « rentrants » (i.e. si le prolongement des côtés est extérieur au polygone).

L'exemple le plus simple de pavage périodique du plan hyperbolique est obtenu par une construction qui est analogue à celle du pavage carré du plan euclidien. Construction qui a été magnifiquement dessinée par Escher (voir [**15**]).

***Proposition 4.2* (Poincaré, 1880).** *On part d'un polygone hyperbolique convexe P_0 dont les angles sont de la forme $\alpha_i = 2\pi/d_i$ où d_i est un entier supérieur ou égal à 3. On suppose*
– soit que les entiers d_i sont pairs.
– soit que les côtés de P_0 sont égaux.
On construit les polygones symétriques de P_0 par rapport à chacun de ses côtés. On obtient ainsi de nouveaux polygones dont on reprend les symétriques par rapport à leurs côtés et ainsi de suite... Tous ces polygones forment un pavage périodique du plan hyperbolique.

Remarques
– La symétrie par rapport à une géodésique a été définie dans la section 3.2.
– Contrairement au cas euclidien, il existe de nombreux tels polygones hyperboliques. C'est ce que prouvent les deux exercices suivants.

Exercice 4.3
a) Montrer que pour tout $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \pi$, il existe un triangle du plan hyperbolique dont ce sont les angles.
b) Montrer que ce triangle est unique à isométrie près.

Indication. Utiliser le modèle de la boule conforme.

***Exercice 4.4*.** Soient $p \geqslant 3$, $r \in]0,1[$ et $P_{r,p}$ le polygone convexe hyperbolique dont les sommets $x_1, \ldots, x_p$ sont donnés dans la boule conforme B_2 par $x_k = (r\cos 2k\pi/p, r\sin 2k\pi/p)$. Montrer que les angles de $P_{r,p}$ sont égaux et qu'ils décroissent continûment de $(p-2)\pi/p$ à 0 lorsque r croît de 0 à 1.

Indication. Faire un dessin.

Expliquons maintenant en détail pourquoi la construction de Poincaré fournit bien un pavage. La démarche est très simple. On va construire des bouts de pavage sur des parties $P^{(n)}$ de plus en plus grosses, chacune étant obtenue à partir de la précédente en ajoutant une « couronne de tuiles ». Le point essentiel étant la convexité de $P^{(n)}$. Pour raccourcir le raisonnement, on supposera que $d_i \geqslant 10$ c'est à dire que $\alpha_i \leqslant \pi/5$. Cette condition nous permettra d'assurer que les polygones que nous allons construire dans le raisonnement ont des angles rentrants et sont donc convexes.

On part donc de notre polygone convexe P_0 qui va jouer le rôle de tuile standard. On note $x_1, \ldots, x_p$ les sommets de P_0. Comme $\alpha_1 = 2\pi/d_1$, on peut construire des polygones $P_0, P_1, \ldots, P_{d_1}$ « en faisant rouler P_0 autour de x_1 ». C'est-à-dire en posant $P_{i+1} = g_i(P_i)$ où g_i est la symétrie par rapport au côté de P_i qui contient x_1 (mais qui n'est pas inclus dans P_{i-1}, lorsque $i \geqslant 1$). Nos hypothèses assurent que les polygones P_i sont d'intérieurs disjoints et que la réunion $Q_1 := P_1 \cup \cdots \cup P_{d_1}$ est un voisinage de x_1 qui est encore un polygone convexe (à $(p-2)d_1$ côtés).

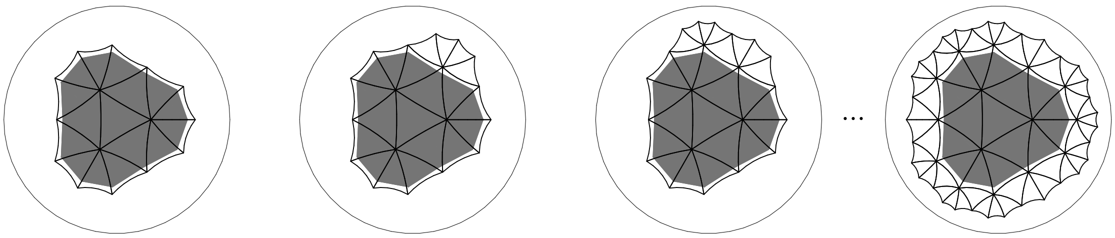


FIGURE 12. Construction de la $n^{\text{ème}}$ couronne de tuiles d'un pavage hyperbolique dans la boule conforme

La même construction autour des sommets $x_2, \ldots, x_p$ donne des polygones convexes $Q_2, \ldots, Q_p$.

La réunion $P^{(1)} := Q_1 \cup \cdots \cup Q_p$ est alors un polygone convexe et un voisinage de P vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $P^{(1)}$ est pavé par des polygones isométriques à P_0 qui sont deux à deux d'intérieurs disjoints.

(ii) Un sommet de $P^{(1)}$ est dans au plus trois tuiles de ce pavage.

(iii) Chaque fois que deux de ces tuiles se touchent le long d'une arête, elles sont symétriques par rapport à cette arête.

Le polygone $P^{(1)}$ a des sommets $y_1, \ldots, y_q$. Pour chacun de ces sommets y_k, on choisit un pavé P'_k le contenant. En faisant rouler P'_k autour de y_k, on

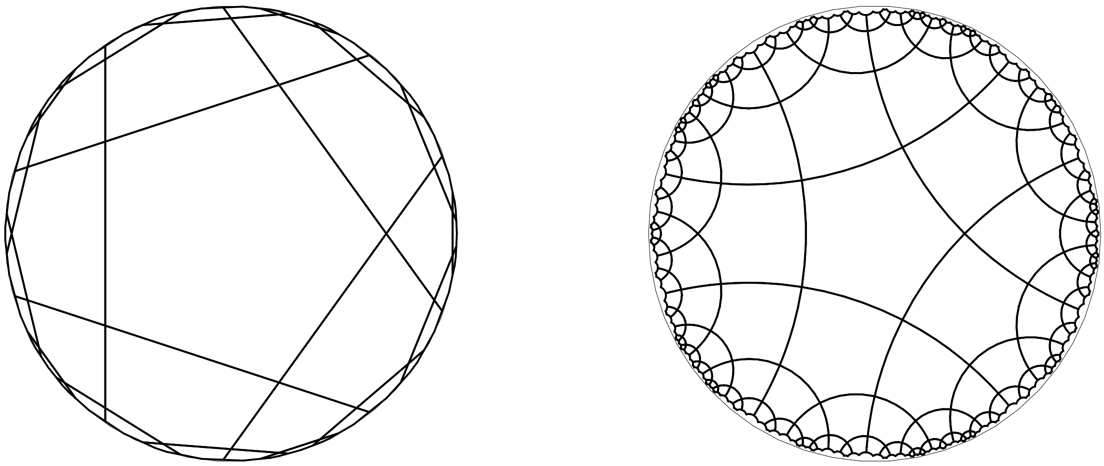


FIGURE 13. Le pavage hyperbolique de valence 4 par des pentagones réguliers dans les boules projective et conforme

construit un polygone convexe Q'_k. La réunion $P^{(2)} := P^{(1)} \cup Q'_1 \cup \cdots \cup Q'_{p'}$ est un voisinage de $P^{(1)}$ qui vérifie les mêmes propriétés (i), (ii) et (iii) que $P^{(1)}$.

On peut donc continuer ce procédé et construire une suite croissante de polygones convexes $P^{(n)}$. Leur réunion est un ouvert convexe du plan hyperbolique H_2 qui est recouvert par un pavage périodique.

Il reste à montrer que $\Omega = H_2$. Si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver une suite infinie $(y_n)_{n\geqslant 1}$ de sommets distincts du pavage dans un compact de H_2. On pourrait alors en extrayant une sous-suite supposer cette suite convergente. On aurait alors $\lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0$. Ceci est impossible car cette suite est minorée par le réel $\inf_{1\leqslant k\leqslant p} d(x_k, Q_k^c)$. $\square$

Remarque. Cette démarche sera reprise plusieurs fois dans la suite avec des petites variantes.

L'exercice suivant donne un autre exemple de la construction de Poincaré.

Exercice 4.5. Soient $p \geqslant 3$, $k \geqslant 1$ et P_0 un polygone hyperbolique convexe à p côtés dont les angles $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ vérifient $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = 2\pi/k$. Alors il existe un pavage périodique du plan hyperbolique ayant P_0 comme tuile standard.

Indication. On utilisera la même construction avec des symétries par rapport aux milieux des côtés de P_0 au lieu de symétries par rapport aux côtés de P_0.

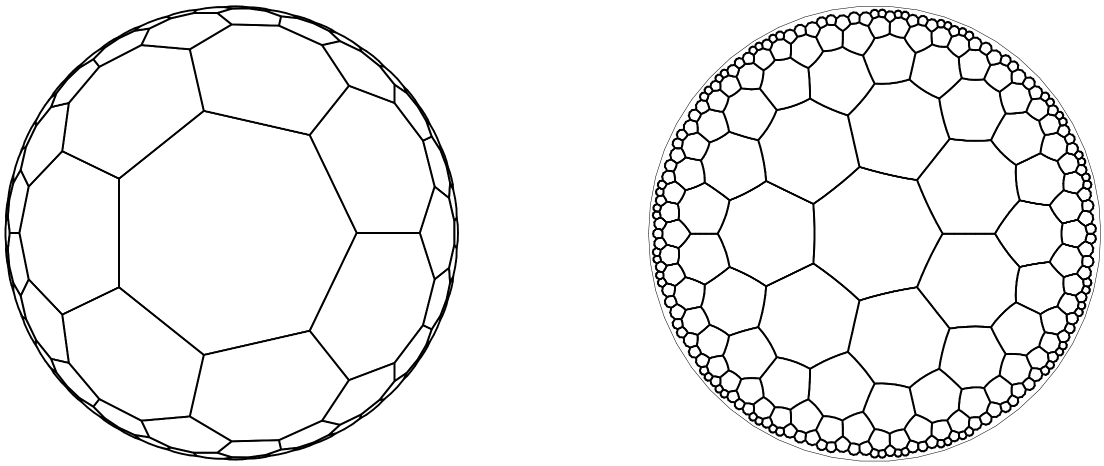


FIGURE 14. Le pavage hyperbolique de valence 3 par des heptagones réguliers dans les boules projective et conforme

4.2. Pavages périodiques de l'espace hyperbolique

Énonçons maintenant l'analogue des théorèmes de Bieberbach pour l'espace hyperbolique H_n. Les cas $n = 2$ et $n \geqslant 3$ seront énoncés séparément.

Nous aurons besoin de quelques notations.

– On dit qu'un groupe Γ est sans torsion si, pour tout $g \neq 1$ dans Γ et tout $n \geqslant 1$, on a $g^n \neq 1$.

– Pour $g \geqslant 2$, on note $\Gamma_{(g)}$ le groupe abstrait défini par les $2g$ générateurs a_1,$b_1, \ldots, a_g$,b_g et l'unique relation $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$.

– Deux sous-groupes Γ et Γ' de $O^+(q)$ sont dits (isométriquement) conjugués si il existe un élément h de $O^+(q)$ tel que $\Gamma' = h\Gamma h^{-1}$

Pour le plan hyperbolique, l'analogue des théorèmes de Bieberbach est très différent du cas euclidien.

Théorème 4.6

1) **(Selberg)** *Tout groupe cristallographique Γ du plan hyperbolique admet un sous-groupe d'indice fini sans torsion.*

2) **(Poincaré, 1880)**

a) Pour tout $g \leqslant 2$, le groupe $\Gamma_{(g)}$ est isomorphe à un groupe cristallographique du plan hyperbolique.

b) Tout groupe cristallographique du plan hyperbolique qui est sans torsion est isomorphe à un des groupes $\Gamma_{(g)}$.

c) En outre, pour tous $g_1 \neq g_2$, les groupes $\Gamma_{(g_1)}$ et $\Gamma_{(g_2)}$ ne sont pas isomorphes mais ils admettent un sous-groupe d'indice fini isomorphe.
3) **(Teichmüller, 1943)** *Pour $g \geqslant 2$, l'ensemble des isomorphismes du groupe $\Gamma_{(g)}$ sur un groupe cristallographique du plan hyperbolique, modulo conjugaison par une isométrie, est un espace topologique homéomorphe à $\mathbb{R}^{6g-6}$.*

Remarques
1) Plus précisément, le théorème de Selberg (qui date de 1960) est la généralisation de cet énoncé à tous les sous-groupe de type fini des groupes linéaires $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. Le cas particulier que nous avons cité était connu bien avant.
2) On peut choisir ce sous groupe d'indice fini isomorphe à $\Gamma_{(g_3)}$ avec $g_3 = g_1 g_2 - g_1 - g_2$.
3) Disons, de façon naïve, que la dimension $6g - 6$ vient de ce $O^+(q)$ est de dimension 3, que l'on doit choisir $2g$ éléments de $O^+(q)$ (d'où le $6g$), que ces éléments doivent vérifier une relation (d'où un -3), et que l'on travaille à conjugaison près (d'où un autre -3).

Pour l'espace hyperbolique de dimension $n \geqslant 3$, l'analogue des théorèmes de Bieberbach est très différent à la fois du cas euclidien et du cas du plan hyperbolique.

Théorème 4.7. *Soit $n \geqslant 3$.*
1) **(A. Borel, 1963)** *Il existe une famille infinie de groupes cristallographiques Γ_i de l'espace hyperbolique H_n tels que, pour $i \neq j$, aucun sous-groupe d'indice fini de Γ_i n'est conjugué à un sous-groupe d'indice fini de Γ_j.*
2) **(Mostow, 1967)** *Tout isomorphisme de groupes abstraits $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ entre deux groupes cristallographiques de l'espace hyperbolique H_n est de la forme $\varphi(g) = h \circ g \circ h^{-1}$ où h est une isométrie de H_n.*

Remarques
1) La construction de Borel est particulièrement explicite : pour tout entier premier $d \geqslant 2$, on prend pour groupe Γ_d le sous-groupe de $O^+(q)$ formé des éléments qui dans la base $(d^{1/4}e_0, e_1, \ldots, e_n)$ sont donnés par des matrices à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{d}$. Ce type de construction tisse des liens particulièrement intéressants entre les pavages et l'arithmétique.
2) Il résulte du théorème de Mostow que, pour $i \neq j$, aucun sous-groupe d'indice fini de Γ_i n'est *isomorphe* à un sous-groupe d'indice fini de Γ_j.

Signalons que ce théorème admet des généralisations à tous les « réseaux des groupes de Lie semisimples ».

4.3. Pavages apériodiques du plan hyperbolique

Oublions ces généralités et donnons maintenant une construction concrète d'un pavage apériodique du plan hyperbolique à l'aide d'un seul triangle (voir [**24**]). Cette construction donne une réponse à un analogue hyperbolique de la question de Penrose.

***Proposition 4.8* (Margulis & Mozes, 1998).** *Soit T_0 un triangle isocèle du plan hyperbolique d'angles α, β et β tel que $5\alpha + 8\beta = 2\pi$ et tel que α/π est irrationnel.*

Alors la tuile standard T_0 permet un pavage du plan hyperbolique mais ne permet pas de pavage hyperbolique périodique.

Remarques
– L'existence d'un tel triangle est assurée par l'exercice 4.3.
– On peut remplacer les entiers 5 et 8 par n'importe quels entiers d et $2e$ avec $d, e \geqslant 4$ et $d \neq e$.
– On peut aussi remplacer T_0 par un polygone à p côtés égaux bien choisi.

Démonstration. a) Montrons tout d'abord que T_0 permet de paver le plan hyperbolique.

Pour cela, notons P_0 le quadrilatère hyperbolique réunion du triangle T_0 et de son symétrique par rapport à sa base. Le quadrilatère P_0 est un losange : ses quatre côtés sont égaux et il a pour angles successivement α, γ, α et γ avec $\gamma = 2\beta$. On a l'égalité $d\alpha + e\gamma = 2\pi$ avec $d = 5$ et $e = 4$.

On va construire un pavage admettant P_0 pour unique tuile standard. On reprend la même méthode qu'en 4.1 : on va encore construire, par récurrence, le pavage sur un polygone convexe $P^{(n)}$ en ajoutant à chaque étape une couronne de tuiles. L'unique différence avec 4.1 est que les nouvelles tuiles ne sont plus obtenues par symétrie à partir de leur voisine.

On part de $P^{(0)} = P_0$. Au cran n, $P^{(n)}$ est un polygone convexe pavé par des tuiles isométriques à P_0 telles que chaque sommet de $P^{(n)}$ appartient à au plus deux tuiles du pavage. Pour construire $P^{(n+1)}$ à partir de $P^{(n)}$, on ajoute successivement des nouvelles tuiles autour des sommets $y_1, \ldots, y_q$ de $P^{(n)}$ en prenant soin qu'autour de chaque sommet y_k, il y ait exactement $d + e$ tuiles dont d ont un angle α en y_k et e ont un angle γ. Ceci est possible car $d \geqslant 4$ et $e \geqslant 4$. En outre ces nouvelles tuiles sont d'intérieurs disjoints car, comme $\max(4\alpha, 4\gamma) \leqslant \pi$, à chaque étape, les polyèdres sont convexes. Finalement le polygone $P^{(n+1)}$ ainsi construit est convexe et vérifie la même propriété que $P^{(n)}$. La fin de l'argument est comme en 4.1.

b) Montrons enfin que T_0 ne permet pas de paver périodiquement le plan hyperbolique.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe un tel pavage périodique $\mathcal{P}$ et notons $\Gamma := \Gamma_{\mathcal{P}}$ le groupe des isométries directes de H_2 qui préservent $\mathcal{P}$. On va conclure à l'aide d'un argument de comptage : dessinons sur la surface quotient $\Gamma\backslash H_2$ le pavage image de $\mathcal{P}$ et notons N_α le nombre d'angles égaux à α et N_β le nombre d'angles égaux à β dans ce pavage.

Comme sur chaque face il y a un angle α et deux angles β, on a $2N_\alpha = N_\beta$.

Comme sur chaque sommet il y a d angles α et $2e$ angles β, on a $2eN_\alpha = dN_\beta$.

Comme $d \neq 2e$, on obtient une contradiction. $\square$

Remarque. Le lecteur qui voudrait détailler cet argument sans faire appel à la surface quotient peut introduire les ensembles $\mathcal{E}_\alpha$ et $\mathcal{E}_\beta$ formés des couples (P, x) où P est une tuile de $\mathcal{P}$ et x un sommet de cette tuile d'angle α et β respectivement. Il peut alors comparer de deux façons les nombres N_α et N_β de Γ-orbites dans ces ensembles.

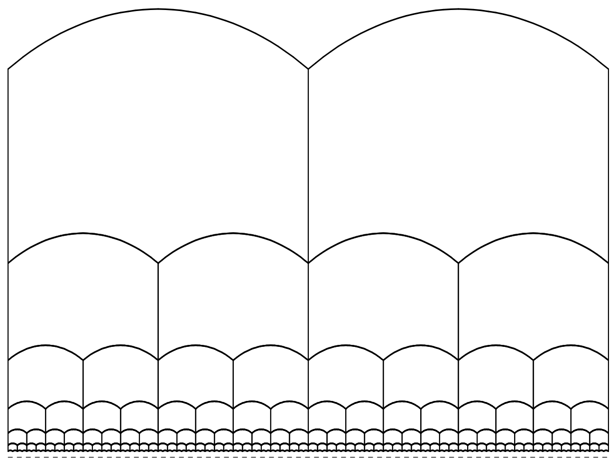


FIGURE 15. Un pavage hyperbolique non périodique dans le modèle du demi-plan

La figure 15 donne un autre exemple de polygone convexe permettant un pavage du plan hyperbolique H_2 mais ne permettant pas de pavage hyperbolique périodique. Cet exemple est une variante convexe de l'exemple de [**27**]. Il m'a été montré par R. Kenyon. Il se généralise aisément en toute dimension $n \geqslant 2$.

5. Pavages affines

Dans cette partie nous présentons un panorama sans démonstration des analogues affines des théorèmes de Bieberbach, en commençant tout d'abord par la dimension 2.

Nous terminerons par la construction, pour tout polygone convexe P_0, de pavages affines du plan à l'aide d'une seule tuile standard égale à P_0.

Dans cette partie E est l'espace affine de dimension n et G est le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ des bijections affines de E.

On considérera aussi parfois le groupe $\mathrm{P}(\mathbb{R}^n)$ des bijections polynomiales de $\mathbb{R}^n$ dont l'inverse est polynomiale. On parlera alors de pavage polynomial et de groupe cristallographique polynomial.

5.1. Pavages périodiques du plan affine

Commençons par décrire les groupes cristallographiques affines du plan à sous-groupe d'indice fini près.

Pour (p, q) dans $\mathbb{R}^2$, on note $\tau_1^{p,q}$ et $\tau_2^{p,q}$ les bijections affines de $\mathbb{R}^2$ données par

$$\tau_1^{p,q} : (x, y) \mapsto (x + p, y + q) \quad \text{et} \quad \tau_2^{p,q} : (x, y) \mapsto (x + p + qy + \frac{1}{2}q^2, y + q).$$

On appelle réseau de $\mathbb{R}^2$ un sous-groupe Λ de $\mathbb{R}^2$ engendré par deux vecteurs linéairement indépendants. Par exemple, le sous-groupe $\mathbb{Z}^2$ est un réseau de $\mathbb{R}^2$. Les groupes

$$\Gamma_1 := \{\tau_1^{p,q} \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\} \quad \text{et} \quad \Gamma_2^\Lambda := \{\tau_2^{p,q} \mid (p, q) \in \Lambda\}$$

sont des groupes cristallographiques affines du plan. Le groupe Γ_1 est le groupe des translations entières. Le groupe Γ_2^Λ est aussi isomorphe au groupe $\mathbb{Z}^2$, mais Γ_2^Λ n'est pas *affinement conjugué* au groupe Γ_1, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de bijection $h \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ telle que l'on a $\Gamma_2^\Lambda = h \circ \Gamma_1 \circ h^{-1}$. Remarquons par contre que Γ_2^Λ est *polynomialement conjugué* à Γ_1 c'est-à-dire que l'on peut choisir un tel h dans $\mathrm{P}(\mathbb{R}^2)$: par exemple la bijection $h : (x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}y^2, y)$ conjugue Γ_1 et $\Gamma_2^{\mathbb{Z}^2}$ (voir la figure 16).

L'analogue des premier et troisième théorèmes de Bieberbach pour le plan affine s'énonce alors :

***Théorème 5.1* (Kuiper, 1953)**
1) Tout groupe cristallographique affine Γ du plan admet un sous-groupe d'indice fini qui est affinement conjugué au groupe Γ_1 ou à un des groupes Γ_2^Λ.
2) Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de groupes cristallographiques affines du plan.

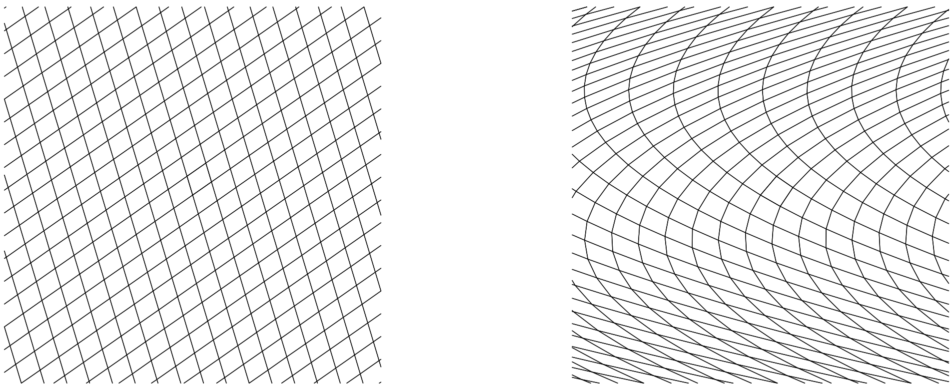


FIGURE 16. Les pavages affines périodiques du plan

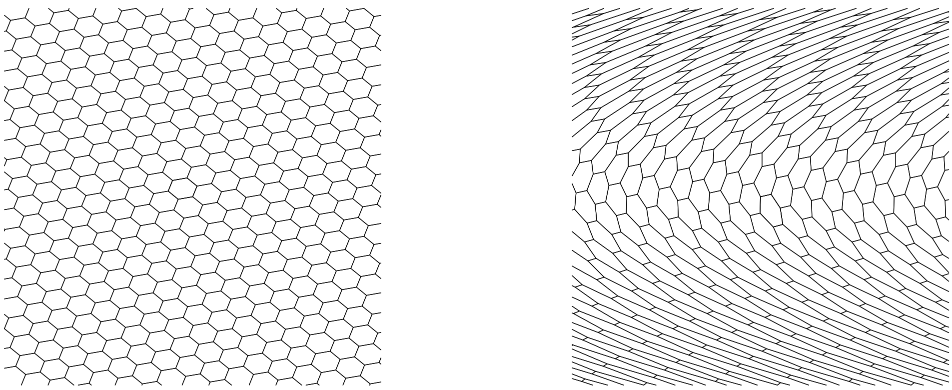


FIGURE 17. Une variante de la figure 16

L'analogue polynomial du premier théorème de Bieberbach pour le plan serait :

***Question 5.2* (Dekimpe, 1998).** *Tout groupe cristallographique polynomial du plan admet-il un sous-groupe d'indice fini qui est polynomialement conjugué au groupe des translations entières ?*

Remarque. La réponse à cette question est positive si Γ est *de degré borné* c'est à dire si les degrés des applications polynomiales de ce groupe sont uniformément bornés.

Nous énoncerons l'analogue du deuxième théorème de Bieberbach pour le plan affine dans la proposition 5.5 en même temps que son analogue en dimension supérieure.

5.2. Pavages périodiques de l'espace affine

Énonçons maintenant l'analogue des théorèmes de Bieberbach pour l'espace affine.

En dimension $n \geqslant 3$, les groupes cristallographiques affines ne contiennent pas toujours un sous-groupe d'indice fini abélien. En voici quelques exemples.

Fixons une matrice A de taille $(n-1) \times (n-1)$ à coefficients entiers et de déterminant 1. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} d & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $d \geqslant 2$. Pour (p,q) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{n-1}$, on note $\tau_A^{p,q}$ la bijection affine de $\mathbb{R}^n$ donnée par, pour tout t dans $\mathbb{R}$ et x dans $\mathbb{R}^{n-1}$,

$$\tau_A^{p,q} : (t,x) \mapsto (t+p, A^p x + q).$$

Le groupe

$$\Gamma_A := \{\tau_A^{p,q} \mid (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{n-1}\}$$

est un tel groupe cristallographique affine.

Nous aurons besoin de la notion de groupe virtuellement polycyclique. Elle se définit par récurrence :
– Le seul groupe *poly-$\mathbb{Z}$ de rang* 0 est le groupe trivial.
– Un groupe est dit *poly-$\mathbb{Z}$ de rang n* si il existe un morphisme de groupes surjectif φ de Γ dans $\mathbb{Z}$ tel que le noyau $\mathrm{Ker}\varphi$ est un groupe poly-$\mathbb{Z}$ de rang $n-1$.
– Un groupe est dit *poly-$\mathbb{Z}$* si il est poly-$\mathbb{Z}$ de rang n pour au moins un n.
– Un groupe est dit *virtuellement polycyclique* si il contient un sous-groupe d'indice fini poly-$\mathbb{Z}$.

Exercice 5.3
a) Montrer que le groupe $\mathbb{Z}^n$ est poly-$\mathbb{Z}$ de rang n.
b) Montrer que le groupe Γ_A est poly-$\mathbb{Z}$ de rang n.

L'analogue affine du premier théorème de Bieberbach serait la réponse positive à la question suivante qui n'est connue qu'en petite dimension ($n \leqslant 6$, voir [**1**]) :

***Question 5.4* (Auslander, 1964).** *Tout groupe cristallographique affine est il virtuellement polycyclique ?*

L'analogue affine du troisième théorème de Bieberbach est un énoncé analogue au théorème de Borel dont la démonstration est assez facile car on peut choisir les groupes Γ_i parmi les groupes polycycliques Γ_A. :

Pour tout $n \geqslant 3$, il existe une famille infinie de groupes cristallographiques affines Γ_i de l'espace $\mathbb{R}^n$ tels que, pour $i \neq j$, aucun sous-groupe d'indice fini de Γ_i n'est isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de Γ_j.

Signalons que cependant, il existe des groupes virtuellement polycycliques qui ne contiennent aucun sous-groupe d'indice fini isomorphe à un groupe cristallographique affine : les premiers exemples connus étaient de rang 11 (voir [**3**]), il existe maintenant des exemples de rang 10 (voir [**10**]).

Néanmoins, P. Igodt et K. Dekimpe ont montré que tout groupe virtuellement polycyclique contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à un groupe cristallographique polynomial de degré borné (voir [**14**]).

L'analogue affine du deuxième théorème de Bieberbach est valable en toute dimension $n \geqslant 1$:

***Théorème 5.5* (Fried & Goldman, 1983).** *Tout isomorphisme de groupes abstraits $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ entre deux groupes cristallographiques affines qui sont virtuellement polycycliques est de la forme $\varphi(g) = h \circ g \circ h^{-1}$ où h est dans $\mathrm{P}(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque. Ce théorème s'étend aux groupes cristallographiques polynomiaux de degré borné.

5.3. Pavages périodiques des ouverts du plan affine

Nous nous intéressons dans cette section aux pavages affines qui ne recouvrent pas tout l'espace $\mathbb{R}^n$ mais seulement une partie.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}$ un pavage affine périodique de Ω et Γ le groupe de symétrie de ce pavage. On dit alors que Ω est un ouvert (affinement) *divisible* et que Γ est un groupe cristallographique affine de cet ouvert Ω.

En dimension 2, on peut construire les quatre familles d'exemples suivantes.

Pour (p,q) dans $\mathbb{R}^2$, et $i = 3,\ldots,6$ on note $\tau_i^{p,q}$ les bijections affines de $\mathbb{R}^2$ données par

$$\begin{aligned}
&\tau_3^{p,q} : (x,y) \mapsto (x+p, e^q y)\\
&\tau_4^{p,q} : (x,y) \mapsto (e^q(x+py), e^q y)\\
&\tau_5^{p,q} : (x,y) \mapsto (e^p x, e^q y)\\
&\tau_6^{p,q} : (x,y) \mapsto (e^q(\cos(p)x + \sin(p)y), e^q(-\sin(p)x + \cos(p)y)).
\end{aligned}$$

Pour $i = 3,\ldots,6$ et pour tout réseau Λ de $\mathbb{R}^2$, les groupes

$$\Gamma_i^\Lambda := \{\tau_i^{p,q} \mid (p,q) \in \Lambda\}$$

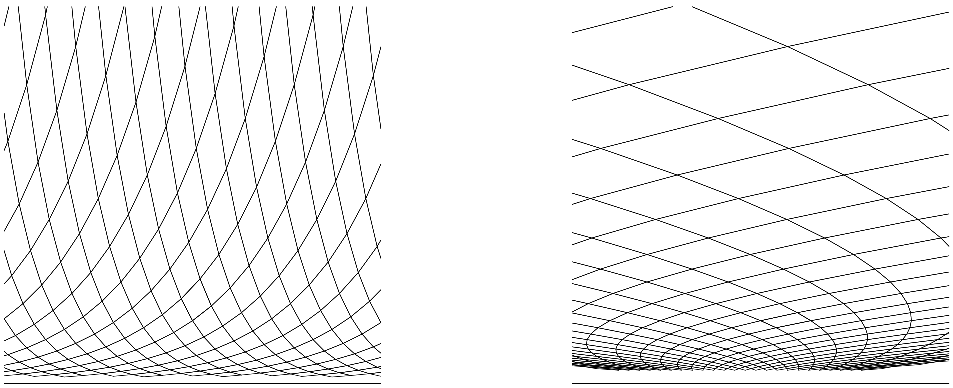


FIGURE 18. Les pavages affines périodiques du demi-plan

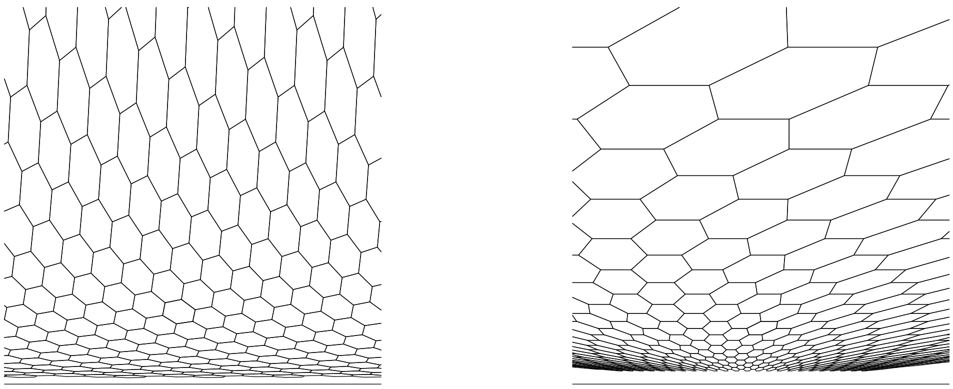


FIGURE 19. Une variante de la figure 18

sont, respectivement, des groupes cristallographiques affines

$$\begin{array}{ll} \text{du demi-plan} & \Omega_3 = \Omega_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \\ \text{du quart de plan} & \Omega_5 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}, \\ \text{du plan épointé} & \Omega_6 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\} \end{array}$$

(avec la restriction, pour Γ_6^Λ, que le réseau Λ contienne le vecteur $(2\pi, 0)$).

Tous ces groupes sont abéliens.

Le théorème suivant est l'analogue des premier et troisième théorèmes de Bieberbach pour les ouverts du plan affine. Il affirme que ces exemples sont les seuls en dimension 2. Ils sont dessinés dans les figures 18 et 20.

***Théorème 5.6* (Benzecri, 1959).** *Soit Γ un groupe cristallographique affine d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ tel que $\Omega \neq \mathbb{R}^2$.*

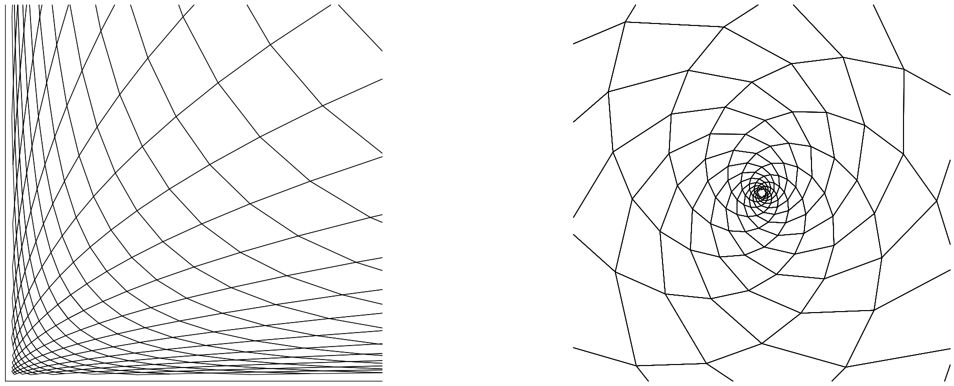


FIGURE 20. Les pavages affines périodiques du quart de plan et du plan épointé

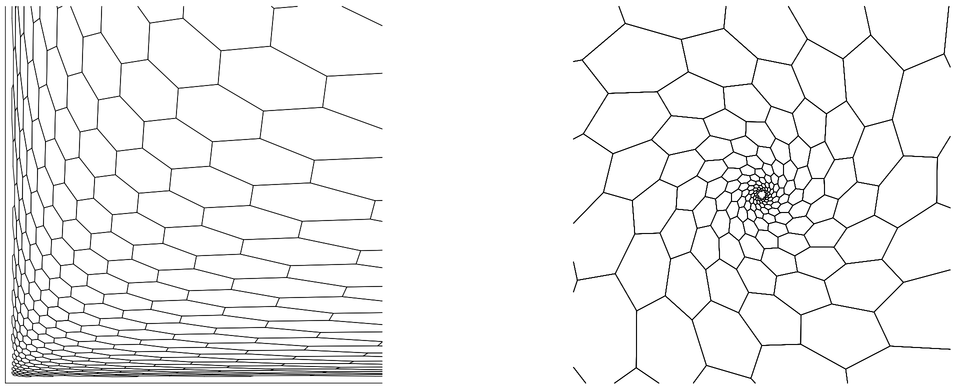


FIGURE 21. Une variante de la figure 20

1) Alors, il existe un sous-groupe d'indice fini abélien Γ' de Γ et une bijection affine h de $\mathbb{R}^2$ qui conjugue Γ' à l'un des groupes Γ_i^Λ et envoie Ω sur Ω_i, avec $i = 3, 4, 5$ *ou* 6.
2) Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de groupes cristallographiques affines pour les ouverts du plan.

La démonstration permet de mieux comprendre cette liste (voir [**6**] ou [**26**]). En effet, la démonstration est basée sur l'étude des sous-groupes abéliens connexes maximaux du groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$. Il en existe 7 à conjugaison affine près. Ce sont les groupes

$$G_i := \{\tau_i^{p,q} \mid (p,q) \in \mathbb{R}^2\},$$

pour $i = 1, \dots, 7$, où la seule transformation affine que nous n'ayons pas encore définie est :

$$\tau_7^{p,q} : (x, y) \mapsto (x + p + qy, y).$$

Le groupe Γ_7^A correspondant ne peut pas convenir car il laisse stable les droites horizontales.

En dimension $n \geqslant 3$, la description des groupes cristallographiques affines des ouverts Ω de $\mathbb{R}^n$, n'est pas connue. Par exemple, la réponse à la question suivante n'est connue que pour $n = 2$.

***Question 5.7* (Markus, 1962).** *A-t-on l'équivalence :*

$$\Omega = \mathbb{R}^n \iff \forall\, g \in \Gamma \ \text{dét}\, g = \pm 1\,?$$

Pour $n = 2$, la réponse à cette question est positive : dans les figures 16, les tuiles ont même aire, mais pas dans les figures 18 et 20.

Pour d'autres exemples d'ouverts Ω de $\mathbb{R}^n$ admettant des pavages affines périodiques, voir les surveys [**11**] et [**4**].

5.4. Pavages apériodiques du plan affine

Oublions de nouveau ces généralités et construisons maintenant, pour tout polygone convexe à p côtés P_0, des pavages affines du plan avec P_0 pour seule tuile standard. Cette construction, qui semble nouvelle, donne donc une réponse positive à un analogue affine de la question de Penrose.

Rappelons que le polygone régulier à p côtés est le polygone convexe du plan euclidien dont les sommets $x_1, \dots, x_p$ sont donnés par $x_k = (\cos 2k\pi/p, \sin 2k\pi/p)$.

Soit $d \geqslant 3$. Nous dirons qu'un pavage $\mathcal{P}$ par des polygones convexes est
– *régulier* si, pour toutes tuiles P et Q de $\mathcal{P}$, tout sommet de P qui est dans Q est un sommet de Q,
– *de valence* d si chaque sommet du pavage est exactement dans d tuiles de $\mathcal{P}$.

***Proposition 5.8*.** *Soient $p \geqslant 3$ et P_0 un polygone convexe à p côtés. Alors*
a) Il existe un pavage affine $\mathcal{P}$ du plan avec P_0 pour seule tuile standard.
b) Si $p \geqslant 7$, cette tuile standard P_0 ne permet pas de pavage affine périodique du plan.
c) Si $p \geqslant 7$ et si P_0 est un polygone régulier, on peut choisir $\mathcal{P}$ régulier de valence 3.

On dira qu'un polygone P est *étoilé* (en 0) si, pour tout t dans $[0, 1[$, on a $tP \subset \overset{\circ}{P}$.

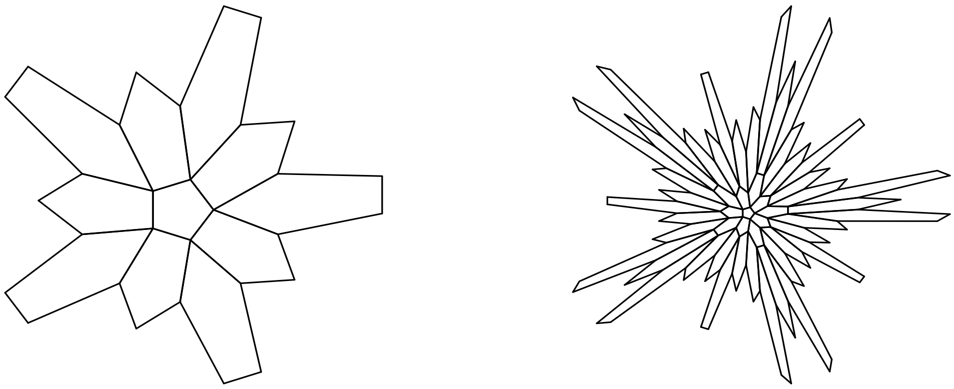


FIGURE 22. Un pavage affine apériodique du plan par des pentagones réguliers

Démonstration. a) On reprend la même méthode qu'en 4.1 : on va encore construire, par récurrence, le pavage sur un polygone $P^{(n)}$ en ajoutant à chaque étape une couronne de tuiles. La principale différence avec 4.1 est que $P^{(n)}$ ne sera pas convexe mais étoilé.

On suppose $p \geqslant 4$. On suppose aussi que le point 0 est dans $\overset{\circ}{P_0}$ et on part de $P^{(0)} = P_0$. Au cran n, $P^{(n)}$ est un polygone étoilé pavé par des tuiles images affines de P_0 telles que chaque sommet $y_1, \dots, y_q$ de $P^{(n)}$ appartient à au plus deux tuiles du pavage, le dernier y_q étant dans une seule tuile. Pour construire $P^{(n+1)}$ à partir de $P^{(n)}$, on ajoute successivement deux nouvelles tuiles autour de ces sommets et on construit ainsi une suite croissante

$$P^{(n)} = Q_0 \subset \cdots \subset Q_q = P^{(n+1)}$$

de polygones étoilés avec $y_1, \dots, y_k$ dans l'intérieur $\overset{\circ}{Q_k}$ et $y_{k+1}, \dots, y_q$ sur le bord ∂Q_k.

Pour construire Q_k à partir de Q_{k-1}, on note y'_k et y''_k les deux sommets de Q_{k-1} voisins de y_k et on ajoute à Q_{k-1} deux polygones, images affines de P_0, le premier P_1 admettant $[y_k, \lambda y_k]$ et $[y_k, y'_k]$ pour côtés, le deuxième P_2 admettant $[y_k, \lambda y_k]$ et $[y_k, y''_k]$ pour côtés. Le point clef de cette démonstration est que, si Q_{k-1} est étoilé et si on choisit le réel λ suffisamment grand, le polygone

$$Q_{k+1} := Q_k \cup P_1 \cup P_2$$

est encore étoilé.

Finalement le polygone $P^{(n+1)}$ ainsi construit est étoilé et vérifie la même propriété que $P^{(n)}$. On peut adapter le choix des réels λ de sorte que $P^{(n)}$ contienne la boule de rayon n. On obtient bien ainsi le pavage affine du plan cherché

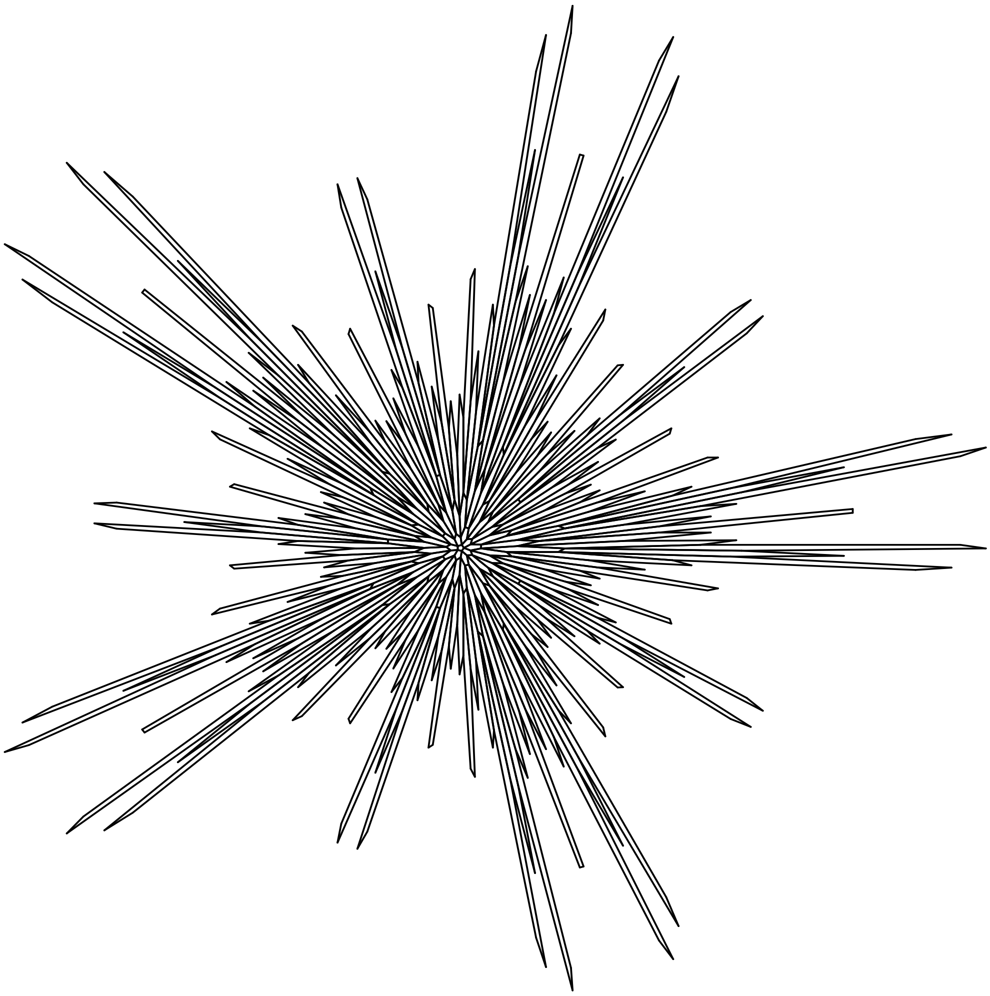


FIGURE 23. Suite de la figure 22

b) Plus généralement, il n'existe pas de pavage affine périodique $\mathcal{P}$ du plan dont les tuiles sont des polygones convexes à 7 côtés ou plus.

La démonstration est proche de celle de l'exercice 2.6. D'après le théorème 5.1, Il existe un groupe Γ de symétries du pavage qui est polynomialement conjugué au groupe des translations entières. La surface quotient $\Sigma := \Gamma\backslash\mathbb{R}^2$ est donc un tore sur laquelle on peut dessiner l'image de $\mathcal{P}$. Notons S, A et F les nombre de sommets, d'arêtes et de faces de cette image.

La formule d'Euler assure alors que $S - A + F = 0$.

Comme la valence de chaque sommet minorée par 3, on a $2A \geqslant 3S$.

Comme chaque chaque face a au moins 7 arêtes, on a $2A \geqslant 7F$.

Contradiction.

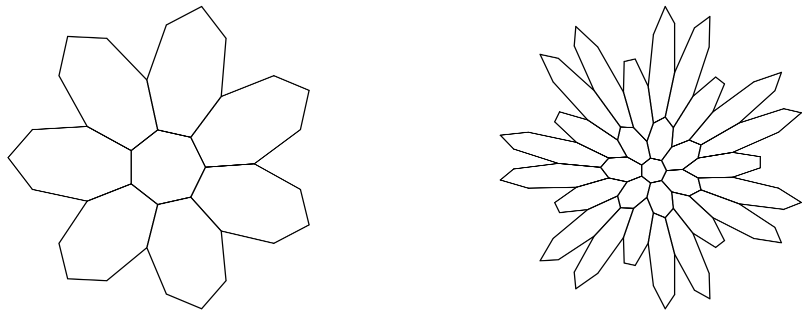


FIGURE 24. Un pavage affine apériodique du plan de valence 3 par des heptagones réguliers

c) Notons Q_0 le polygone hyperbolique régulier à p côtés d'angles $2\pi/d$ construit dans l'exercice 4.4, notons Γ le groupe cristallographique hyperbolique engendré par les symétries par rapport au côtés de Q_0 et notons

$$\mathcal{Q} := \{gQ_0 \mid g \in \Gamma\}$$

le pavage périodique du plan hyperbolique construit dans la proposition 4.2. Ce pavage est régulier et de valence d.

Dessinons ce pavage dans le modèle hyperboloïde H_2. Les sommets $v_1, \ldots, v_p$ de Q_0 sont alors dans un plan affine parallèle au plan

$$V_0 := \{v = (x_0, x_1, x_2) \in V \mid x_0 = 0\}.$$

Dessinons maintenant l'enveloppe convexe Q_0' de ces sommets dans V. C'est un polygone euclidien régulier. Géométriquement, la réunion

$$\Gamma Q_0' := \bigcup_{g\in\Gamma} gQ_0'$$

est une « approximation polygonale » du demi-hyperboloïde.

Choisissons maintenant un point w_0 de H_2 et notons $\pi_0 : V \to V_0$ la projection parallèlement à w_0. Comme la restriction de π_0 à $\Gamma Q_0'$ est injective, l'ensemble

$$\mathcal{P} := \{\pi_0(gQ_0') \mid g \in \Gamma\}$$

est un pavage affine régulier de valence d avec une seule tuile standard P_0. $\square$

Remarques
– Le pavage que nous avons construit en a) est régulier et, lorsque $p \geqslant 4$, la valence de chaque sommet est majorée par 5. Pour tout entier $d \geqslant 5$, il est possible de modifier cette construction pour que la valence du pavage soit égale à d.
– La construction donnée en c) admet une réciproque :

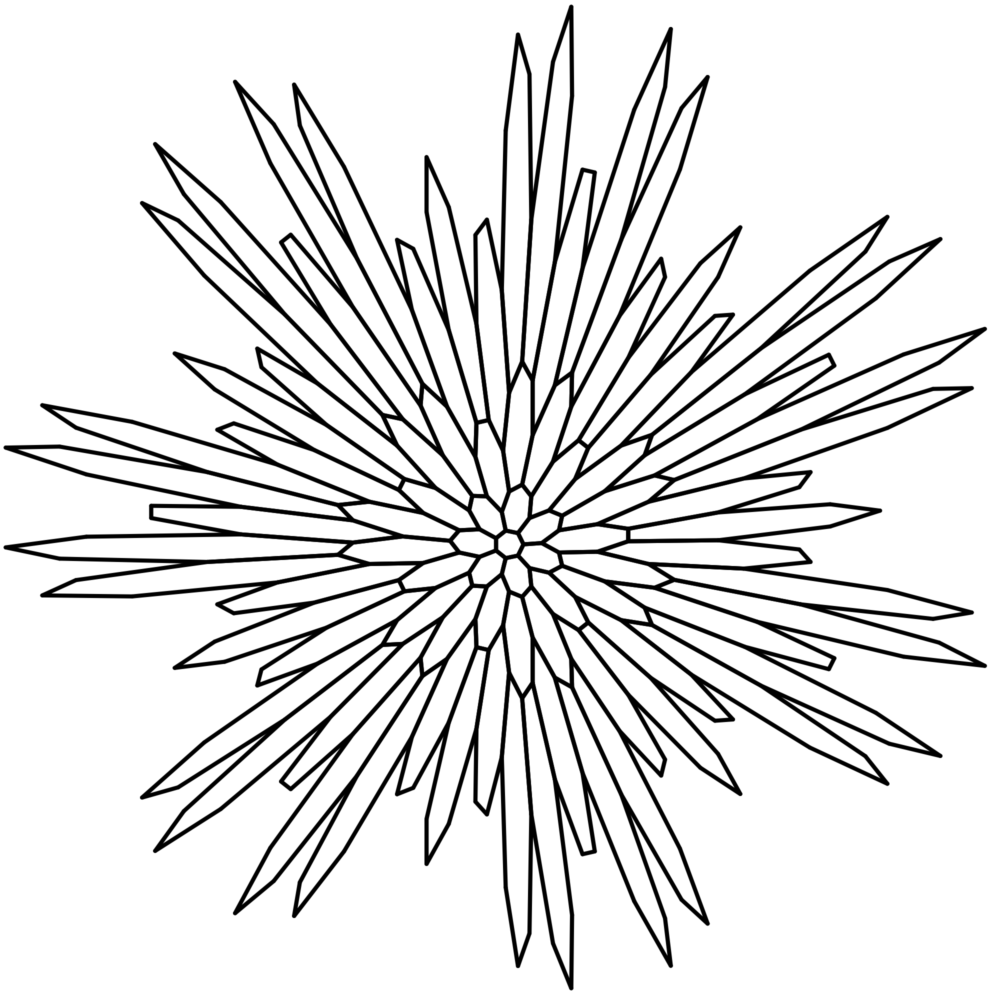


FIGURE 25. Suite de la figure 24

Proposition 5.9. *Soit P_0 un polygone régulier à p côtés et $\mathcal{P}'$ un pavage affine régulier de valence 3 du plan avec P_0 pour seule tuile standard. Alors,*
– soit $p = 6$ et $\mathcal{P}'$ est le pavage euclidien hexagonal,
– soit $p \geqslant 7$ et $\mathcal{P}'$ est le pavage apériodique obtenu par la construction donnée dans la proposition 5.8.c.

Démonstration. On reprend la construction du c). Il suffit alors de remarquer que
– la position de deux pavés adjacents de $\mathcal{P}'$ détermine entièrement le pavage $\mathcal{P}'$.
– si $p \geqslant 7$, on peut choisir une application affine $\pi'_0 : V \to \mathbb{R}^2$ qui envoie

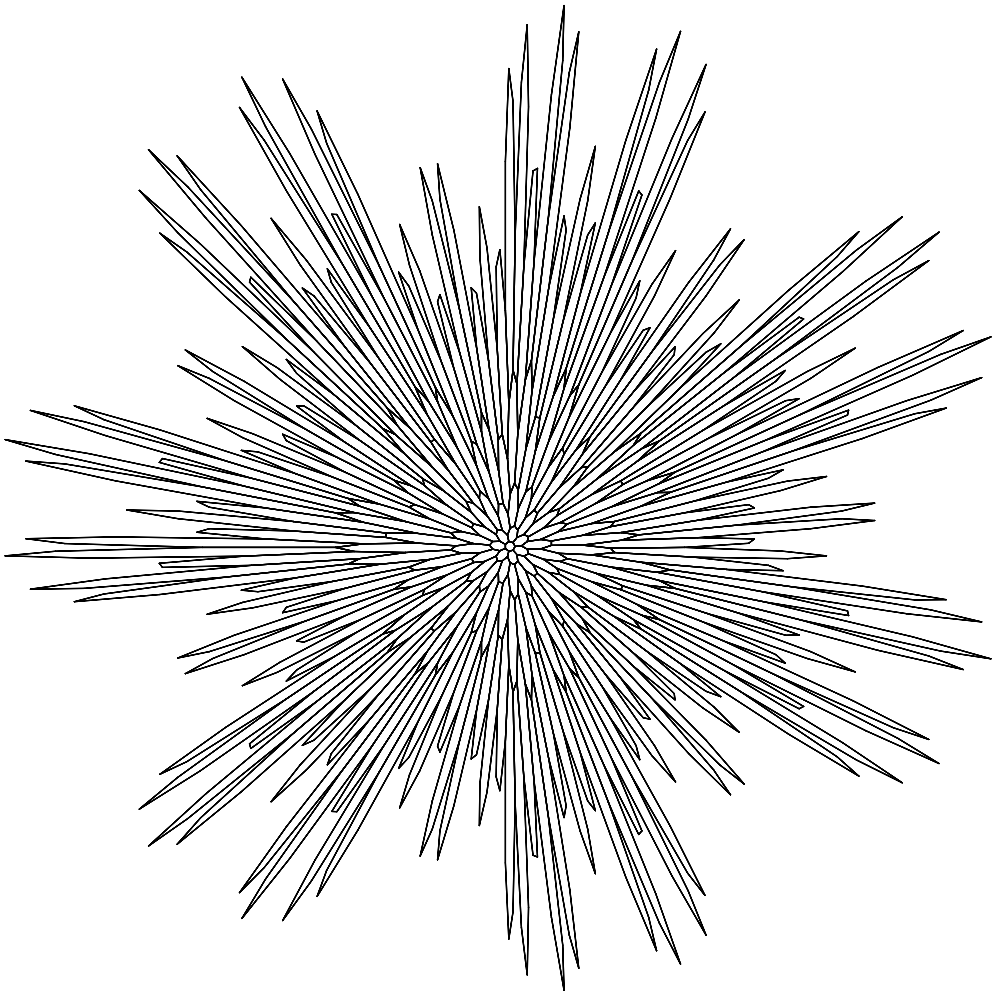


FIGURE 26. Suite de la figure 25

deux pavés adjacents de $\Gamma Q'_0$ sur nos deux pavés adjacents de $\mathcal{P}'$. Le noyau de π'_0 rencontre forcément l'hyperboloïde H_2. En conclusion, si on fixe une tuile P_0, les pavages $\mathcal{P}'$ possibles sont paramétrés par les points v_0 de H_2. Remarquons en particulier que, si on remplace cette tuile de référence par la tuile provenant d'un élément g de Γ, le paramètre v_0 est remplacé par $g^{-1}(v_0)$. L'apériodicité de $\mathcal{P}'$ se déduit de cette remarque.

– Si $p \leqslant 6$, on utilise un argument analogue, en remplaçant le demi-hyperboloïde H_2 par un paraboloïde elliptique. Les détails sont laissés au lecteur. $\square$

La construction donnée en c) se généralise en dimension supérieure dès que l'on sait construire un pavage de l'espace hyperbolique avec une seule tuile Q_0 qui est un polyèdre hyperbolique convexe dont les sommets sont sur une sphère de l'espace hyperbolique. Si on utilise le pavage de l'espace hyperbolique H_3 par des icosaèdres réguliers à angles droit (ce pavage se construit par la même méthode que dans la proposition 4.2), on obtient :

Corollaire 5.10. *Il existe un pavage affine régulier de l'espace affine* $\mathbb{R}^3$ *avec pour seule tuile standard l'icosaèdre régulier (resp. le dodécaèdre régulier).*

Question 5.11. *Tout polyèdre convexe de* $\mathbb{R}^n$ *permet-il un pavage affine de* $\mathbb{R}^n$ *?*

6. Pavages projectifs

Dans cette partie, nous commençons par quelques rappels rapides sur l'espace projectif et les transformations projectives.

Nous expliquerons ensuite comment adapter la méthode de Poincaré pour construire des ouverts convexes bornés du plan qui admettent des pavages projectifs périodiques.

Nous terminons par une description sans démonstration des propriétés de ces ouverts.

6.1. La sphère projective

La géométrie projective est le point de vue des mathématiciens sur la notion de perspective.

Un dessin en perspective est une reproduction sur un plan d'un objet de l'espace ambiant, objet vu depuis un point noté 0. Le dessin est donc l'image de l'objet par une « projection centrale de centre 0 ».

Si le dessinateur choisit un autre plan et compare les dessins obtenus, il obtient une application de comparaison du premier plan dans le second. Remarquons que, lorsque le point 0 est « à l'infini », c'est-à-dire lorsque la projection est parallèle à une direction, l'application de comparaison est une application affine.

Ce n'est plus le cas en général : l'application de comparaison ne préserve pas toujours la notion de milieu ; en outre, elle n'est définie que sur un demi-plan. Par contre cette application de comparaison préserve l'alignement de trois points. C'est cette propriété qui nous servira de définition pour les transformations projectives.

L'algèbre linéaire permet de donner une présentation élégante et précise de la géométrie projective :

On considère l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^{n+1}$, avec $n \geqslant 2$, qui jouera le rôle d'espace ambiant et on note $\mathbb{S}^n := \mathbb{S}(V)$ la sphère projective[(1)]

$$\mathbb{S}^n := \{\text{demi-droites vectorielles de } V\}.$$

La projection centrale est remplacée par l'application

$$\begin{array}{ccc} V - \{0\} & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathbb{S}^n \\ v & \longmapsto & \mathbb{R}_+^* v\ . \end{array}$$

La sphère $\mathbb{S}^n$ s'identifie, bien sûr, à l'aide de l'application π à la sphère euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour dessiner un objet de l'espace projectif, on choisit, comme notre dessinateur, un hyperplan affine H de V ne passant pas par l'origine. La restriction $\pi|_H$ de l'application π à H permet d'identifier H à son image $\pi(H)$. La projection centrale de notre dessinateur est alors donnée, là où elle est définie, par la formule $(\pi|_H)^{-1} \circ \pi$.

Notons encore $(e_0, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $(e_0^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale. Pour x dans $\mathbb{S}^n$, les coordonnées $(v_0, \ldots, v_n)$ d'un point v de $\pi^{-1}(x)$ s'appellent les coordonnées *homogènes* du point x. Elles ne sont définies qu'à multiplication par un scalaire près. On note $x = [v_0, \ldots, v_n]$

On prend souvent comme hyperplan affine, l'hyperplan affine *horizontal* [(2)] H_0 parallèle à $\mathrm{Ker}(e_0^*)$ et passant par e_0, autrement dit

$$H_0 := \{v = (v_0, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v_0 = 1\}.$$

Les coordonnées $(v_1, \ldots, v_n)$ sont appelées les coordonnées *horizontales* du point $x = [1, v_1, \ldots, v_n]$.

Définition 6.1. On dit que trois points x_1, x_2, x_3 de $\mathbb{S}^n$ sont alignés si les trois demi-droites $\pi^{-1}(x_i)$ sont dans un même 2-plan de V.

Une partie Ω de $\mathbb{S}^n$ est dite (proprement) convexe si c'est l'image par π d'une partie convexe et bornée d'un hyperplan affine H ne passant pas par l'origine.

Un ellipsoïde (projectif) est une partie de $\mathbb{S}^n$ image par π du cône de futur d'une forme lorentzienne sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Une hypersphère (projective) est une partie de $\mathbb{S}^n$ image par π d'un hyperplan vectoriel W de $\mathbb{R}^{n+1}$.

---

(1) L'espace projectif $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ est l'ensemble $\mathbb{P}(V) := \{$ droites vectorielles de V $\}$. Il est obtenu en identifiant deux à deux les points opposés de la sphère projective de sorte que les hyperplans affines sont d'image dense dans $\mathbb{P}(V)$. Il est beaucoup plus utilisé que la sphère projective car sa définition se généralise immédiatement à tous les corps. Il n'interviendra pas dans la suite de cet exposé.

(2) Dans cette terminologie, on représente donc e_0 par un vecteur vertical.

Dans la suite, « convexe » signifiera « proprement convexe ». Par exemple, un ellipsoïde est convexe.

6.2. Le groupe des transformations projectives

Cette partie est un rappel sans démonstration sur le groupe des transformations projectives.

Définition 6.2. On appelle transformation projective de $\mathbb{S}^n$ une bijection $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ qui envoie tout triplet de points alignés sur un triplet de points alignés.

Tout élément g de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n+1})$ envoie demi-droite sur demi-droite et définit donc une transformation projective de $\mathbb{S}^n$ encore notée g. Le théorème fondamental de la géométrie projective affirme que toutes les transformations projectives sont obtenues ainsi.

Comme les éléments g de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n+1})$ qui agissent sur la sphère projective par l'identité sont exactement les homothéties de rapport positif, le groupe des transformations projectives de $\mathbb{S}^n$ est le groupe

$$G = \mathrm{SL}^{\pm}(\mathbb{R}^{n+1}) := \{g \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n+1}) \mid \mathrm{d\acute{e}t}(g) = \pm 1\}.$$

Écrivons g comme une matrice bloc

$$\begin{pmatrix} \lambda & f \\ v & A \end{pmatrix}$$

où λ est un réel, v un vecteur colonne, f un vecteur ligne et A une matrice $n \times n$. Dans le système de coordonnées horizontales, la transformation projective g est donnée par la formule[(3)]

$$g(x) = \frac{A \cdot x + v}{f(x) + \lambda}.$$

Deux familles de transformations projectives nous seront utiles :

– Une *symétrie hyperplane* s est un élément de $\mathrm{SL}^{\pm}(\mathbb{R}^{n+1})$ égal à l'identité sur un hyperplan W et à moins l'identité sur une droite Δ. On choisit une forme linéaire f_0 de noyau W et un vecteur v_0 de Δ tel que $f_0(v_0) = 1$ et on note $s = s_{f_0,v_0}$ cette symétrie hyperplane. Elle est donnée par, pour tout v dans V,

$$s_{f_0,v_0}(v) = v - 2f_0(v)v_0.$$

[(3)]Les applications de comparaison de notre introduction en 6.1 sont donc aussi données par une formule analogue.

– Une *rotation projective* r est un élément de $\mathrm{SL}^{\pm}(\mathbb{R}^{n+1})$ qui dans une base convenable de $\mathbb{R}^{n+1}$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cdots & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Le réel $\theta \in [0, \pi]$ est l'*angle* de la rotation et le sous-espace $\mathrm{Ker}(s-1)$ est son *axe.*

Calculons maintenant le produit de deux symétries hyperplanes.

Pour cela, on introduit le *birapport* $[f_1, f_2, v_1, v_2]$ de deux formes linéaires $f_1, f_2 \in V^*$ et deux vecteurs $v_1, v_2 \in V$, tels que $f_1(v_1)f_2(v_2) \neq 0$, par la formule

$$[f_1, f_2, v_1, v_2] := \frac{f_1(v_2)f_2(v_1)}{f_1(v_1)f_2(v_2)}.$$

Par construction, cette formule ne dépend que des noyaux des formes linéaires f_i et des droites engendrées par les vecteurs v_i. En dimension $n = 1$, on retrouve le birapport de quatre points de la droite projective. Si on note v_i' le point de $\mathrm{Ker}(f_i)$ aligné avec v_1 et v_2, ce birapport n'est rien d'autre que le birapport des quatre points alignés v_1', v_2', v_1, v_2.

Exercice 6.3. Soient $s_1 = s_{f_1,v_1}$ et $s_2 = s_{f_2,v_2}$ deux symétries hyperplanes. On suppose que $0 < [f_1, f_2, v_1, v_2] < 1$. Montrer que le produit $s_1 s_2$ est une rotation projective dont l'angle θ est donné par $\cos^2\theta/2 = [f_1, f_2, v_1, v_2]$. Déterminer l'axe de $s_1 s_2$.

Indication. Calculer la trace de $s_1 s_2$.

6.3. Construction de pavages projectifs périodiques des convexes du plan

> Lorsqu'on dessine les pavages de l'espace hyperbolique dans la boule projective, on obtient un pavage projectif de l'ellipsoïde $\pi(\Omega_n)$, autrement dit, les transformations g qui déplacent les pavés standards sont des transformations projectives (voir figures 13 et 14). La fin de cet exposé est consacré aux ouverts convexes de $\mathbb{S}^2$ qui admettent un tel pavage.

On suppose désormais que $n = 2$. (pour le cas $n \geqslant 3$, on renvoie à [**5**])

Soit donc Ω un ouvert convexe de la sphère projective $\mathbb{S}^2$ admettant un pavage projectif périodique $\mathcal{P}$. On dit alors que le convexe Ω est (projectivement) *divisible*. On note alors $\Gamma \subset \mathrm{SL}^{\pm}(\mathbb{R}^3)$ le groupe de symétrie de ce pavage. C'est un groupe cristallographique projectif de Ω, autrement dit, c'est un groupe de transformations projectives qui préservent l'ouvert Ω avec un quotient $\Gamma\backslash\Omega$ compact.

Remarque. Le cône convexe $C := \pi^{-1}(\Omega)$ est alors un ouvert (affinement) divisible de $\mathbb{R}^3$. En effet, le sous-groupe Δ de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$, engendré par Γ et une homothétie, est un groupe cristallographique affine de C. Le sujet de cette section n'est donc qu'un cas particulier de celui que nous avions étudié dans la section 5.3.

L'exemple le plus simple d'ouvert convexe divisible de $\mathbb{S}^2$ est le triangle :

$$T_2 := \{[1, x, y] \in \mathbb{S}^2 \mid x > 0,\ y > 0 \text{ et } x + y < 1\}$$

Le triangle T_2 est divisible car la transformation projective

$$[1, x, y] \longmapsto [1, x/(x + y - 1), y/(x + y - 1)]$$

envoie T_2 sur le quart de plan $\Omega_5 := \{[1, x, y] \in \mathbb{S}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$ qui admet un groupe cristallographique affine (le groupe Γ_5^{Λ} de la section 5.3).

Le premier exemple d'ouvert divisible autre que les ellipsoïdes et les triangles est dû à Kac et Vinberg en 1967. Des familles d'exemples ont été peu après construites par Koszul en 1968. La construction suivante analogue à celle de Poincaré (proposition 4.2) permet aussi d'obtenir quelques exemples.

Définition 6.4. On appelle polygone projectif une partie de $\mathbb{S}^2$ image par π d'un polygone d'un plan affine H de $\mathbb{R}^3$ ne passant pas par l'origine.

Proposition 6.5. *On part d'un polygone projectif convexe P_0 de côtés $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, et on choisit, pour $i = 1, \ldots, p$, des symétries hyperplanes $s_i \in \mathrm{SL}^{\pm}(\mathbb{R}^3)$ qui fixent point par point le côté c_i de sorte que (en notant $s_0 := s_p$) les produits $s_i s_{i-1}$ soient des rotations projectives dont les angles sont de la forme $\alpha_i = 2\pi/d_i$ où d_i est un entier pair supérieur ou égal à 10. On note Γ le groupe engendré par ces symétries s_i.*

Alors la famille $\mathcal{P} := \{g(P_0) \mid g \in \Gamma\}$ est un pavage projectif périodique d'un ouvert (proprement) convexe Ω de la sphère projective $\mathbb{S}^2$ qui n'est pas un triangle.

Remarque. On peut affaiblir l'hypothèse $d_i \geqslant 10$ grâce à [**12**].

Démonstration. L'hypothèse $d_i \geqslant 10$ nous permet de recopier sans changement notable la démonstration de la proposition 4.2. L'ouvert Ω est obtenu comme réunion d'une suite croissante de polygones convexes $P^{(n)}$. Comme il n'existe pas de plan, de droite, de couple de droites, ni de triplet de droites, qui soit stable par toutes les symétries s_i, l'ouvert Ω est (proprement) convexe et n'est pas un triangle. □

Remarque. On peut choisir les symétries s_i de sortent qu'elles ne préservent pas de forme quadratique et donc que Ω ne soit pas un ellipsoïde. Par exemple, si on prend pour polygone P_0 le triangle dont les sommets x_0, x_1, x_2 sont les images par π de la base e_0, e_1, e_2 de $\mathbb{R}^3$, on peut prendre pour symétries hyperplanes :

$$s_0 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 1 \end{pmatrix},\ s_1 := \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \text{ et } s_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & -1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda\mu = 4\cos^2(2\pi/d)$ et $\lambda \neq \mu$. Les quatre dessins de la figure 27 montrent comment l'ouvert Ω se déforme lorsque λ/μ s'éloigne de 1.

6.4. Pavages projectifs périodiques des convexes du plan

Maintenant que nous savons qu'il existe des ouverts convexes divisibles, énonçons sans démonstration quelques unes de leurs propriétés

Pour les convexes de la sphère projective $\mathbb{S}^2$, l'analogue des premier et troisième théorèmes de Bieberbach se réduisent aux théorèmes de Selberg et de Poincaré (théorèmes 4.6.a et 4.6.b). Inutile de les réénoncer.

L'énoncé de l'analogue du deuxième théorème de Bieberbach est proche de celui du théorème de Teichmüller (théorème 4.6.c) :

***Théorème 6.6* (Goldman,1990).** *Pour $g \geqslant 2$, l'ensemble des isomorphismes du groupe $\Gamma_{(g)}$ sur un groupe cristallographique d'un ouvert convexe de la sphère projective $\mathbb{S}^2$, modulo conjugaison par une transformation projective, est un espace topologique homéomorphe à $\mathbb{R}^{16g-16}$.*

Remarques

– La dimension $16g-16$ au lieu de $6g-6$ vient de ce $\mathrm{SL}^{\pm}(\mathbb{R}^3)$ est de dimension 8 au lieu de 3 pour le groupe $O^+(q)$.

– L'homéomorphisme donné par Goldman est concret : il permet de construire explicitement tous les ouverts convexes divisibles de la sphère projective $\mathbb{S}^2$.

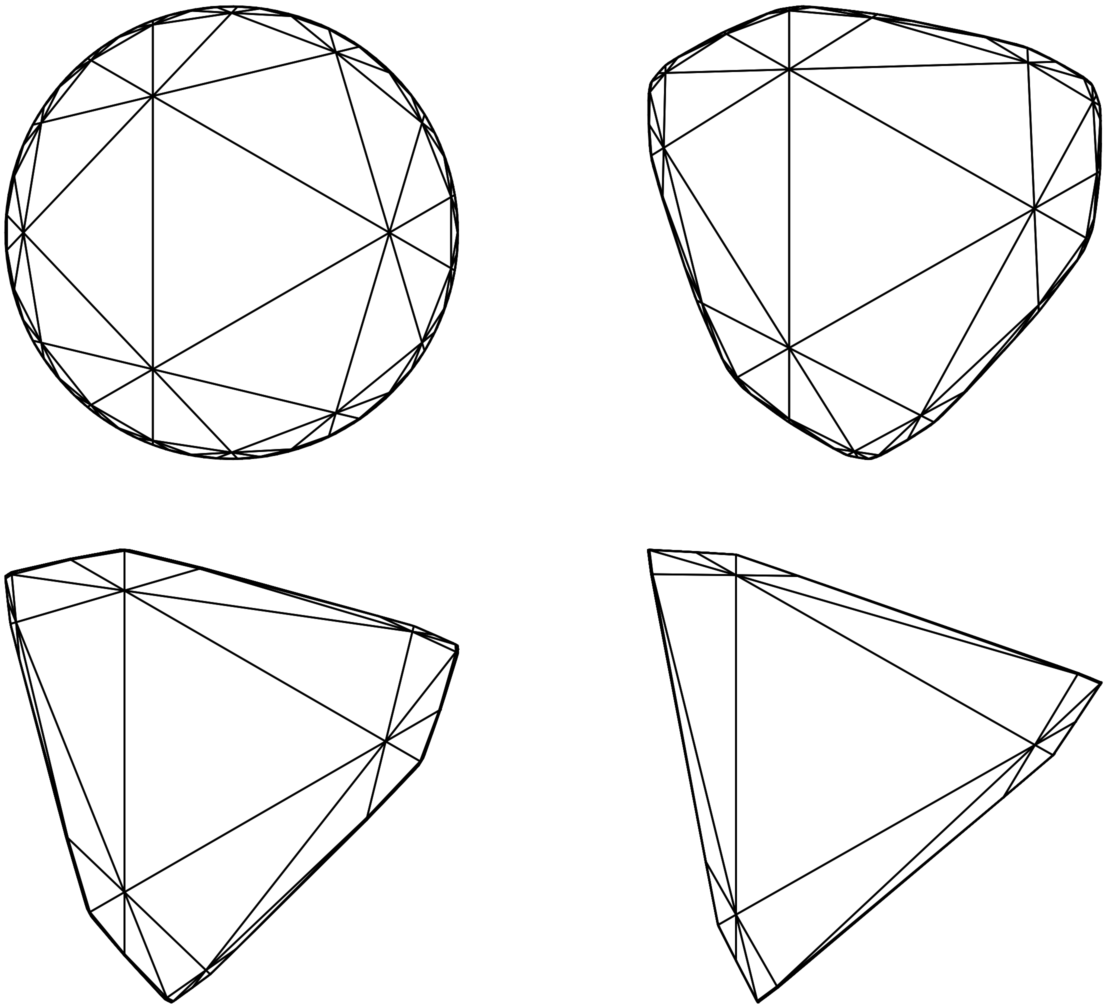


Figure 27. Pavages projectifs d'ouverts convexes du plan obtenus par déformation à partir d'un pavage hyperbolique dans la boule projective. Le bord de ces convexes est de classe C^1 !! ... mais sa courbure est concentrée sur une partie de mesure nulle (figure extraite de [**5**]).

Dans toutes les constructions d'ouvert convexe divisible Ω, on construit d'abord le groupe Γ. La difficulté à appréhender ces ouverts Ω est expliquée par la faible régularité de leur bord.

***Théorème 6.7* (Benzecri, 1960).** *Soit Ω un ouvert convexe divisible de la sphère projective $\mathbb{S}^2$. On suppose que Ω n'est ni un triangle ni une ellipse. Alors le bord $\partial\Omega$ est une courbe de classe C^1, nulle part de classe C^2, « dont la courbure est concentrée sur une partie de mesure nulle ».*

Ce théorème a été généralisé en toute dimension $n \geqslant 2$, dans [**5**].

Le bord $\partial\Omega$ est l'analogue de « l'ensemble de Julia » pour les polynômes complexes : c'est, avec $-\partial\Omega$, l'adhérence de l'ensemble des points fixes attracteurs des éléments g de Γ dans la sphère projective. En dépit de sa régularité C^1, le bord est un ensemble fractal ! L'aspect fractal de cette courbe est « inscrit dans sa dérivée ». Cette remarque est un des nombreux liens fructueux entre les pavages et les systèmes dynamiques.

Pour comprendre la signification de la dernière assertion du théorème, regardons localement et dans un système de coordonnées affine le bord $\partial\Omega$ comme le graphe d'une fonction convexe f. La dérivée $g := f'$ est donc une fonction croissante [on peut montrer que cette fonction est une fonction höldérienne, ce qui signifie que, pour un $\varepsilon > 0$, le quotient $|g(s) - g(t)|/|s-t|^{\varepsilon}$ reste borné quand s et t sont proches]. Cette fonction g n'est pas absolument continue : elle est dérivable en dehors d'un ensemble de mesure nulle à dérivée nulle mais n'est pas constante.

Ces remarques donnent du relief à l'exercice d'analyse réelle suivant (dont la solution n'a pas de lien avec les pavages) :

Exercice 6.8

a) Montrer qu'il existe une fonction continue croissante et non constante $g : [0,1] \to [0,1]$ telle que, pour tout t dans $[0,1]$ en dehors d'un ensemble de mesure nulle, g est dérivable en t et $g'(t) = 0$.

b) Montrer qu'on peut choisir g injective, höldérienne et nulle part de classe C^1.

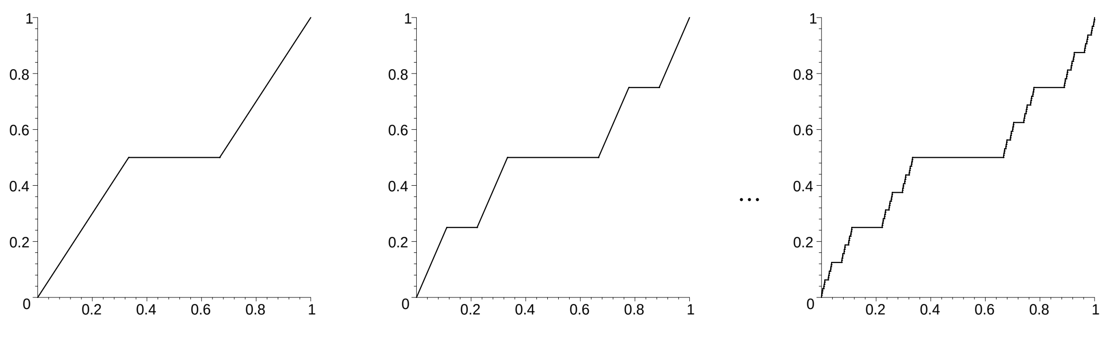


FIGURE 28. L'escalier du diable

Indication. Pour a), on construira g comme limite des fonctions g_n dont les graphes sont donnés dans la figure 28.

7. Appendice : le programme du pavage de Penrose

J'ai dessiné la plupart des figures de ce texte à l'aide de Maple V. Voici, par exemple, le programme donnant la figure 3.

On mémorise tout d'abord la liste des racines dixièmes de l'unité.

```
> for i to 9 do r.i :=evalf(exp(I*i*Pi/5)) od :
```

Une tuile de Penrose est repérée par T :=[n,a,c], où n=1 pour le cerf-volant et 2 pour la flèche et où a et c sont deux nombres complexes : le sommet le plus obtus et son opposé. La procédure autosim(T) remplace chaque cerf-volant par deux cerf-volants plus une flèche et chaque flèche par un cerf-volant plus une flèche.

```
> autosim :=proc(T) local n,a,c,o :
  n :=T[1] : a :=T[2] : c :=T[3] : o :=c+(r2+r8)*(a-c) :
  if n=1 then [1,o,c+r1*(a-c)],[1,o,c+r9*(a-c)],[2,o+r6*(a-o),c] :
  else [1,a,c],[2,c+r1*(a-c),a+r7*(c-a)] : fi : end :
```

La procédure polygone(T) transforme la tuile T en un polygone.

```
> polygone :=proc(T) local n,a,c,vec :
  n :=T[1] : a :=T[2] : c :=T[3] : vec :=a->[Re(a),Im(a)] :
  if n=1
  then POLYGONS([vec(a),vec(c+r1*(a-c)),vec(c),vec(c+r9*(a-c))]) :
  else POLYGONS([vec(a),vec(a+r7*(c-a)),vec(c),vec(a+r3*(c-a))]) :
  fi : end :
```

La procédure pavage(n) part d'un seul cerf-volant et applique n itérations du processus d'autosimilarité.

```
> pavage :=proc(n) local S,i,j :
  S :=[[1,-2*I,3*I]] :
  for i to n do S := [seq(autosim(S[j]),j=1...nops(S))] : od :
  seq(polygone(S[j]),j=1...nops(S)) : end :
```

Choix du nombre d'itérations et envoi du dessin.

```
> n :=9 :P :=pavage(n) :nops([P]);
  PLOT(P,AXESSTYLE(NONE),SCALING(CONSTRAINED),VIEW(-1...1,-1...1));
```

Références

[1] H. Abels, G. Margulis G. Soifer – Properly discontinuous groups of affine transformations with orthogonal linear part, CRAS 324 (1997) p. 253–258.

[2] L. Auslander – The structure of compact locally affine manifolds, Topology 3 (1964) p. 131–139.

[3] Y. Benoist – Une nilvariété non affine, CRAS 315 (1992) p. 983–986.

[4] Y. Benoist – Tores affines, in Crystallographic groups and their generalizations, Contemp. Math. 262 (2000) p. 1–37.

[5] Y. Benoist – Convexes divisibles, CRAS 332 (2001) p. 387–390 et preprint.

[6] J.P. Benzecri – Variétés localement affines, Séminaire de topologie Paris (1959) p. 1–35.

[7] R. Berger – The undecidability of the domino problem, Memoirs Amer. Math. Soc. 66 (1966).

[8] L. Bieberbach – Über die bewegungsgruppen der euklidischen räume, Math. Ann. 70 (1911) p. 297–336 et 72 (1912) p. 400–412.

[9] A. Borel – Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, Topology 2 (1963) p. 111–122.

[10] D. Burde – Affine structures on nilmanifolds, Intern. Journ. Math. 7 (1996) p. 599–616.

[11] Y. Carrière – Un survol de la théorie des variétés affines, Séminaire Grenoble (1987) p. 9–22.

[12] S. Choi, W. Goldman – Convex real projective structures on closed surfaces are closed, Proc. Am. Math. Soc. 118 (1993) p. 657–661.

[13] J. Conway, O. Friedrichs, D. Huson, W. Thurston – On three dimensional space groups, preprint (1999).

[14] K. Dekimpe, P. Igodt – Polycyclic-by-finite groups admit a bounded-degree polynomial structure, Inv. Math. 129 (1997) p. 121–140.

[15] B. Ernst – Le miroir magique de M.C. Escher, Paris (1976).

[16] D. Fried, W. Goldman – Three dimensional affine crystallographic groups, Adv. in Math. 47 (1983) p. 1–49.

[17] W. Goldman – Convex real projective structures on compact surfaces, Journ. Diff. Geom. 31 (1990) p. 791–845.

[18] W. Goldman – Geometric structures on manifolds and varieties of representations, Contemp. Math. 74 (1990) p. 169–198.

[19] B. Grünbaum, G. Shephard – Tiling and patterns, Freeman (1987).

[20] T. Hahn (editor) – International tables for crystallography, Reidel (1983).

[21] V. Kac, E. Vinberg – Quasihomogeneous cones, Math. Notes 1 (1967) p. 231–235.

[22] J.L. Koszul – Déformation des connexions localement plates, Ann. Inst. Fourier 18 (1968) p. 103–114.

[23] N. Kuiper – Sur les surfaces localement affines, in Colloque Géométrie différentielle, Strasbourg (1953) p. 79–87.

[24] G. Margulis, S. Mozes – Aperiodic tilings of the hyperbolic plane, Israel Journal of Math., 107 (1998) p. 319–325.

[25] G. Mostow – Quasiconformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms, Publ. Math. IHES 34 (1967) p. 53–107.

[26] K. Nagano, T. Yagi – The affine structures on the real 2-torus, Osaka Journ. Math. 11 (1974) p. 181–210.

[27] R. Penrose – Pentaplexity, a class of non periodic tilings of the plane, Math. Intelligencer 2 (1979) p. 32–37.

[28] R. Penrose – Shadows of the mind, Oxford Univ. Press (1994).

[29] H. Poincaré – Théorie des groupes Fuchsiens, Acta Mathematica 1 (1882) p. 1–62.

[30] A. Selberg – On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces, in Contribution to function theory, Tata (1960) p. 147–164.

[31] M. Senechal – Quasicrystals and geometry, Cambridge Univ. Press (1995).

[32] A. Teichmüller – Bestimmung der extremalen quasikonformen Abbildungen bei geschlossenen orientierten riemannschen Flächen (1943).

Yves Benoist, École Normale Supérieure-CNRS, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris
E-mail : `benoist@dma.ens.fr` • *Url :* `www.dma.ens.fr/~benoist`