ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann.* Note de M. **Hadamard**, présentée par M. Appell.

« On sait que la fonction $\zeta(s)$ ne s'annule pour aucune valeur de s ayant sa partie réelle supérieure à 1, ainsi que cela se voit par l'expression

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log(1-p^{-s}) \qquad \text{(logarithmes naturels)}, \tag{1}$$

où p représente successivement tous les nombres premiers. Stieltjes avait démontré que tous les zéros imaginaires de $\zeta(s)$ sont (conformément aux prévisions de Riemann) de la forme $\frac{1}{2} + ti$, t étant réel ; mais sa démonstration n'a jamais été publiée[1]. Je me propose simplement de faire voir que $\zeta(s)$ ne saurait avoir de zéro dont la partie réelle soit *égale* à 1.

» Pour cela, remarquons d'abord que $\zeta(s)$ admet pour pôle simple le point $s = 1$. L'expression (1) pouvant, à une quantité finie près, se remplacer par $S = \sum_p p^{-s}$, nous voyons que celle-ci ne diffère de $-\log(s-1)$ que par une quantité qui reste finie lorsque s tend vers 1.

» Remplaçons maintenant s par $s + ti$. Si le point $s = 1 + ti$ était un zéro de $\zeta(s)$, la partie réelle de $\log\zeta(s+ti)$, c'est-à-dire à une quantité finie près, l'expression

$$P = \sum_p p^{-s}\cos(t\log p) \tag{2}$$

devrait augmenter indéfiniment par valeurs négatives comme $\log(s-1)$, *c'est-à-dire comme* $-S$, lorsque s tendrait vers 1 par valeurs supérieures, t restant fixe. Soit alors α un angle choisi aussi petit que l'on veut. Dans les sommes S_n, P_n, formées respectivement avec les n premiers termes des séries S, P, distinguons deux parties : 1° les termes correspondants aux nombres p qui vérifient l'une des doubles inégalités

$$\frac{(2k+1)\pi - \alpha}{t} < \log p < \frac{(2k+1)\pi + \alpha}{t} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \infty), \tag{3}$$

ces termes donneront, dans les sommes S_n, P_n, les parties S'_n, P'_n ;

» 2° Les termes correspondants aux nombres p qui ne vérifient la double inégalité (3) pour aucune valeur de k et qui donneront les sommes S''_n, P''_n.

» Pour une valeur déterminée de s, le rapport $\rho_n = \dfrac{S'_n}{S_n}$ a, lorsque n augmente indéfiniment, soit une limite, soit des limites d'oscillation.

» *Si l'équation* $\zeta(1+ti) = 0$ *avait lieu, cette ou ces limites devraient tendre vers* 1 *avec* s. Autrement dit, ρ étant un nombre quelconque inférieur à 1,

[1] N.d.E. : C'est l'*Hypothèse de Riemann*, non démontrée à ce jour (2002).

on pourrait prendre s assez voisin de 1 pour que l'inégalité

$$\rho_n > \rho \tag{4}$$

fût vérifiée à partir d'un certain rang.

» En effet, les inégalités évidentes

$$P'_n > -S'_n, \quad P''_n > -S''_n \cos\alpha$$

donnent

$$P_n > -S_n\big[\rho_n + (1-\rho_n)\cos\alpha\big].$$

» Si $\rho_n < \rho$, le second facteur du second membre est plus petit que le nombre fixe $\rho + (1-\rho)\cos\alpha = \theta$, qui est plus petit que 1. Si cela avait lieu pour une infinité de valeurs de n, on pourrait passer à la limite et écrire $P > -\theta S$. Or, ceci est contradictoire avec l'hypothèse, ainsi que nous l'avons remarqué tout d'abord.

» Cela posé, changeons t en $2t$ dans la série (2), et soient Q, Q_n, Q'_n, Q''_n ce que deviennent, dans ces nouvelles conditions, P, P_n, P'_n, P''_n. On a, cette fois, $Q'_n > S'_n \cos 2\alpha$, $Q''_n > -S'_n$ et, par suite, $Q_n > S_n\big[\rho_n \cos 2\alpha - (1-\rho_n)\big]$. Si $1+ti$ était un zéro de $\zeta(s)$, on pourrait prendre $\rho_n > \rho > -\frac{1}{1+\cos 2\alpha}$ et, en passant à la limite pour $n=\infty$, on aurait $Q > S\big[\rho(1+\cos 2\alpha) - 1\big]$. La partie réelle Q de $\log\zeta(s+2it)$ augmenterait donc indéfiniment *par valeurs positives* et le point d'affixe $1+2ti$ serait pour $\zeta(s)$ un infini, ce qui n'est pas. C.Q.F.D.

» Le résultat précédent suffit pour démontrer les résultats d'Halphen et de Stieltjes que M. Cahen avait établis dans sa Thèse [*Sur la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann et sur des fonctions analogues* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 1894)] en supposant prouvée la réalité des racines de $\zeta(\frac{1}{2}+ti)$. A cet effet, on considérera, non pas la fonction $\psi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^z}{z}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\,dz$ envisagée par cet auteur, mais la fonction analogue $\psi_h(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^z}{z^h}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\,dz$, où h est un entier plus grand que 1 ; fonction qui est égale à la somme

$$\frac{1}{(h-1)!}\sum_p\sum_k \log p\,\log^{h-1}\left(\frac{x}{p^k}\right) \qquad (p^k < x;\ p \text{ premier},\ k \text{ entier}). \tag{5}$$

Comme dans le travail de M. Cahen (Mém. cité, n° 32), nous intégrerons le long du rectangle ABCD (Mém. cité, *fig.* 11) ; mais nous choisirons le côté CD de manière que la somme $\sum\frac{1}{|z^h|}$ relative aux zéros de $\zeta(s)$ compris dans le rectangle (s'il y a de tels zéros) soit plus petite qu'un nombre ε choisi d'avance, ce qui est possible à cause de la convergence de la série $\sum\frac{1}{|z^h|}$. La somme des résidus de la fonction à intégrer, relatifs aux zéros en question,

sera donc inférieure à εx. Le raisonnement de l'auteur se poursuit alors sans difficulté, *mutatis mutandis*, et conduit à la conclusion que $\psi_h(x)$ est asymptotique à x. La présence des zéros de $\zeta(s)$ intérieurs au rectangle ne modifie point cette conclusion, puisqu'on a pu prendre ε aussi petit qu'on a voulu.

» Faisons $h = 2$. Dans la somme (5), les termes qui correspondent à $k > 1$ donnent une somme négligeable vis-à-vis de x, ainsi qu'il est facile de s'en assurer : on peut donc prendre

$$\psi_2(x) = \sum_{p<x} \log p \, \log\left(\frac{x}{p}\right) = x(1+\eta), \tag{6}$$

η étant aussi petit qu'on veut en valeur absolue pour x suffisamment grand. Changeons x en $x(1+h)$ et retranchons membre à membre : il vient

$$\log(1+h) \sum \log p + \sum \log p' \, \log \frac{x(1+h)}{p'} = x(h+\eta). \tag{7}$$

η a la même signification que tout à l'heure ; p désigne successivement les nombres premiers plus petits que x ; p' les nombres premiers compris entre x et $x(1+h)$. Comme $\frac{x(1+h)}{p'}$ est compris entre 1 et $1+h$, on a en divisant (7) par $\log(1+h)$

$$\sum \log p < \frac{x(h+\eta)}{\log(1+h)} \tag{8}$$

et, d'autre part,

$$\sum \log p + \sum \log p' > \frac{x(h+\eta)}{\log(1+h)},$$

ce qui, en changeant de nouveau x en $x(1+h)$, s'écrit

$$\sum \log p > \frac{x(h+\eta)}{(1+h)\log(1+h)}. \tag{9}$$

» De ces deux relations, il est aisé de déduire que, pour x assez grand, $\sum \log p$ est compris entre $x(1-\varepsilon)$ et $x(1+\varepsilon)$. Il suffit de prendre h tel que $1 - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{h}{(1+h)\log(1+h)} < \frac{h}{\log(1+h)} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, puis x assez grand pour que $|\eta| < \frac{\varepsilon}{2}\log(1+h)$. »