LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN ET LES PROBABILITÉS

par

Philippe Biane

1. Introduction

Depuis quelques années, sous l'influence notamment du physicien et théoricien des nombres F. J. Dyson, des idées probabilistes ont pénétré le domaine de la théorie des nombres, et tout particulièrement celui de l'étude de la fonction zêta de Riemann. Sans essayer d'offrir un panorama complet de ces relations entre probabilités et théorie des nombres, je vais tenter d'expliquer, sur deux exemples, comment ces domaines apparemment éloignés peuvent entretenir des relations étroites.

Le premier exemple que nous considérerons est celui de la théorie des matrices aléatoires, et ses applications à l'étude des zéros de la fonction zêta de Riemann. L'origine de l'intérêt pour les matrices aléatoires en théorie des nombres remonte aux travaux de H. L. Montgomery sur la distribution des différences entre zéros de la fonction zêta. On note ici $\rho = 1/2 + i\gamma$ les zéros non triviaux de la fonction zêta (on ne s'intéressera pas aux zéros triviaux $-2, -4, \dots$), et on suppose que l'hypothèse de Riemann est vérifiée, c'est-à-dire que les nombres γ sont réels. On rappelle que les zéros sont répartis symétriquement par rapport à $1/2$ (d'après l'équation fonctionnelle de ζ) et que le nombre de zéros dont la partie imaginaire est dans l'intervalle $[0, T]$ est équivalent à $\frac{T}{2\pi} \log T$ lorsque $T \to \infty$, par conséquent, sur l'intervalle $[0, T]$ la densité moyenne de zéros est $\frac{1}{2\pi} \log T$, et l'espacement moyen entre deux zéros consécutifs est $\frac{2\pi}{\log T}$. Montgomery s'est intéressé à la répartition asymptotique des écarts $\gamma - \gamma'$ où (γ, γ') décrit l'ensemble des couples de zéros dans l'intervalle $[0, T]$. On renormalise ces écarts par un facteur $\frac{\log T}{2\pi}$ afin de ramener l'écartement moyen à 1, et on s'intéresse donc à $N_{a,b}(T)$, le nombre de couples γ, γ' dans $[0, T]$ qui vérifient $\gamma - \gamma' \in \left[\frac{2\pi a}{\log T}, \frac{2\pi b}{\log T}\right[$, où a et b sont deux réels. Montgomery a été amené à conjecturer, à la suite de calculs que nous évoquerons dans le paragraphe 2.1, le comportement asymptotique suivant

$$N_{a,b}(T) = \frac{T}{2\pi} \log T \Big(\int_a^b 1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2 du + o(1) \Big) \qquad \text{pour } 0 < a < b \tag{1.1}$$

Montgomery se trouvait à Princeton en même temps que F. J. Dyson, lorsqu'il fit cette conjecture. Lors d'une conversation avec celui-ci, il apprit, à son grand étonnement, que ce comportement asymptotique était exactement le même que celui de la répartition des écarts entre les valeurs propres d'une matrice hermitienne de grande taille, choisie au hasard avec une loi gaussienne, un résultat bien connu des physiciens théoriciens. On expliquera au paragraphe 2.2 les motivations des physiciens pour étudier ce problème ainsi que les calculs subtils qui mènent à sa solution. La coïncidence troublante entre la conjecture de Montgomery et les résultats des physiciens sur les matrices aléatoires éclaire d'un jour nouveau la suggestion, due à Polya et Hilbert, que les nombres γ devraient être les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint opérant sur un espace de Hilbert. L'existence d'un tel opérateur, qui entraînerait en particulier la validité de l'hypothèse de Riemann, reste encore conjecturale, mais cette possibilité a amené A. Odlyzko à essayer de vérifier expérimentalement la conjecture de Montgomery. Après des calculs poussés, que nous évoquerons au paragraphe 2.3, il a pu vérifier que les zéros de la fonctions zêta se conforment aux prédictions du modèle des matrices aléatoires avec une grande précision. Nous verrons également comment l'heuristique des matrices aléatoires a conduit J. Keating et N. Snaith à proposer des conjectures remarquables pour le comportement asymptotique des moments de la fonction zêta sur la droite critique, un problème qui remonte aux travaux de Hardy et Littlewood.

Malgré des confirmations expérimentales convaincantes, les relations entre probabilités et fonction zêta évoquées ci-dessus restent en grande partie conjecturales, c'est pourquoi j'ai choisi de parler également d'autres connections, probablement plus anecdotiques du point de vue de la fonction zêta de Riemann, mais qui font intervenir le mouvement brownien, sans doute l'objet le plus important, et en tous cas le plus étudié, de la théorie moderne des probabilités. On verra que la fonction ξ de Riemann, qui permet d'exprimer de façon symétrique l'équation fonctionnelle de la fonction zêta, est la transformée de Mellin d'une mesure de probabilités qui apparaît dans l'étude du mouvement brownien, et plus particulièrement dans la théorie des excursions, ce qui nous donnera l'occasion d'exposer les rudiments de cette théorie. Nous donnerons également une interprétation probabiliste de l'équation fonctionnelle de zêta, et nous expliquerons comment des raisonnements probabilistes amènent de façon naturelle à une renormalisation de la série $\sum_1^\infty (-1)^n n^{-s}$, qui converge dans tout le plan complexe.

2. Corrélations entre zéros de la fonction zêta de Riemann et matrices aléatoires

2.1. La conjecture de Montgomery sur les corrélations de paires

Le point de départ du travail de Montgomery [**7**] a été l'étude du comportement asymptotique de la transformée de Fourier de la distribution des écarts entre les nombres γ. Plus précisément, il a considéré la quantité

$$F(\alpha) = \Big(\frac{T}{2\pi}\log T\Big)^{-1} \sum_{0\leqslant\gamma,\gamma'\leqslant T} T^{-i\alpha(\gamma-\gamma')}\frac{4}{4+(\gamma-\gamma')^2}. \tag{2.1}$$

Au facteur $\frac{4}{4+(\gamma-\gamma')^2}$ près, qui sert à atténuer la contribution des grands écarts, il s'agit de la transformée de Fourier de la distribution des nombres $(\gamma-\gamma')\frac{\log T}{2\pi}$. Sous l'hypothèse de Riemann, il est clair que F est à valeur réelles, et est une fonction paire de α. Toujours en supposant que l'hypothèse de Riemann est vraie, Montgomery a montré que pour tout $\alpha \in [0,1[$ on a

$$F(\alpha) = (1+o(1))T^{-2\alpha}\log T + \alpha + o(1); \qquad T\to\infty \tag{2.2}$$

le terme d'erreur étant uniforme pour $\alpha \in [0, 1-\varepsilon[$, pour tout $\varepsilon > 0$. La démonstration de ce résultat, trop technique pour être décrite en détail ici, repose sur une « formule explicite » reliant les zéros de la fonction zêta et les nombres premiers, qui s'écrit, en supposant toujours l'hypothèse de Riemann vérifiée, avec $t\in\mathbb{R}$ et $x \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} 2\sum_{0\leqslant\gamma\leqslant T} \frac{x^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2} &= -x^{1/2}\Big(\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\Big(\frac{x}{n}\Big)^{-1/2+it} + \sum_{n>x}\Lambda(n)\Big(\frac{x}{n}\Big)^{3/2+it}\Big) \\ &\quad + x^{-1+it}(\log(|t|+2)+O(1)) + O(x^{1/2}/(|t|+2)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

où Λ désigne la fonction arithmétique définie par $\Lambda(n) = \log p$ si n est une puissance du nombre premier p, et $\Lambda(n) = 0$ sinon. En appelant $G(t,x)$ le membre de gauche de (2.3), on vérifie en effet facilement que

$$\int_0^T |G(t,T^\alpha)|^2 dt = F(\alpha)T\log T + O(\log^3 T)$$

et (2.2) provient alors d'une estimation délicate de $\int_0^T |D(t,T^\alpha)|^2 dt$ où $D(t,x)$ désigne le membre de droite de (2.3). Cette estimation n'est possible que si

$\alpha \in [0,1[$, mais des arguments heuristiques ont amené Montgomery à conjecturer que, toujours sous l'hypothèse de Riemann, on avait $F(\alpha) = 1 + o(1)$, pour $\alpha \geqslant 1$, uniformément sur tout compact, ce qui détermine le comportement asymptotique de F sur $\mathbb{R}$ tout entier. En effet, d'après la formule d'inversion de Fourier et (2.1), on a

$$\sum_{\gamma,\gamma'} r\Big((\gamma-\gamma')\frac{\log T}{2\pi}\Big)\frac{4}{4+(\gamma-\gamma')^2} = \Big(\frac{T}{2\pi}\log T\Big)\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\widehat{r}(\alpha)d\alpha \tag{2.4}$$

où $\widehat{r}$ désigne la transformée de Fourier de r,

$$\widehat{r}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(x)e^{-2i\pi\alpha x}dx.$$

Si on applique (2.4) à la fonction r telle que $r(u) = 1$ si $u \in [a,b]$, et $r(x) = 0$ sinon, avec $0 < a < b$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{r}(\alpha)T^{-2|\alpha|}\log T d\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{r}(\alpha/\log T)e^{-2|\alpha|}d\alpha \\ &= \widehat{r}(0) + o(1) = b - a + o(1)\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{r}(\alpha)d\alpha = r(0) = 0.$$

En appliquant la formule de Plancherel,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{r}(\alpha)\min(1-|\alpha|,0)d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\Big(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\Big)^2 dx = \int_a^b \Big(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\Big)^2 dx.$$

En combinant ces calculs à l'estimation

$$F(\alpha) = (1 + o(1)T^{-2|\alpha|}\log T + 1 - \min(1-|\alpha|,0) + o(1)$$

on trouve bien (1.1).

2.2. Le GUE. D'après la théorie quantique, les niveaux d'énergie d'un système atomique sont les valeurs propres d'un opérateur hermitien dans l'espace de Hilbert, le hamiltonien du système. Lorsque le système atomique contient beaucoup de particules élémentaires, il y a une profusion de niveaux d'énergie et le hamiltonien est trop complexe pour être diagonalisé numériquement. C'est dans ce contexte que le physicien E. Wigner a eu l'idée de modéliser les niveaux d'énergie d'un tel hamiltonien par les valeurs propres d'une matrice hermitienne aléatoire de grande taille. L'espoir de Wigner était que les propriétés statistiques des niveaux d'énergie, par exemple la distribution de leurs écartements, coïncideraient avec celles des matrices aléatoires. Après de nombreux travaux théoriques et expérimentaux l'intuition de Wigner s'est révélée fondée et on observe, pour de nombreux systèmes quantiques, une bonne correspondance entre l'expérience et les prédictions du modèle des matrices aléatoires, on pourra par exemple consulter l'introduction du livre de Mehta [**7**] sur ces questions.

Je vais expliquer maintenant comment on décrit la structure statistique des valeurs propres d'une grande matrice aléatoire. Le terme GUE — un acronyme pour Gaussian Unitary Ensemble — désigne, dans la littérature physique, l'espace des matrices hermitiennes de taille $N \times N$, que nous noterons $\mathcal{H}_N$, muni de la mesure de probabilités gaussienne standard, dont la densité est $(2\pi)^{-N^2/2}\exp(-\mathrm{Tr}(M^2)/2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{H}_N$. Nous allons considérer la loi des valeurs propres d'une matrice aléatoire tirée avec la loi du GUE. Toute matrice hermitienne M_0 peut s'écrire sous la forme $U_0X_0U_0^*$, où U_0 est une matrice unitaire et X_0 une matrice diagonale, formée avec les valeurs propres de M_0. Considérons l'application $(X,S) \mapsto U_0e^{iS}Xe^{-iS}U_0^*$ où X parcourt l'ensemble des matrices réelles diagonales et S celui des matrices hermitiennes. La différentielle en $(X_0,0)$ de cette application est $(X,S) \mapsto X + U_0[X_0,S]U_0^*$ où $[X,Y] = XY - YX$ désigne le commutateur de deux matrices. Si M_0 est générique (toutes ses valeurs propres sont distinctes), le noyau de la différentielle est le sous-espace des couples $(0,S)$ où S est diagonale. Il s'ensuit, par le théorème des fonctions implicites, que $(X,S) \mapsto U_0e^{iS}Xe^{-iS}U_0^*$, restreint au sous espace des S dont les coefficients diagonaux sont nuls, est un difféomorphisme entre un voisinage de $(X_0,0)$ et un voisinage de M_0. En identifiant un couple (X,S) à la matrice $X+S$ on peut calculer les valeurs propres de ce changement de variables, ainsi que son Jacobien en $(X_0,0)$ qui vaut $\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2$ où les x_i sont les valeurs propres de X_0, donc de M_0. Finalement avec la formule de changement de variables, on voit que pour toute fonction symétrique en N variables $f(x_1,\ldots,x_N)$, on a, en notant $x_1(M),\ldots,x_N(M)$ les valeurs propres d'une matrice M,

$$\int_{\mathcal{H}_N} f(x_1(M),\ldots,x_N(M))\frac{e^{-\mathrm{Tr}(M^2)/2}}{(2\pi)^{N^2/2}}dM$$
$$= \frac{1}{Z_N}\int_{\mathbb{R}^N} f(x_1,\ldots,x_N)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant N}(x_i-x_j)^2 e^{-\sum_{n=1}^N x_n^2/2}dx_1\cdots dx_N$$

où Z_N est une constante de normalisation que nous calculerons plus loin. La densité de la loi des valeurs propres de M est donc,

$$P^{(N)}(x_1,\ldots,x_N) = \frac{1}{Z_N}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant N}(x_i-x_j)^2 e^{-\sum_{i=1}^N x_i^2/2} \tag{2.5}$$

La connaissance de cette densité va nous permettre de calculer l'espérance de variables aléatoires du type

$$N_f = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in[1,N]^n \\ \text{les } i_1,\ldots,i_n \text{ distincts}}} f(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne bornée. On a

$$E(N_f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\ldots,x_n) R_n^{(N)}(x_1,\ldots,x_n) dx_1 \cdots x_n \tag{2.6}$$

où

$$\begin{aligned} R_n^{(N)}&(x_1,\ldots,x_n) \\ &= \frac{N!}{(N-n)!} \int_{\mathbb{R}^{N-n}} P^{(N)}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_N) dx_{n+1} \cdots dx_N \end{aligned}$$

Pour calculer cette quantité nous allons réécrire la densité (2.5) en utilisant le déterminant de Vandermonde

$$\prod_{i>j} (x_i - x_j) = \mathrm{dét}[x_j^{i-1}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant N \\ 1 \leqslant j \leqslant N}}$$

En utilisant des combinaisons linéaires de colonnes de la matrices $[x_j^{i-1}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant N \\ 1 \leqslant j \leqslant N}}$, on voit que

$$\prod_{i>j} (x_i - x_j) = \mathrm{dét}[P_{i-1}(x_j)]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant N \\ 1 \leqslant j \leqslant N}}$$

pour toute suite de polynômes $P_0, \ldots, P_{N-1}$ telle que pour tout i, le degré de P_i est i, et son coefficient dominant 1. Nous allons prendre la suite des polynômes d'Hermite, définis par les relations de récurrence

$$P_{n+1} = xP_n + nP_{n-1}$$

Ces polynômes vérifient les relations d'orthogonalité

$$\int_{\mathbb{R}} P_m(x) P_n(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \delta_{mn} n!$$

Introduisons les fonctions d'Hermite normalisées

$$\phi_n(x) = (n!)^{-1/2} P_n(x) \frac{e^{-x^2/4}}{(2\pi)^{1/4}}$$

qui forment une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$. La densité $P^{(N)}$ est donc proportionnelle à $\left(\mathrm{dét}[\phi_{i-1}(x_j)]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant N \\ 1 \leqslant j \leqslant N}}\right)^2$. Pour calculer cette constante de proportionnalité, évaluons l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} &\left(\mathrm{dét}[\phi_{i-1}(x_j)]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant N \\ 1 \leqslant j \leqslant N}}\right)^2 dx_1 \cdots dx_N \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\sigma,\tau \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N \phi_{i-1}(x_{\sigma(i)}) \phi_{j-1}(x_{\tau(j)}) dx_1 \cdots dx_N \end{aligned}$$

Les fonctions ϕ_{i-1} étant orthogonales, les termes de cette somme donnant une contribution non nulle sont ceux pour lesquels on a $\sigma = \tau$, et chacun donne une contribution 1, donc cette intégrale vaut $N!$ et on a

$$\begin{aligned} P^{(N)}(x_1, \ldots, x_N) &= (N!)^{-1}\Big(\text{dét}[\phi_{i-1}(x_j)]_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant N}}\Big)^2 \\ &= (N!)^{-1}\text{dét}[K^N(x_i, x_j)]_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant N}} \end{aligned}$$

où

$$K^N(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \phi_{k-1}(x_i)\phi_{k-1}(x_j).$$

En vertu des relations d'orthogonalité des fonctions ϕ_k on a

$$\int_{\mathbb{R}} K^N(x,x) = N; \qquad \int_{\mathbb{R}} K^N(x,y)K^N(y,z)dy = K^N(x,z) \tag{2.7}$$

Nous allons en déduire que

$$R^{(N)}(x_1, \ldots, x_n) = \text{dét}[K^N(x_i, x_j)]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \tag{2.8}$$

Il suffit de raisonner par récurrence sur $N-n$, en effet la relation est vraie pour $N = n$, et si nous la supposons vraie pour $n+1$, alors on a

$$\begin{aligned} R_n^{(N)}(x_1, \ldots, x_n) &= (N-n)^{-1}\int_{\mathbb{R}} R_{n+1}^{(N)}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})dx_{n+1} \\ &= (N-n)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \text{dét}[K^N(x_i, x_j)]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n+1\\ 1\leqslant j\leqslant n+1}} dx_{n+1} \\ &= (N-n)^{-1}\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\varepsilon(\sigma)\int_{\mathbb{R}} K^N(x_1, x_{\sigma(1)})\cdots K^N(x_{n+1}, x_{\sigma(n+1)})dx_{n+1}. \end{aligned}$$

Dans cette somme, si $\sigma(n+1) = n+1$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} K^N(x_1, x_{\sigma(1)})\cdots K^N(x_{n+1}, x_{\sigma(n+1)})dx_{n+1} \\ = NK^N(x_1, x_{\sigma(1)})\cdots K^N(x_n, x_{\sigma(n)}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

d'après la première partie de (2.7). Sinon, il existe $j \leqslant n$ et $k \leqslant n$ tels que $\sigma(j) = n+1$, $\sigma(n+1) = k$, et alors, d'après la seconde partie de (2.7),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} K^N(x_1, x_{\sigma(1)})\cdots K^N(x_{n+1}, x_{\sigma(n+1)})dx_{n+1} \\ = K^N(x_1, x_{\sigma'(1)})\cdots K^N(x_n, x_{\sigma'(n)}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

où σ' est la permutation de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $\sigma'(j) = k$ et $\sigma'(i) = \sigma(i)$ si $i \neq j$, et $\varepsilon(\sigma') = -\varepsilon(\sigma)$. Chaque permutation $\sigma' \in \Sigma_n$ peut provenir de n

permutations $\sigma \in \Sigma_{n+1}$, donc d'après (2.9) et (2.10) on a

$$\int_{\mathbb{R}} \text{dét}[K^N(x_i, x_j)]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n+1\\ 1\leqslant j\leqslant n+1}} dx_{n+1} = (N-n)\text{dét}[K^N(x_i, x_j)]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

d'où (2.8). Cette formule explicite permet de déterminer le comportement asymptotique de nombreuses statistiques sur les valeurs propres des matrices du GUE. On va l'illustrer en calculant les corrélations de paires. Nous aurons besoin du comportement asymptotique du noyau K^N. Celui-ci se calcule au moyen de la formule de Christoffel-Darboux, facile à établir par récurrence à partir de la relation de récurrence des P_n,

$$\sum_{k=1}^{N} \phi_{k-1}(x)\phi_{k-1}(y) = \sqrt{N}\,\frac{\phi_N(x)\phi_{N-1}(y) - \phi_N(x)\phi_{N-1}(x)}{x-y}$$

La formule asymptotique de Plancherel-Rotach pour les fonctions d'Hermite (*cf.* [**13**]) entraîne que

$$\frac{1}{N}R_1^{(N)}(x\sqrt{N}) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} \qquad \text{si } x \in [-2,2]$$

et pour toute fonction continue f, à support compact,

$$E\Big[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(x_j/\sqrt{N})\Big] = \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}} f(x/\sqrt{N})R_1^{(N)}(x)dx \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_{-2}^{2} f(x)\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}dx$$

La répartition des valeurs propres converge donc vers une loi, appelée loi du demi-cercle de Wigner. Si nous choisissons un petit intervalle $]-\varepsilon_N, +\varepsilon_N[$ autour de 0 avec $\varepsilon_N \to 0$ mais $\varepsilon_N\sqrt{N} \to \infty$, le nombre moyen de valeurs propres dans cet intervalle sera de l'ordre de $2\varepsilon_N\sqrt{N}/\pi$ et l'espacement moyen entre deux de ces valeurs propres sera $\pi/\sqrt{N}$. En utilisant encore les formules asymptotiques pour les polynômes d'Hermite on arrive à la formule asymptotique

$$K_N(\pi\xi/\sqrt{N}, \pi\eta/\sqrt{N}) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\sin\pi(\xi-\eta)}{\pi(\xi-\eta)}$$

ce qui permet de déduire que

$$\begin{aligned}(2.11)\quad E\Big[\tfrac{\pi}{2\varepsilon_N\sqrt{N}}\,\text{card}\{(i,j) \mid 1\leqslant i\leqslant N;\ 1\leqslant j\leqslant N;\ i\neq j;\\ |x_i|, |x_j| < \varepsilon_N;\ a\pi/\sqrt{N} \leqslant x_i - x_j \leqslant b\pi/\sqrt{N}\}\Big]\\ \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_a^b 1 - \Big(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\Big)^2 dx.\end{aligned}$$

Cette formule est très différente de celle qu'on obtiendrait en choisissant N points $X_1, \ldots, X_N$ au hasard uniformément sur $[0,1]$, dont l'écartement moyen est $\sim 1/N$, car on voit facilement que

$$(2.12) \quad E\left[\tfrac{1}{N}\operatorname{card}\{(i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant N;\ 1 \leqslant j \leqslant N;\ a/N \leqslant X_i - X_j \leqslant b/N\}\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} b-a.$$

Le fait que la fonction $1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2$ s'annule en 0 traduit le fait que les valeurs propres d'une matrice aléatoires (ou les zéros de zêta) ont tendance à se repousser. Dans le cas des matrices aléatoires on peut comprendre ce phénomène qualitativement. Pour une matrice générique, dont toutes la valeurs propres sont distinctes, la dimension de son orbite, *i.e.*, des matrices de la forme UMU^*, est égale à $N^2 - N$, par contre si deux valeurs propres sont égales alors la dimension n'est plus que $N^2 - N - 2$. C'est ce saut de deux dimensions qui explique le fait que la « fonction de corrélation » s'annule en zéro.

2.3. Vérifications expérimentales et nouvelles conjectures

La conjecture de Montgomery a amené A. Odlyzko [**10**] à calculer numériquement un grand nombre de zéros de la fonction zêta, de partie imaginaire positive, sur la droite critique. C'est ainsi qu'il a, en 1987, obtenu 10^5 zéros entre le $10^{12}+1$ ème et le $10^{12}+10^5$ ème, avec une précision de 10^{-8}, les zéros étant ordonnés suivant leur partie imaginaire. Il a ainsi pu vérifier le bon agrément entre ces données numériques et la conjecture.

Depuis 1987 les ordinateurs ont considérablement progressé, et à l'heure actuelle les données les plus récentes concernent un million de zéros autour du 10^{22}ème. Par exemple le zéro numéro $10^{22}+1$ est

$$1/2 + i1\,370\,919\,909\,931\,995\,308\,226,68016095...$$

et les derniers chiffres significatifs des 3 suivants sont

$$\begin{array}{c} 8226,77659152 \\ 8226,94593324 \\ 8227,16707942 \end{array}$$

Ainsi la conjecture de Montgomery et les vérification d'Odlyzko ajoutent du poids à l'hypothèse de Polya et Hilbert que les nombre γ sont les valeurs propres d'un opérateur hermitien. Sans donner de clé quant à l'origine de cet opérateur, elles permettent d'en cerner un peu mieux les contours, en effet on peut considérer des matrices aléatoires gaussienne présentant des symétries différentes des matrices hermitiennes, comme par exemple des matrices symétriques réelles, c'est le modèle dit du GOE pour Gaussian Orthogonal Ensemble, ou bien des matrices symplectiques (GSE=Gaussian Symplectic Ensemble). Des calculs analogues à ceux du paragraphe précédent permettent de déterminer la forme de la fonction de corrélation de paires (la fonction $1-\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2$ pour le GUE), ainsi que d'autres statistiques sur les valeurs propres, et on obtient un résultat différent de celui du GUE, donc l'adéquation des résultats numériques avec le modèle du GUE suggère que l'opérateur de Polya et Hilbert, s'il existe, devrait être un opérateur hermitien, mais ne serait pas orthogonal ou symplectique.

Les résultats de Montgomery ont été étendus à d'autres fonctions L et la recherche dans ce domaine est actuellement très active, mais faute de temps et de compétence je n'aborderai pas ce sujet pour lequel je renvoie à l'exposé récent de P. Michel au Séminaire Bourbaki [**8**].

Pour terminer cette première partie nous allons nous intéresser à un autre problème concernant la fonction zêta, celui du comportement asymptotique de ses moments sur la droite critique. Il s'agit d'évaluer la quantité

$$\int_0^T |\zeta(1/2+it)|^{2k}dt,$$

lorsque $T\to\infty$, cette question étant motivée par des applications à la théorie des nombres, en particulier à la distribution des nombres premiers. Le premier résultat dans cette direction remonte à Hardy et Littlewood qui ont montré que

$$\int_0^T |\zeta(1/2+it)|^2dt \sim T\log T, \quad T\to\infty$$

puis à Ingham qui a obtenu

$$\int_0^T |\zeta(1/2+it)|^4dt \sim \frac{1}{2\pi^2}T(\log T)^4, \quad T\to\infty$$

mais rien d'autre n'a été démontré pour les moments supérieurs. Il existe une conjecture pour la valeur asymptotique de $\int_0^T |\zeta(1/2+it)|^6dt$ due à Conrey et Gosh, et une pour $\int_0^T |\zeta(1/2+it)|^8dt$, due à Conrey et Gonek, sous la forme

$$\int_0^T |\zeta(1/2+it)|^{2k}dt \sim a_kb_kT(\log T)^{k^2} \tag{2.13}$$

avec

$$a_k=\prod_{p\in\mathcal{P}}(1-1/p)^{k^2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma(k+m)}{m!\Gamma(k)}\right)^2p^{-m}\right)$$

le produit étant pris sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers, et

$$b_3 = \frac{42}{9!} \qquad b_4 = \frac{24024}{16!}$$

La partie la plus difficile dans l'établissement de la conjecture est l'obtention des coefficients b_3 et b_4, qui se fait au moyen de longs calculs. En utilisant le modèle du GUE, Keating et Snaith [**6**] ont pu formuler une conjecture valable pour tout k, en comprenant la nature des deux termes a_k et b_k des conjectures précédentes. Leur idée est que dans le produit $a_k b_k$ le premier terme, a_k, est une contribution spécifique à la fonction zêta, faisant intervenir les nombres premiers de façon explicite, alors que le second, b_k, est un terme *universel*, qui provient de l'influence des fluctuations des zéros critiques de la fonction zêta, et qu'il devrait être le même pour toute fonction dont les zéros présentent les mêmes fluctuations. Pour calculer ce terme, ils suggèrent de remplacer la fonction ζ par le polynôme caractéristique d'une matrice aléatoire du GUE et de calculer une quantité appropriée. Je n'insisterai pas sur l'origine de l'idée d'universalité, qui provient de l'étude des modèles critiques en mécanique statistique et qui dépasse de très loin le cadre de cet exposé, mais il est remarquable que cette idée mène de façon si rapide aux mêmes coefficients que ceux calculés par les méthodes de théorie des nombres. Dans le calcul de Keating et Snaith, on considère une matrice aléatoire unitaire, choisie avec la mesure de Haar sur le groupe $U(N)$. Ce modèle est appelé CUE (circular unitary ensemble), et il est très proche du GUE, d'ailleurs des résultats analogues à ceux de Keating et Snaith ont été donné peu après par Brézin et Hikami [**2**]. On calcule donc la moyenne $E\big[|\text{dét}(1 - e^{i\theta}U)|^{2k}\big]$, où U est une matrice du CUE et $e^{i\theta}$ un nombre complexe de module 1. En fait on voit tout de suite que cette quantité ne dépend pas de $e^{i\theta}$, et un calcul explicite donne

$$E\big[|\text{dét}(1 - U)|^{2k}\big] \underset{N\to\infty}{\sim} N^{k^2} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$$

ce qui permet de conjecturer $b_k = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$. On vérifie que cette valeur coïncide avec les celles connues ou conjecturées obtenues précédemment, ce qui a amené Keating et Snaith à proposer d'étendre la conjecture à tous les entiers positifs k avec les valeurs de a_k et b_k données par les formules ci-dessus.

3. La fonction zêta de Riemann et le mouvement brownien

3.1. Quelques formules d'analyse. Rappelons que la fonction zêta de Riemann, définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{pour } \Re(s) > 1$$

admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, avec un unique pôle (simple) en zéro. L'équation fonctionnelle de ζ s'écrit sous une forme symétrique à condition d'introduire la fonction entière ξ définie par le prolongement analytique de

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) \qquad \text{pour } \Re(s) > 1,$$

qui satisfait

$$\xi(s) = \xi(1-s) \qquad \text{pour tout } s \in \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

Une façon d'établir ce résultat consiste à remarquer que

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^s \Psi(t) dt \qquad \text{pour } \Re(s) > 1. \tag{3.2}$$

où

$$\Psi(y) = 4y \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\pi^2 n^4 y^2 - 3\pi n^2\right) e^{-\pi n^2 y^2}. \tag{3.3}$$

La fonction Ψ s'exprime à l'aide de la fonction θ de Jacobi

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 t)$$

au moyen de la formule

$$\Psi(y) = 6y\theta'(y^2) + 4y^3\theta''(y^2).$$

L'équation fonctionnelle

$$\theta(t) = t^{-1/2}\theta(t^{-1}) \qquad \text{pour tout } t > 0$$

entraîne que Ψ vérifie

$$\Psi(y) = y^{-3}\Psi(y^{-1}) \qquad \text{pour tout } y > 0. \tag{3.4}$$

et le prolongement analytique de ξ ainsi que l'équation (3.1) s'en déduisent. Le point de départ des développements qui suivent est le fait que la fonction Ψ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, d'intégrale 1, donc c'est la densité d'une mesure de probabilités sur la droite réelle. En effet la formule (3.3) nous montre que $\Psi(y) > 0$ pour $y \geqslant 1$, car c'est une somme de termes positifs, et de l'équation fonctionnelle (3.4) on conclut pour $y < 1$. Le graphe de cette densité est indiqué sur la figure 1, et la fonction de répartition

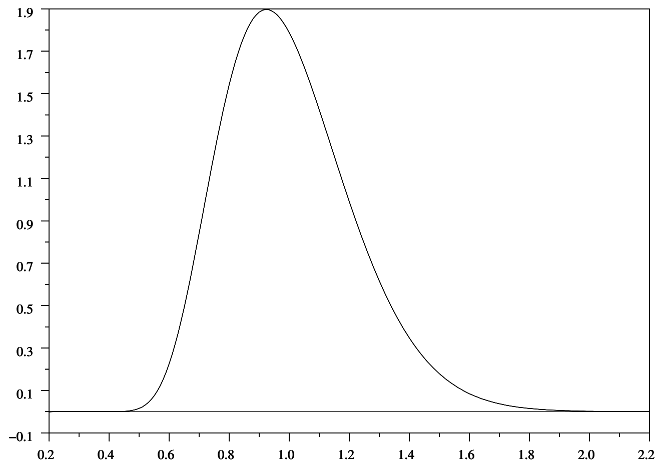

FIGURE 1

$$F_\Psi(y) = \int_0^y \Psi(x)dx = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(1 - 2\pi n^2 y^2)e^{-\pi n^2 y^2} \tag{3.5}$$

$$= \frac{4\pi}{y^3}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\pi n^2/y^2} \tag{3.6}$$

s'obtient en intégrant terme à terme la formule (3.3), ou bien celle donnée par (3.4).

C'est un fait remarquable que, en dépit de l'apparence complexe de la formule (3.3), cette mesure de probabilités intervient de façon naturelle dans un grand nombre de questions provenant de la théorie des marches aléatoires et du mouvement brownien. Une revue assez complète des interprétations probabilistes de la formule (3.3) en termes du mouvement brownien figure dans [**1**] et [**14**]. Il ne sera pas possible, dans le cadre de cet exposé de discuter de tous ces résultats, mais j'évoquerai l'interprétation qui me semble la plus accessible. Celle-ci fait intervenir les excursions du mouvement brownien hors de zéro, et on en donnera une approche élémentaire au moyen du jeu de pile ou face dans le paragraphe 3.2. Cela nous permettra au paragraphe 3.4 de montrer que l'équation fonctionnelle de la fonction zêta est équivalente à l'égalité en loi de deux variables aléatoires définies à partir du mouvement brownien ou de processus proches. Finalement au paragraphe 3.5 on verra que la variable de loi de densité Ψ admet une décomposition qui permet de renormaliser la série $\sum_n n^{-s}$.

L'origine de ces liens entre fonction zêta et mouvement brownien est à rechercher dans le fait que les fonctions thêta de Jacobi, qui sont intimement liées à la fonction zêta de Riemann, interviennent dans le calcul de solutions de l'équation de la chaleur. On sait d'autre part que la propagation de la chaleur et le mouvement brownien sont deux phénomènes physiques dont la structure mathématique sous-jacente est la même, on peut donc imaginer de cette façon que la fonction zêta de Riemann doit apparaître dans la théorie du mouvement brownien. Ces considérations générales ne nous disent toutefois rien de précis sur la nature exacte de ces relations. En particulier le fait que la fonction zêta (ou plus exactement la mesure de probabilités de densité Ψ) intervienne dans autant problèmes naturels est un fait remarquable.

3.2. Le jeu de pile ou face. Deux joueurs s'affrontent dans une série de parties de pile ou face. On suppose que la mise à chaque partie vaut une unité, et on s'intéresse au gain de l'un des joueurs. On peut représenter ce gain au bout de n parties par une somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, où X_i représente le gain du joueur à la $i^{\text{ème}}$ partie. Les X_i sont des variables aléatoires indépendantes, qui satisfont $P(X_i = \pm 1) = 1/2$. On se place dans la situation idéale où les fortunes des deux joueurs sont infinies, et le jeu ne s'arrête jamais. Un théorème classique, dû à Polya, énonce que, avec une probabilité égale à 1, le gain du joueur considéré va prendre la valeur 0 pour une infinité de valeurs de n, autrement dit les deux joueurs retrouveront leurs fortunes initiales une infinité de fois. Nous allons retrouver ce résultat ci-dessous par des considérations élémentaires. On notera $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ les temps de retour successifs à l'égalité de fortune, *i.e.*, $T_0 = 0$ et $T_j = \inf\{n > T_{j-1}; S_n = 0\}$ pour $j > 0$. Après chaque retour en zéro le gain se comporte comme une marche aléatoire simple, c'est-à-dire que la famille de variables aléatoires $(S_{T_j+n}; n \geqslant 0)$ a la même loi que la famille $(S_n; n \geqslant 0)$, et de plus elle est indépendante des variables aléatoires $(S_n 1_{n \leqslant T_j}; n \geqslant 0)$. C'est une conséquence de la propriété de Markov forte de la marche aléatoires, et on peut le vérifier en conditionnant par rapport à la valeur du temps T_j. Les instants $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ forment donc une suite croissante, dont les accroissements $(T_i - T_{i-1}; i \geqslant 1)$ sont indépendants et de même loi que T_1. On peut calculer la probabilité que le premier temps de retour ait lieu à l'instant $2n$ (il est clair que le temps de retour en 0 ne peut pas être un nombre impair). Comme on va le voir ci-dessous, on a

$$P(T_1 = 2n) = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} \tag{3.7}$$

De même, la différence de fortunes maximale entre deux instants successifs d'égalité obéit à une loi de probabilités simple. Si on pose $M_j = \max\{|S_n|; T_{j-1} \leqslant n \leqslant T_j\}$ alors les M_j sont indépendants et de même loi, et on a

$$P(M_j = r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}$$

pour $r = 1, 2, \ldots$. La plupart du temps l'intervalle entre deux temps de retour successifs en 0 prend une petite valeur, et alors la différence maximale de gain entre les deux joueurs est également petite. Néanmoins, il arrive parfois que cet intervalle soit très long, et que la différence maximale de gain soit également importante. Pour quantifier cela nous allons calculer, suivant Diaconis et Smith [**11**] (voir aussi [**3**], [**12**] pour des calculs semblables), pour n et m donnés, la probabilité pour que le temps de retour soit égal à $2n$ et que la différence maximale de gains soit égale à m. Il est commode de représenter la suite $(S_k; k \geqslant 0)$ par son graphe, en interpolant linéairement entre les instants entiers, comme sur la figure 2. Considérons un tel graphe où l'on se restreint

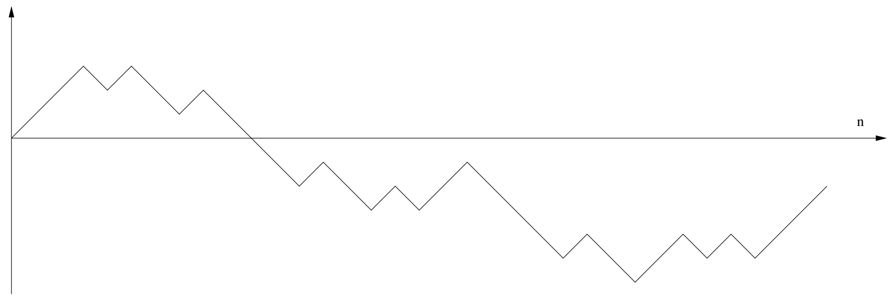

FIGURE 2

à l'intervalle de temps $k \in [0, n]$. Chaque graphe correspond à la réalisation d'une unique suite $(X_1, \ldots, X_n) \in \{+1, -1\}^n$, par conséquent la probabilité que l'événement qu'il représente soit réalisé est égale à 2^{-n}. Considérons maintenant l'événement correspondant au premier temps de retour égal à $2n$, noté $\{T_1 = 2n\}$. Une suite $(X_1, \ldots, X_{2n})$ réalise cet événement si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_k; 1 \leqslant k \leqslant 2n)$, satisfait $S_{2n} = 0$ et $S_k \neq 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant 2n-1$. Le calcul du nombre de ces suites est un exercice classique dont on rappelle la solution, qui utilise le *principe de réflexion* dû à Désiré André. Quitte à multiplier leur nombre par 2, il suffit de compter celles qui restent strictement positives pour $k \in [1, 2n-1]$; en particulier pour une telle suite on a $S_1 = S_{2n-1} = 1$. Comptons tout d'abord les suites qui vérifient $S_0 = S_{2n} = 0$ et $S_1 = S_{2n-1} = 1$. Elles correspondent aux suites $X_1, \dots, X_{2n}$ telles que $X_1 = 1, X_{2n} = -1$, et parmi $X_2, \dots, X_{2n-1}$ il y a autant de 1 que de -1, leur nombre est donc égal au coefficient du binôme

$$\binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}.$$

Il faut retirer de ce nombre celui des suites qui s'annulent pour au moins un $k \in [2, 2n-2]$. Soit maintenant $(S_1, \dots, S_{2n})$ une telle suite, alors il existe un plus petit entier $k_0 \in [2, 2n-1]$ tel que $S_{k_0} = 0$. Considérons la suite S'_k telle que $S'_k = S_k$ pour $k \leqslant k_0$, $S'_k = -S_k$ pour $k_0 \leqslant k \leqslant 2n$. On a donc $S'_{2n-1} = -1$. Le graphe associé à cette suite est obtenu en réfléchissant le graphe de la suite S autour de l'axe $y = 0$, après le premier temps de passage en 0, voir la figure 3. Réciproquement si une suite $S'_1, \dots, S'_{2n}$ vérifie

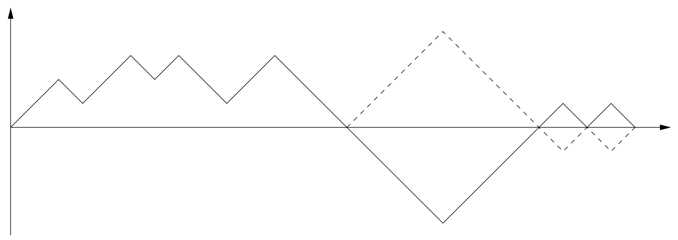

FIGURE 3

$S'_1 = 1, S'_{2n-1} = -1$ et $S'_{2n} = 0$, alors nécessairement elle s'annule pour un $k \in [2, 2n-2]$, et on peut, en la réfléchissant après le premier instant où elle passe en zéro, retrouver une suite S_k qui satisfait $S_{2n-1} = 1, S_{2n} = 0$ et S_k s'annule entre $k = 2$ et $2n-2$. La suite S'_k correspond à une suite $X'_i; 2 \leqslant i \leqslant 2n-1$ dans laquelle le nombre de $+1$ est $n-2$ et le nombre de -1 est n, donc le nombre total de telles suites est $\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}$, par conséquent le nombre de suites S_k qui ne s'annulent pas entre 1 et $2n-1$ est

$$2 \times \left(\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!} \right) = 2\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

et on retrouve la formule (3.7) en multipliant par la probabilité de chaque suite d'apparaître. En particulier, on a $\sum_{n=1}^{\infty} P(T_1 = 2n) = 1$ donc $T_1 < \infty$ presque sûrement. En appliquant la propriété de Markov, on voit que pour tout j on a $T_j < \infty$ presque sûrement et donc que la probabilité que S_n revienne une infinité de fois en 0 est égale à 1.

Nous allons maintenant calculer la probabilité pour que le temps de retour soit égal à $2n$ et que la valeur maximale de $|S_k|$ sur l'intervalle $[0, 2n]$ soit inférieure à m, soit $P(T_1 = 2n; M_1 \leqslant m)$. Quitte de nouveau à multiplier par 2, on est ramené au calcul du nombre de suites $(S_k; 0 \leqslant k \leqslant 2n)$ telles que

$$(3.8) \qquad S_0 = 0, \quad S_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad 0 < S_k \leqslant m \quad \text{pour tout } k \in [1, 2n-1].$$

Nous allons effectuer ce calcul par deux méthodes différentes. La première est une généralisation du calcul précédent. Notons $s_{2n}(k)$ le nombre de suites S_k telles que $S_1 = 1$ et $S_{2n-1} = k$. On a $s_{2n}(k) = \frac{(2n-2)!}{(n-l)!(n+l-2)!}$ si $k = 2l - 1 \in [-2n+3, 2n-1]$ et $s_{2n}(k) = 0$ sinon. On commence par compter les suites qui reviennent en 1 au temps $2n-1$, sans autre condition, puis on soustrait le nombre de celles qui passent par 0, et celles qui passent par $m+1$. Pour calculer le nombre de ces dernières on effectue une réflexion autour de la droite $y = m+1$, et on trouve, par un raisonnement semblable à celui que l'on a fait précédemment, que l'on obtient ainsi toutes les suites satisfaisant $S_{2n-1} = 2m+1$, dont le nombre est $s_{2n}(2m+1)$. Ce faisant, on a compté deux fois les suites dont le minimum est $\leqslant 0$ et dont le maximum est $\geqslant m+1$, il faut donc rajouter le nombre de ces suites. Pour compter leur nombre, on fait subir à chacune deux réflexions, après les instants d'atteinte de 0 et $m+1$ respectivement. On obtient une suite telle que $S_{2n-1} = 2m+3$ ou $S_{2n-1} = -2m-1$, suivant que 0 ou $m+1$ a été atteint en premier. Leur nombre est donc $s_{2n}(2m+3) + s_{2m}(-2m-1)$. On s'aperçoit qu'on a cette fois ci retiré des suites en trop et il faut recommencer. Finalement en appliquant le principe d'inclusion-exclusion, on voit que le nombre de suites recherché est

$$\sum_{g \in G} \mathrm{dét}(g) s_{2n}(g(1))$$

où G est le groupe d'isométries de $\mathbb{R}$ engendré par les deux réflexions $x \mapsto -x$ et $x \mapsto 2m+2-x$, soit encore

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{2n}(1 + (2m+2)k) - s_{2n}(-1 + (2m+2)k)$$

La probabilité recherchée vaut donc

$$(3.9) \quad P(T_1 = 2n; M_1 \leqslant m) \\ = 2^{-(2n-1)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{2n-2}{n-1-k(m+1)} - \binom{2n-2}{n-2-(k+1)(m+1)}$$

avec la convention $\binom{a}{b} = 0$ si $b < 0$ ou si $a < b$. En particulier, cette somme ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.

Indiquons maintenant une autre façon de calculer cette même quantité. On considère la matrice de taille $m \times m$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut écrire $\Gamma = \Gamma_+ + \Gamma_-$ où Γ_+ est une matrice triangulaire inférieure et Γ_- une matrice triangulaire supérieure. On a alors, dans la base canonique de $\mathbb{R}^m$, $\Gamma_+(e_i) = e_{i+1}$ pour $i \leqslant m-1$, et $\Gamma_+(e_m) = 0$, tandis que $\Gamma_-(e_1) = 0$ et $\Gamma_-(e_i) = e_{i-1}$ pour $2 \leqslant i \leqslant m$. Considérons la quantité $\langle \Gamma^{2n-2} e_1, e_1 \rangle$. En développant le produit, on trouve

$$\begin{aligned} \langle \Gamma^{2n-2}(e_1), e_1 \rangle &= \langle (\Gamma_+ + \Gamma_-)^{2n-2}(e_1), e_1 \rangle \\ &= \Big\langle \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n-2}) \in \{\pm\}^{2n}} \Gamma_{\varepsilon_{2n-2}} \Gamma_{\varepsilon_{2n-3}} \dots \Gamma_{\varepsilon_1}(e_1), e_1 \Big\rangle \end{aligned}$$

où la somme porte sur les 2^{2n-2} suites possibles de symboles ± 1. Comme les opérateurs $\Gamma_\pm$ transforment les éléments de la base canonique en d'autres éléments de la base, pour qu'une telle suite donne une contribution non nulle, il faut et il suffit que l'on ait $\Gamma_{\varepsilon_{2n-2}} \Gamma_{\varepsilon_{2n-1}} \dots \Gamma_{\varepsilon_1}(e_1) = e_1$. Dans ce cas on a $\Gamma_{\varepsilon_k} \Gamma_{\varepsilon_{k-1}} \dots \Gamma_{\varepsilon_1}(e_1) = e_{S_{k+1}}$ où $(S_k; 1 \leqslant k \leqslant 2n-1)$ est une suite qui satisfait les conditions (3.8), donc $\langle \Gamma^{2n-2} e_1, e_1 \rangle$ est égal au nombre de ces suites. La quantité $\langle (\Gamma)^{2n-2}(e_1), e_1 \rangle$ peut se calculer en diagonalisant la matrice Γ. Le polynôme caractéristique se calcule par récurrence sur m, en développant $\mathrm{dét}(\lambda I_m - \Gamma) = P_m(\lambda)$ par rapport à la dernière colonne, ce qui donne la relation $P_m(\lambda) = \lambda P_{m-1}(\lambda) + P_{m-2}(\lambda)$. Cette relation de récurrence, avec les conditions initiales $P_1(\lambda) = \lambda$ et $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 1$ permet de calculer P_m en terme de polynômes de Tchebycheff de seconde espèce, on trouve ainsi

$$P_m(2\cos\theta) = \frac{\sin((m+1)\theta)}{\sin\theta} \qquad 0 < \theta < \pi.$$

En particulier les racines de P_m sont les nombres $(2\cos(\frac{k\pi}{m+1}); 1 \leqslant k \leqslant m)$. Les vecteurs propres se calculent également sans difficulté, un vecteur propre $(x_1, \dots, x_m)$ correspondant à la valeur propre λ satisfait $x_{l-1} + x_{l+1} = \lambda x_l$, et en résolvant cette équation pour $\lambda = 2\cos(\frac{k\pi}{m+1})$, on trouve

$$x_l = P_{l-1}(\lambda) x_1 = \frac{\sin(\frac{kl\pi}{m+1})}{\sin(\frac{k\pi}{m+1})} x_1.$$

Finalement, en notant $w_1, \ldots, w_m$ les vecteurs propres orthonormaux, on a

$$w_k = \Big(\frac{2}{\sqrt{m}} \sin \frac{k\pi}{m+1}, \frac{2}{\sqrt{m}} \sin \frac{2k\pi}{m+1}, \ldots, \frac{2}{\sqrt{m}} \sin \frac{mk\pi}{m+1}\Big)$$

et on arrive à

$$\begin{aligned}\langle \Gamma^{2n-2}(e_1), e_1\rangle &= \Big\langle \Gamma^{2n}\Big(\sum_{k=1}^{m} \langle e_1, w_k\rangle\Big), \sum_{k=1}^{m} \langle e_1, w_k\rangle \Big\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{m} \langle e_1, w_k\rangle^2 \lambda_k^{2n} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{4}{m} \sin^2 \frac{k\pi}{m+1}\Big(2\cos\frac{k\pi}{m+1}\Big)^{2n-2}.\end{aligned}$$

La probabilité à calculer vaut donc

$$P(T_1 = 2n; M_1 \leqslant m) = \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m} \sin^2 \frac{k\pi}{m+1}\Big(\cos\frac{k\pi}{m+1}\Big)^{2n-2}. \tag{3.10}$$

La loi conditionnelle de la déviation maximale, sachant que le temps de retour est égal à $2n$, a pour fonction de répartition

$$F_n(x) = P(M_1 \leqslant x \mid T_1 = 2n) = \frac{P(M_1 \leqslant x; T_1 = 2n)}{P(T_1 = 2n)}.$$

La fonction zêta, ou plus exactement la mesure de probabilités Ψ va apparaître lorsque nous allons faire tendre n vers l'infini. Plus précisément, nous allons calculer la loi conditionnelle de $M_1/\sqrt{\pi n}$ sachant que $T_1 = 2n$. En utilisant la première expression (3.9) il vient, à l'aide de la formule de Stirling,

$$\lim_{n\to\infty} P(M_1 \leqslant y\sqrt{\pi n} \mid T_1 = 2n) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(1 - 2\pi n^2 y^2)e^{-\pi n^2 y^2}$$

tandis que la seconde expression (3.10) nous donne

$$\lim_{n\to\infty} P(M_1 \leqslant y\sqrt{\pi n} \mid T_1 = 2n) = \frac{4\pi}{y^3}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\pi n^2/y^2}.$$

Nous avons ainsi établi, par cette méthode élémentaire, l'égalité de (3.5) et (3.6). Nous allons maintenant interpréter le passage à la limite à l'aide du mouvement brownien.

3.3. Le mouvement brownien. Tout d'abord rappelons un résultat classique de la théorie des probabilités. La loi de la variable aléatoire S_n est une loi binomiale, et le théorème de de Moivre-Laplace énonce que la loi de la variable aléatoire $S_n/\sqrt{n}$ converge vers la loi normale centrée réduite, de densité $e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. La convergence a lieu au sens de la topologie étroite sur l'espace des mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que pour tout intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ on a

$$P(S_n/\sqrt{n} \in [a,b]) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

De même on voit facilement que pour tout réel $t>0$, la loi de $S_{[nt]}/\sqrt{n}$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière, converge vers la loi normale de variance t, dont la densité est $e^{-x^2/2t}/\sqrt{2\pi t}$. Finalement grâce à l'indépendance des accroissements de $(S_n; n \geqslant 0)$ on voit que pour toute suite de temps $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, la famille de variables aléatoires $\left(\frac{S_{[nt_1]}}{\sqrt{n}}, \frac{S_{[nt_2]}-S_{[nt_1]}}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{S_{[nt_k]}-S_{[nt_{k-1}]}}{\sqrt{n}}\right)$ converge en loi vers une famille de variables normales, indépendantes, de lois normales de variances $t_1, t_2-t_1, \ldots, t_k-t_{k-1}$. On appelle mouvement brownien un processus stochastique, *i.e.*, une famille de variables aléatoires $(X_t; t \in \mathbb{R}_+)$, indexées par le temps t, telle que

– pour tout k et tout $k-$uplet de temps $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, les variables aléatoires $X_{t_1}-X_0, X_{t_2}-X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}-X_{t_{k-1}}$ sont indépendantes de loi normales, centrées,

– leurs variances sont $t_1, t_2-t_1, \ldots, t_k-t_{k-1}$.

Autrement dit, les lois marginales de rang fini de la famille $(X_t; t \in \mathbb{R}_+)$ sont déterminées par la formule

$$E[f(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\ldots,x_n)p_{t_1}(0,x_1)p_{t_2-t_1}(x_1,x_2) \cdots p_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n)dx_1\cdots dx_n \tag{3.11}$$

pour tous $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ et toute fonction borélienne bornée f sur $\mathbb{R}^n$, et où les quantités $p_t(x,y)$, appelées densités de transition, sont données par

$$p_t(x,y) = \frac{e^{-(x-y)^2/2t}}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.12}$$

Une propriété fondamentale du mouvement brownien, d'abord obtenue par Wiener, est que ses trajectoires sont presque sûrement continues. Si l'on considère l'espace des fonctions continues de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence uniforme et de la structure borélienne associée, alors la mesure de Wiener sur cet espace est une mesure de probabilités telle que, sous cette mesure, les applications coordonnées $X_t : C([0,\infty[,\mathbb{R}[) \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \omega(t)$ satisfont les conditions ci-dessus. On peut montrer que le processus stochastique continu $(S_t^{(n)}; t \geqslant 0)$ obtenu en interpolant linéairement le graphe de la marche aléatoire $(S_n; n \geqslant 0)$ et en renormalisant par $S_t^{(n)} = S_{[nt]}/\sqrt{n}$, converge en loi sur l'espace $C([0,\infty[,\mathbb{R})$ vers la mesure de Wiener. Ceci signifie que pour toute fonction continue Φ sur $C([0,\infty[,\mathbb{R})$, on a $E[\Phi(S^{(n)})] \xrightarrow[n\to\infty]{} E_{\mathcal{W}}[\Phi(\omega)]$, où $E_{\mathcal{W}}$ désigne l'espérance sous la mesure de Wiener. Il est important d'avoir cette information pour pouvoir calculer les lois de certaines fonctionnelles du mouvement brownien au moyen de l'approximation par les marches aléatoires. On notera que le fait que les variables X_i soient des variables de Bernoulli (*i.e.*, ne prennent que 2 valeurs) n'a pas une grande importance, le résultat d'approximation est encore vrai sous l'hypothèse que les X_i sont équidistribuées, d'espérance nulle, et de variance égal à 1. Ce résultat est connu sous le nom de principe d'invariance de Donsker. Une bonne introduction au mouvement brownien se trouve dans le livre de Karatzas et Shreve [**5**].

On peut visualiser la continuité des trajectoires, ainsi que l'approximation par les marches aléatoires au moyen d'une simulation informatique. Voici un programme simple en Scilab qui trace la trajectoire de $S^{(n)}$ pour $t \in [0,1]$, avec lequel le graphe ci-dessous a été tracé.

```
xbasc() ; plotframe([0 -2 1 2],[1,4,1,0]) ; A=[0,1] ;B=[0,0] ;
plot2d(A,B,1,'000') ;      // Définition du cadre et tracé de l'axe des x.
N=10000 ;         // C'est le nombre de pas.
rand('normal') ; X=0 ;Y=0 ;SX=0 ;SY=0 ;
for i=2 :N+1
        U=X ;X=X+1/N ; V=Y ;
    if rand(1)>0 then
        Y=Y+1/(sqrt(N)) ;
    else
        Y=Y-1/(sqrt(N)) ;
end       // Calcul des accroissements
SX=[U,X] ; SY=[V,Y] ; plot2d(SX,SY,1,'000') ;       // Affichage
end
```

En dehors du mouvement brownien nous aurons besoin de deux autres processus stochastiques très proches. Tout d'abord le processus de Bessel de dimension 3, qui est la norme euclidienne d'un mouvement brownien de dimension 3, autrement dit $R_t = \sqrt{(B_t^{(1)})^2 + (B_t^{(2)})^2 + (B_t^{(3)})^2}$ où $B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)}$ sont des mouvements brownien indépendants. La loi de ses marginales de rang fini est donnée, comme en (3.11), par

$$E[f(R_{t_1},\ldots,R_{t_n})] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\ldots,x_n) q_{t_1}(0,x_1) q_{t_2-t_1}(x_1,x_2) \cdots q_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n) dx_1 \cdots dx_n \tag{3.13}$$

avec

$$q_t(x,y) = \frac{y}{x}(p_t(x,y) - p_t(x,-y)) \equiv \frac{y}{x} p_t^0(x,y) \tag{3.14}$$

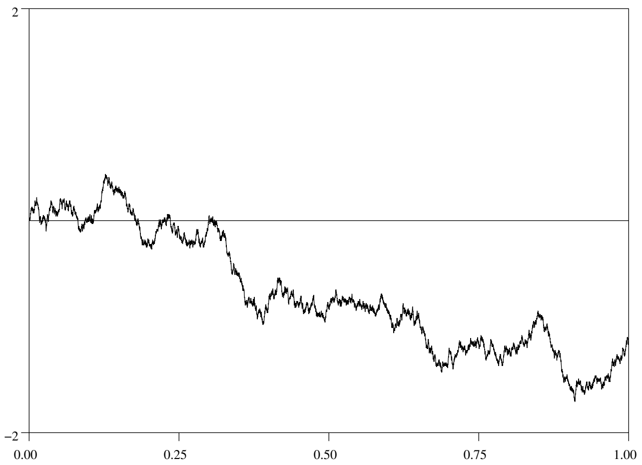

FIGURE 4

où p_t a été défini en (3.12). On peut montrer que, avec probabilité 1, on a $R_t \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$, et $R_t > 0$ pour tout $t > 0$. D'autre part à l'aide de la formule de Feynman-Kac on peut trouver la loi du premier instant où $R_t = x$. Si on pose $T_x = \inf\{t \mid R_t \geqslant x\}$ alors on a

$$E[e^{-\lambda T_x}] = \frac{x\sqrt{\lambda}}{\sinh x\sqrt{\lambda}} \tag{3.15}$$

Cette formule jouera un rôle important dans la suite.

Nous aurons besoin également du pont de Bessel de dimension trois, encore appelé excursion brownienne, qui s'obtient en conditionnant le processus de Bessel à atteindre 0 au temps T. Comme le processus de Bessel de dimension 3 ne revient jamais en zéro, il faut définir ce conditionnement par un événement de probabilité 0 avec soin, mais cela est possible et le pont de Bessel de dimension 3 est un processus stochastique $(e(t); t \in [0,T])$ indexé par un temps $t \in [0,T]$, dont la loi n_T est telle que

$$\begin{aligned} n_T[f(e(t_1),\dots,e(t_n))] = \int_{\mathbb{R}^n} & f(x_1,\dots,x_n) q_{t_1}(0,x_1) q_{t_2-t_1}(x_1,x_2) \\ & \cdots q_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n) 2(2\pi t^3)^{1/2} x_n^{-2} q_{T-t_n}(0,x_n)\, dx_1\cdots dx_n \end{aligned} \tag{3.16}$$

pour $0 < t_1 < \cdots < t_n < T$. Ce processus peut s'obtenir comme limite de la marche aléatoire $(S_n; n \geqslant 0)$, conditionnée à revenir en 0 au temps N. Plus précisément, on a convergence des lois marginales de dimension finie

$$E\Big[f\Big(\frac{|S_{[t_1 n]}|}{\sqrt{n}},\dots,\frac{|S_{[t_n n]}|}{\sqrt{n}}\Big)\Big|T_1=[Tn]\Big]\xrightarrow[n\to\infty]{} n_T[f(e_{t_1},\dots,e_{t_n})] \tag{3.17}$$

et on peut démontrer la convergence en loi du processus interpolé linéairement, sur l'espace des fonctions continues. De plus, avec probabilité 1, on a $e(0)=e(T)=0$, et $e(t)>0$ pour $0<t<T$. Nous voyons donc que la mesure de probabilités de densité Ψ donnée par (3.3) est la loi du maximum d'un pont de Bessel de dimension 3, multiplié par $\sqrt{2/\pi}$, *i.e.*, on a

$$n_1(\sqrt{2/\pi}\max\{e(t);0\leqslant t\leqslant 1\}\in dx)=\Psi(x)dx \qquad x>0 \tag{3.18}$$

Le mouvement brownien, le processus de Bessel et le pont possèdent une propriété d'invariance d'échelle cruciale. Pour tout $\lambda>0$, la transformation $\omega\mapsto\omega_\lambda$ où

$$\omega_\lambda(t)=\lambda^{-1/2}\omega(\lambda t) \tag{3.19}$$

laisse invariantes les lois du mouvement brownien et du processus de Bessel, et transforme la loi n_T en la loi $n_{T/\lambda}$.

3.4. L'équation fonctionnelle de la fonction zêta et la mesure d'Itô

Dans cette section nous allons interpréter l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann comme l'égalité en loi de deux variables aléatoires. Pour cela nous allons introduire la mesure d'Itô des excursions browniennes. On considère l'espace des fonctions continues $\omega:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, telles que $\omega(0)=0$, et il existe $T(\omega)>0$ tel que $\omega(t)>0$ pour $0<t<T(\omega)$, et $\omega(t)=0$ pour $t\geqslant T(\omega)$. La loi du processus obtenu en interpolant linéairement le processus $|S_n|;0\leqslant n\leqslant T_1$ entre les temps entiers, et en prolongeant par zéro après le temps T_1, est une mesure de probabilités sur cet espace. La mesure d'Itô est la limite, quand $\lambda\to\infty$ des mesures λP^λ où P^λ désigne la loi du processus changé d'échelle $\lambda^{-1/2}|S_{t\lambda}|1_{t\leqslant T_1/\lambda}$. Cette mesure, notée n_+, est de masse totale infinie, mais peut être décrite par ses lois marginales de rang fini

$$\begin{aligned} n_+(f(\omega(t_1),\dots,\omega(t_n)) \\ =\int_{\mathbb{R}_+^n}2x_1\frac{x_1e^{-x_1^2/2t}}{\sqrt{2\pi t^3}}p^0_{t_2-t_1}(x_1,x_2)\cdots p^0_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n)dx_1\cdots dx_n,\end{aligned} \tag{3.20}$$

p^0 étant définie en (3.14). On peut également décrire cette mesure à l'aide des lois n_T définies en (3.16), par la formule

$$n_+=\int_0^\infty n_T\frac{2dT}{\sqrt{2\pi T^3}} \tag{3.21}$$

qui suit du théorème limite (3.17) et de (3.7), par application de la formule de Stirling

$$P(T_1 = 2n) = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi n^3}}.$$

La formule (3.21) signifie que la loi du temps de retour en 0 sous n_+ est $2dT/\sqrt{2\pi T^3}$, et conditionnellement à ce temps de retour, le processus est un pont de Bessel de dimension 3.

La mesure d'Itô est fondamentale pour comprendre le comportement du mouvement brownien en dehors des temps où il s'annule. On montre que l'ensemble des zéros du mouvement brownien, c'est-à-dire l'ensemble $Z_\omega = \{t \in [0, \infty[\mid \omega(t) = 0\}$, qui est fermé par continuité des trajectoires, est presque sûrement un ensemble parfait (sans point isolé), de mesure de Lebesgue nulle. En particulier, il est non dénombrable, et on ne peut pas définir une suite croissante de temps qui l'épuise contrairement au cas de la marche aléatoire, pour laquelle les temps $T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$ forment une suite discrète. Néanmoins le complémentaire de cet ensemble étant ouvert, il a une infinité dénombrable de composantes connexes, et les excursions du mouvement brownien sont par définition les morceaux de trajectoire correspondant à ces composantes connexes. Suivant P. Lévy, on peut introduire le temps local du mouvement brownien B par

$$L_t = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{|B_s| \leqslant \varepsilon} ds$$

ainsi que la fonction inverse $T_s = \inf\{t \mid L_t \geqslant s\}$, qui est l'analogue continu de la suite $T_0, T_1, \ldots$ définie pour la marche aléatoire. Pour tout temps s on a $B_{T_s} = 0$ presque sûrement, et les excursions du mouvement brownien qui ont lieu dans l'intervalle $[0, T_s]$ forment un processus de Poisson ponctuel, d'intensité n_+. Cela signifie que pour toute famille de parties boréliennes disjointes $A_1, \ldots, A_k$ de l'ensemble des fonctions continues, si on note $N(A_j)$ le nombre d'excursions du mouvement brownien dans l'intervalle $[0, T_s]$ qui sont dans l'ensemble A_j, alors les variables aléatoires $N(A_j)$ sont indépendantes, chacune ayant la loi de Poisson de paramètre $n^+(A_j)$.

Retournons maintenant à notre but initial qui était d'expliquer l'équation fonctionnelle de zêta en termes probabilistes. La description suivante de la mesure d'Itô est due à David Williams. On considère deux processus de Bessel de dimension 3 (*cf.* (3.13)), indépendants, $(R_t^1; t > 0)$ et $(R_t^2; t > 0)$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on note T_x^1 et T_x^2 les temps d'atteinte de x par R^1 et R^2 respectivement, et on considère la loi du processus défini par

$$e(t) = \begin{cases} R_t^1 & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant T_x^1 \\ R^2_{T_x^1+T_x^2-t} & \text{pour } T_x^1 \leqslant t \leqslant T_x^1 + T_x^2 \\ 0 & \text{pour } t \geqslant T^1 + T^2 \end{cases}$$

On appelle n^x la loi de ce processus, qui est donc obtenu en recollant « dos à dos » deux copies du processus de Bessel, arrêté à son premier instant de passage en x. La décomposition de Williams de la mesure d'Itô s'énonce

$$n_+ = \int_0^\infty n^x \frac{2dx}{x^2} \tag{3.22}$$

Autrement dit, sous la mesure d'Itô, la loi du maximum de l'excursion est $2dx/x^2$ et conditionnellement à ce maximum $M = x$, la loi de e est n^x. En particulier, conditionnellement à la valeur du maximum, la loi du temps de retour en 0 est celle de la somme de deux temps d'atteinte de x par des processus de Bessel de dimension 3, indépendants. Considérons maintenant la loi du couple (M, V) sous la mesure n_+, où M désigne le maximum de l'excursion et V est le temps de retour en 0, *i.e.*, $V = \inf\{t > 0 \mid \omega(t) = 0\}$. Conformément à la description d'Itô (3.21), et en utilisant l'invariance par changement d'échelle (3.19), nous pouvons écrire

$$(M, V) \overset{\text{(loi)}}{=} (\sqrt{V} m, V)$$

où m désigne le maximum d'un pont de Bessel, suivant la loi n_1, indépendante de V. De même, la décomposition de Williams donne

$$(M, V) \overset{\text{(loi)}}{=} (M, M^2(T^1 + T^2))$$

où T^1 et T^2 sont les temps d'atteinte de 1 par deux processus de Bessel de dimension 3 indépendants de M. La relation

$$(\sqrt{V} m, V) \overset{\text{(loi)}}{=} (M, M^2(T^1 + T^2))$$

entraîne une relation entre les lois des variables aléatoires m et T^1+T^2, mais il faut être vigilant car la conclusion hâtive, que m a même loi que $(T^1+T^2)^{-1/2}$ (obtenue en considérant la loi de $M/\sqrt{V}$), est fausse ! En effet, la loi de (M, V) est une mesure de masse totale infinie et son image par l'application $(M, V) \mapsto M/\sqrt{V}$ est une mesure dégénérée, qui vaut $+\infty$ sur tout ensemble de mesure de Lebesgue > 0. La véritable relation entre les lois de m et de $T^1 + T^2$ est la suivante, pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ on a

$$n_1[f(m^2)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} E\big[f(1/(T^1 + T^2))\sqrt{T^1 + T^2}\big]. \tag{3.23}$$

Pour vérifier cette égalité on écrit la suite d'égalités suivante, pour une fonction positive g, en appliquant successivement les identités (3.21) et (3.22), et les propriétés de changement d'échelle (3.19)

$$\begin{aligned}
n^+(f(M^2/V)g(V)) &= \int_0^\infty n_v(f(M^2/v)g(v))\frac{2dv}{\sqrt{2\pi v^3}} \\
&= n_1(f(m^2))\int_0^\infty g(v)\frac{2dv}{\sqrt{2\pi v^3}} \\
&= \int_0^\infty n^x(f(x^2/(T^1_x+T^2_x))g(T^1_x+T^2_x))\frac{2dx}{x^2} \\
&= E\Big[f(1/(T^1+T^2))\int_0^\infty (g(x^2(T^1+T^2))\frac{2dx}{x^2}\Big] \\
&= E\big[f(1/(T^1_x+T^2_x))\sqrt{T^1+T^2}\big]\int_0^\infty g(v)\frac{dv}{v^{3/2}}
\end{aligned}$$

L'égalité entre les lignes 2 et 5 donne le résultat.

On peut encore écrire la relation (3.23) en terme des densités des lois de m et de $\sqrt{T^1+T^2}$. Si nous appelons respectivement Ψ_1 et Ψ_2 ces densités, alors on a la relation

$$\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}x^{-3}\Psi_2(x^{-1}) \tag{3.24}$$

Dans la discussion ci-dessus nous n'avons pas utilisé la connaissance explicite des lois de m et T^1+T^2, par conséquent on peut considérer la relation (3.24) comme une conséquence de la propriété de changement d'échelle du mouvement brownien et de la mesure d'Itô. Si nous nous rappelons maintenant que la loi de $\sqrt{2/\pi}m$ a été calculée précédemment (3.18), et que sa densité vaut Ψ, qui satisfait (3.4), alors nous observons l'identité curieuse suivante

$$m^2 \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{\pi}{2}(T^1+T^2). \tag{3.25}$$

Les deux identités (3.24) et (3.25) sont donc équivalentes, au vu de (3.18), à l'équation fonctionnelle (3.4). Finalement puisque (3.24) est une conséquence immédiate de l'invariance d'échelle du mouvement brownien, nous voyons que c'est l'identité (3.25) qui peut être considérée comme la traduction probabiliste de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann. Je ne connais pas de démonstration directe de cette identité, qui ne passe pas par un calcul explicite des lois en question. Il serait très intéressant d'avoir une démonstration purement combinatoire de cette identité, au moyen de manipulation sur les trajectoires du mouvement brownien.

3.5. Une approximation de la fonction zêta. Nous allons terminer ce petit voyage au pays des probabilités par une application inattendue des idées développées jusqu'ici, en obtenant, par des considérations probabilistes simples, une renormalisation de la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^s$ qui a le bon goût de converger dans tout le plan complexe vers la fonction entière $(2^{1-s}-1)\zeta(s)$. Plus exactement nous allons déterminer des coefficients $(a_{n,N}; 0 \leqslant n \leqslant N)$ tels que, pour tout n on a $a_{n,N} \xrightarrow[N\to\infty]{} (-1)^n$, et les sommes partielles $\sum_{n=1}^{N} a_{n,N}/n^s$ convergent, uniformément sur tout compact de $s \in \mathbb{C}$, vers la fonction entière $(2^{1-s}-1)\zeta(s)$. Rappelons que cette fonction entière est la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^s$, convergente sur $\Re(s) > 1$. Le choix des coefficients $a_{n,N}$ nous permet de fixer arbitrairement la valeur de la série $\sum_{n=1}^{N} a_{n,N}/n^s$ en N valeurs de s. Il est naturel de choisir pour ces N valeurs, d'une part $s=0$, d'autre part $s=-2,-4,\dots,-2(N-1)$, où la fonction zêta s'annule. Il n'est pas difficile de voir que cela entraîne que

$$a_{n,N} = (-1)^n \frac{(N!)^2}{(N-n)!(N+n)!},$$

et l'on a bien

$$a_{n,N} \xrightarrow[N\to\infty]{} (-1)^n.$$

Nous allons maintenant relier cette renormalisation de la série $\sum_{n=1}^{N}(-1)^n n^{-s}$ aux considérations qui précèdent. Tout d'abord, la non-convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ pour $\Re(s) < 1$ se traduit, sur la fonction Ψ, par le fait que la série (3.3) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$, en effet il est facile de voir que

$$\min_{y\in[0,\varepsilon]} 4y \sum_{n=1}^{N} \left(2\pi^2 n^4 y^2 - 3\pi n^2\right) e^{-\pi n^2 y^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} -\infty$$

pour tout $\varepsilon > 0$ (mais la convergence est uniforme ailleurs). En particulier, les sommes partielles ne sont pas positives. Nous allons donc chercher une approximation probabiliste de la fonction Ψ en approchant une variable aléatoire de loi de densité Ψ par des variables aléatoires plus simples. Pour cela rappelons la transformée de Laplace, déduite de (3.15) et (3.25), ou qui peut se calculer directement en intégrant terme à terme (3.3),

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y^2}\Psi(y)dy = \Big(\frac{\sqrt{\pi\lambda}}{\sinh\sqrt{\pi\lambda}}\Big)^2$$

La formule d'Euler

$$\frac{\pi x}{\sinh \pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + \frac{x^2}{n^2}\big)^{-1}$$

et la formule élémentaire

$$E[e^{-\kappa E}] = \int_0^\infty e^{-t} e^{-\kappa t} dt = (1+\kappa)^{-1}$$

qui donne la transformée de Laplace d'une variable aléatoire E, de loi exponentielle $P[E > t = e^{-t}]$ pour $t \geqslant 0$, montrent que l'on a l'égalité en loi

$$X^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n + E'_n}{n^2}$$

où X est une variable aléatoire ayant pour densité Ψ et les E_n et E'_n sont des variables aléatoires indépendantes, de loi exponentielle. Il est alors naturel d'essayer d'approcher la variable X^2 par les sommes partielles $\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n + E'_n}{n^2}$. Cela mène à une approximation de la fonction $(1-s)\zeta(s)$ qui converge dans tout le plan complexe, toutefois les calculs sont plus compliqué que dans le cas simple que nous allons considérer, qui est celui de la variable aléatoire

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} E_n/n^2$$

qui vérifie

$$E[Y^s] = s(1-2^{1-s})\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

et que l'on peut approcher par les sommes partielles $\sum_{n=1}^{N} E_n/n^2$. En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $\prod_{n=1}^{N}(1 + x^2/n^2)^{-1}$ on obtient la formule

$$E\Big[\Big(\sum_{n=1}^{N} E_n/n^2\Big)^{s/2}\Big] = -s\Gamma(s/2) \sum_{n=1}^{N} a_{n,N} n^{-s}$$

Il est alors facile d'en déduire, en utilisant les inégalités de Hölder, que

$$\sum_{n=1}^{N} a_{n,N} n^{-s} \longrightarrow (2^{1-s} - 1)\zeta(s)$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Références

[1] P. Biane, J. Pitman & M. Yor – « Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **38** (2001), no. 4, p. 435–465.

[2] E. Brézin & S. Hikami – « Characteristic polynomials of random matrices », *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), no. 1, p. 111–135.

[3] N.G. De Bruijn, D.E. Knuth & S.O. Rice – « The average height of planted plane trees », in *Graph Theory and Computing* (R.C. Read, éd.), Academic Press, 1972, p. 15–22.

[4] P. Deift – *Orthogonal Polynomials and Random Matrices : A Riemann-Hilbert Approach*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 3, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1999.

[5] I. KARATZAS & S.E. SHREVE – *Brownian motion and stochastic calculus*, 2ème éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 113, Springer-Verlag, New York, 1991.

[6] J.P. KEATING & N.C. SNAITH – « Random matrix theory and $\zeta(1/2+it)$ », *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), no. 1, p. 57–89.

[7] M.L. MEHTA – *Random Matrices*, 2ème éd., Academic Press, Boston, 1991.

[8] P. MICHEL – « Répartition des zéros des fonctions L et matrices aléatoires », in *Séminaire Bourbaki*, Astérisque, vol. 282, Société Mathématique de France, 2002, p. 211–248.

[9] H.L. MONTGOMERY – « The pair correlation of zeros of the zeta function », Proc. of Symposia in Pure Math., vol. 24, American Mathematical Society, 1973, p. 181–193.

[10] A. ODLYZKO – « On the distribution of spacings between zeros of the zeta function », *Math. Comp.* **48** (1987), p. 273–308, voir aussi `http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/`.

[11] L. S. P. DIACONIS – « Honest Bernoulli excursions », *J. Appl. Probab.* **25** (1988), no. 3, p. 464–477.

[12] G. PÓLYA – « Elementarer Beweis einer Thetaformel », *Sitzungsberichten der Preuß. Akademie des Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse* (1927), p. 157–161, Reprinted in Pólya, George, Collected papers, Vol. 1 : Singularities of analytic functions, Edited by R.P. Boas, Mathematicians of Our Time, Vol. 7, The MIT Press, Cambridge, Mass.-London, 1974.

[13] G. SZEGÖ – *Orthogonal polynomials*, 4ème éd., Colloquium Publications, vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

[14] D. WILLIAMS – « Brownian motion and the Riemann zeta-function », in *Disorder in physical systems*, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1990, p. 361–372.

PH. BIANE, CNRS, Département de Mathématiques et Applications, École Normale Supérieure, 45, rue d'Ulm 75005 Paris, France • *E-mail :* `Philippe.Biane@ens.fr`