TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Laurent Schwartz est décédé le 4 juillet 2002. Il est le fondateur du Centre de mathématiques de l'École polytechnique. Il y avait institué les journées X-UPS de mathématiques dans les années 1970. Pour honorer sa mémoire, les journées 2003 ont été consacrées à certains aspect de la théorie des distributions et le présent volume lui est dédié.

La notion de distribution, qui a valu la médaille Fields à Laurent Schwartz en 1950, est une extension de la notion de fonction de plusieurs variables réelles qui a joué un rôle très important en mathématiques, unifiant une multitude de concepts développés au début du 20ème siècle.

Les distributions sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ peuvent être dérivées et multipliées par des fonctions C^∞. La transformation de Fourier $u(x) \mapsto \widehat{u}(\xi)$ se prolonge continûment à l'espace des distributions *tempérées* sur $\mathbb{R}^n$, elle échange dérivations partielles et multiplication par des monômes, et la formule d'inversion reste valable. De cette façon, un opérateur différentiel à coefficients constants $P(\partial_x)$ se trouve transformé en l'opérateur de multiplication par le polynôme $P(\xi)$ et la résolution de l'équation $P(\partial_x)u = v$ se ramène au problème de la division de la distribution $\widehat{v}(\xi)$ par le polynôme $P(\xi)$.

Le problème de la division des distributions par un polynome est étudié dans les exposés de Bernard Malgrange et Claude Sabbah.

B. Malgrange montre que l'un des points importants est de donner un critère de divisibilité d'une fonction C^∞ par un polynôme, et de montrer que cette opération de division est continue lorsque l'espace des fonctions C^∞ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de la fonction et de ses dérivées.

Nous avons cru utile de reproduire intégralement[(1)] un article de Laurent Schwartz paru en 1955 dans la revue *Summa Brasiliensis Mathematicae* (éditée par l'Instituto de Matematica Pura et Applicada au Brésil), vol. 2, fasc. 9, 1955, p. 181–209. L. Schwartz y traite de la division d'une

(1) Nous remercions la direction de l'IMPA, ainsi que Mmes Schwartz et Robert, de nous avoir autorisés à reproduire ce texte.

fonction C^∞ de $2n$ variables réelles x_j, y_j par une fonction *holomorphe* des n variables complexes $x_j + iy_j$. Bien que le résultat soit maintenant un cas particulier du théorème général de Lars Hörmander et Stanisław Łojasiewicz présenté par B. Malgrange, il n'en présente pas toutes les difficultés techniques, et de ce fait l'article de L. Schwartz donne une approche très précise de l'enchaînement des idées qui interviennent dans le problème de la division.

Ce texte nous montre aussi la clarté de la rédaction de L. Schwartz, ainsi que quelques principes pédagogiques qu'il aimait à employer, par exemple la répétition de la même idée sous différents éclairages.

On trouvera aussi, à la suite de de l'article de B. Malgrange, une évocation par celui-ci[(2)] de Stanisław Łojasiewicz, disparu à l'automne 2002.

C. Sabbah expose une autre méthode de division d'une distribution v par un polynôme, fondée sur la transformation de Mellin. Cette approche, qui remonte au moins aux années 1950, a été développée par Israel M. Gelfand dans sa théorie des « fonctions généralisées ». La solution du problème correspondant, finalement très simple, a été donnée par Joseph N. Bernstein au début des années 1970. C'est elle qui est présentée dans le texte de C. Sabbah.

La notion de *front d'onde* a été introduite en 1969–1970 indépendamment par Mikio Sato et Lars Hörmander pour l'étude des équations aux dérivées partielles. En particulier, l'existence d'équations aux dérivées partielles satisfaites par une distribution impose des conditions à son front d'onde (L. Hörmander, 1970). Certaines opérations, élémentaires pour les fonctions, comme le produit ou la restriction à une hypersurface, n'ont plus de sens pour les distributions en général. Jean-Michel Bony définit le front d'onde et montre que cette notion permet de comprendre dans quel cas ces opérations gardent un sens.

Nous tenons à remercier la direction de l'École polytechnique, et tout particulièrement la Direction des Études, pour l'aide matérielle importante qu'elles ont apportée à la préparation des journées X-UPS. Nous remercions les Éditions de l'École polytechnique qui ont bien voulu accueillir la série *Journées mathématiques X-UPS* au sein de leurs collections.

Nous remercions aussi les secrétaires du Centre de mathématiques, notamment Claudine Harmide et Michèle Lavallette, pour leur contribution à l'organisation de ces journées.

Nicole Berline et Claude Sabbah

---

(2) Nous remercions la Société mathématique de France de nous autoriser à publier ce texte, paru dans le numéro 96 de la *Gazette des mathématiciens*.