IDÉAUX DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES ET DIVISION DES DISTRIBUTIONS

par

Bernard Malgrange

PARTIE I
IDÉAUX DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

1. Le cas d'une variable

Soit U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$; pour $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^p(U)$ l'espace des fonctions continues sur U, à valeurs complexes, qui admettent sur I des dérivées continues jusqu'à l'ordre p. Quelquefois, on considérera aussi un intervalle fermé à gauche, $U = [a, b[$; on prend alors la même définition, avec, en a, « dérivée à droite » au lieu de dérivée ; de même pour un intervalle fermé à droite $]a, b]$.

Dans les mêmes conditions, on note $\mathcal{C}^\infty(U)$ l'espace des f qui appartiennent à $\mathcal{C}^p(U)$ pour tout p.

On s'intéresse à des problèmes du type suivant : soit U un intervalle ouvert, et soit $P \in \mathcal{C}^\infty(U)$; à quelle condition $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ peut-il s'écrire $f = Pg$, $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Le cas le plus simple est celui où $P = x$; si $0 \notin U$, la réponse est immédiate : n'importe quel f convient. Sinon, on a la proposition suivante.

Proposition 1.1. *Supposons $0 \in U$. Pour que $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ s'écrive $f = xg$, $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$, il faut et il suffit qu'on ait $f(0) = 0$.*

La condition est évidemment nécessaire. La suffisance est moins immédiate ; je vais en donner deux démonstrations.

La première, très rapide, s'obtient par l'astuce suivante : soit $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, avec $f(0)=0$.

Posons, pour $t \in [0,1]$, $x \in U$, $h(t,x) = f(tx)$. On a évidemment

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(t,x)dt = x \int_0^1 f'(tx)dt.$$

Alors, un argument classique de dérivation sous le signe somme montre que la fonction $g(x) = \int_0^1 f'(tx)dt$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(U)$; d'où le résultat.

[Incidemment, le même argument montre ceci : si $f \in \mathcal{C}^k(U)$, $k \geqslant 1$, avec $f(0)=0$, alors $f = xg$, avec $g \in \mathcal{C}^{k-1}(U)$.]

La seconde démonstration est plus longue ; mais elle est de portée beaucoup plus générale, comme nous le verrons dans la suite.

Elle repose sur le théorème de Borel que je vais expliquer maintenant. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, avec $0 \in U$; à une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, on associe sa *série de Taylor* en 0, que je noterai $\widehat{f}$; c'est l'unique série formelle $\sum_0^\infty a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, qui possède la propriété suivante :

$$\text{(1.2)} \qquad \text{Quelque soit } k \geqslant 1, \text{ on a } \quad f(x) - \sum_0^k a_\ell x^\ell = O(x^{k+1})$$

[*i.e.* au voisinage de 0, avec $A > 0$ convenable, on a

$$\Big| f(x) - \sum_0^k a_\ell x^\ell \Big| \leqslant A|x|^{k+1} \text{].}$$

Il est facile de voir, en utilisant la formule de Taylor avec reste, que la série obtenue avec $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$ répond à la question. L'unicité est immédiate.

On peut se demander quelles sont les séries formelles que l'on obtient ainsi ; la réponse est donnée par le théorème suivant :

***Théorème 1.3* (Borel).** *Étant donné n'importe quelle série formelle*

$$g = \sum a_k x^k,$$

il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ avec $\widehat{f} = g$.

Admettons pour un instant ce théorème, et montrons comment on en déduit la proposition (1.1). Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, avec $f(0) = 0$, et soit $\widehat{f} = \sum_1^\infty a_k x^k$ sa série de Taylor en 0. D'après le théorème de Borel, il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$, avec $\widehat{g} = \widehat{f}/x$; on a donc $f = xg + h$; la série de Taylor $\widehat{h}$ de h est identiquement nulle ; on dit aussi que h est *plate* en 0. Alors la proposition (1.1) résulte du lemme suivant.

***Lemme 1.4*.** *Soit $h \in \mathcal{C}^\infty(U)$, plate en 0 ; la fonction égale à h/x hors de 0 et nulle en 0 appartient à C^∞ et est plate en 0.*

Soit g la fonction définie sur $U \setminus \{0\}$, et égale à h/x ; par récurrence sur k, vérifie ceci : la dérivée $g^{(k)}$ s'écrit $P_k(h, h', \dots, h^{(k)})/x^{k+1}$, P_k un polynôme. On en déduit immédiatement que $g^{(k)}(x)$ tends vers 0 lorsque x tend vers 0. Le lemme résulte alors par récurrence sur k du lemme élémentaire suivant, souvent appelé « lemme d'Hestenes ».

Lemme 1.5. *Soit f de classe C^1 sur $]0, a[$; on suppose que f' a une limite en 0 ; alors f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, a[$.*

Soit g la fonction continue sur $[0, a[$, égale à f' pour $x \neq 0$, et soit $b \in \,]0, a[$. La fonction $f(b) + \int_b^x g(t)dt$ est de classe C^1 sur $[0, a[$ (théorie élémentaire de l'intégration) ; elle donne le prolongement cherché.

Avant de démontrer le théorème de Borel, voici une autre application :

Proposition 1.6. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, avec f paire, i.e. $f(-x) = f(x)$. Il existe $g \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[)$ vérifiant $f(x) = g(x^2)$.*

Ici encore, le théorème de Borel permet de se ramener au cas où f est plate en 0 [si $f = \sum a_{2n}x^{2n}$, prendre g_1 tel que $\widehat{g}_1 = \sum a_{2n}x^n$ et considérer $f - g(x^2)$].

Il suffit alors de montrer que la fonction $f(\sqrt{x})$, $x \geqslant 0$, prolongée en 0 par 0, est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$, et plate en 0 ; ceci se fait comme au lemme (1.4).

2. Le théorème de Borel

Sa démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, à valeurs réelles, qui possède les propriétés suivantes : $\alpha(x) \geqslant 0$ partout, $\alpha(x) = 1$ pour $|x| \leqslant 1/2$, $\alpha(x) = 0$ pour $|x| \geqslant 1$.*

On peut par exemple obtenir α par le procédé suivant : soit f la fonction égale à 0 sur $|x| \geqslant 1$, et à $\exp(\frac{1}{x^2-1})$ pour $|x| < 1$. En utilisant par récurrence le lemme (1.5), on vérifie que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Soit alors g la primitive de f égale à 0 pour $x \leqslant -1$; elle est strictement positive pour $x > -1$, et constante, disons égale à $\lambda > 0$ pour $x \geqslant 1$. Alors la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{\lambda}g(4x + 3)$ est $\geqslant 0$, et vaut 0 pour $x \leqslant -1$ et 1 pour $x \geqslant -1/2$. Il suffit de prendre $\alpha(x) = h(x)h(-x)$.

Soit maintenant I l'intervalle $[-1, 1]$; pour $f \in \mathcal{C}^m(I)$, posons $\|f\|_m = \sup_{|x| \leqslant 1}(|f(x)|, |f'(x)|, \dots, |f^{(m)}(x)|)$. On vérifie facilement que $\mathcal{C}^\infty(I)$, muni de la distance $d(f, g) = \|f - g\|_m$ est un espace métrique complet.

Lemme 2.2. *Pour $\varepsilon > 0$, posons $\alpha_\varepsilon(x) = \alpha(x/\varepsilon)$. Alors, lorsque $\varepsilon \to 0$, $\|\alpha_\varepsilon x^{m+1}\|_m \to 0$.*

Ceci se vérifie facilement avec la formule de Leibniz (utiliser les faits suivants : α_ε est nul pour $|x| \geqslant \varepsilon$; d'autre part, pour $0 \leqslant k \leqslant m$, il existe $C_k > 0$ tel qu'on ait $|\alpha_\varepsilon^{(k)}(x)| \leqslant C_k/\varepsilon^k$).

Soit alors $\widehat{f} = \sum a_k x^k$ une série formelle ($k \geqslant 0$, $a_k \in \mathbb{C}$). Pour $k \geqslant 1$, on choisit ε_k pour qu'on ait $\|a_k x^k \alpha_{\varepsilon_k}\|_{k-1} \leqslant 1/2^k$.

La série $a_0 + \sum_{k \geqslant 1} a_k x^k \alpha_{\varepsilon_k}$ est convergente dans $\mathcal{C}^m(I)$ pour tout m ; donc elle définit une fonction f qui appartient à $\mathcal{C}^m(I)$ pour tout m, et donc à $\mathcal{C}^\infty(I)$. On vérifie d'autre part que sa série de Taylor en 0 est égale à $\widehat{f}$ (utiliser le fait que les α_k sont égaux à 1 au voisinage de 0).

On a donc obtenu ainsi une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ qui admet la série de Taylor $\widehat{f}$ en 0 ; et remplaçant f par αf (ou $\alpha_\varepsilon f$, $\varepsilon < 1$), on aura une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ possédant la même propriété.

Pour terminer ce paragraphe, voici un exemple explicite (et d'ailleurs classique) de fonction C^∞ ayant une série de Taylor divergente en 0. On considère l'équation différentielle $x^2 y' - y = -x$; cette équation admet la solution formelle $\widehat{y} = \sum n!\, x^{n+1}$. On peut voir ceci

(i) Toutes les solutions sur $]0, +\infty[$ de cette équation se prolongent en des fonctions $\mathcal{C}^\infty([0, +\infty[)$, admettant $\widehat{y}$ comme série de Taylor en 0 (N.B. ces solutions s'écrivent $\exp(-1/x) \int_1^x t \exp(1/t) dt + c \exp(-1/x)$).

(ii) Sur $]-\infty, 0[$, une seule solution se prolonge en fonction C^∞ sur $]-\infty, 0]$, avec $\widehat{y}$ comme série de Taylor, à savoir la solution $\exp(-1/x) \int_0^x t \exp(1/t) dt$ [une méthode possible est la suivante : en faisant le changement de variable $u = 1/x$, $v = 1/t$, et en faisant des intégrations par parties répétées, on voit d'abord que les solutions considérées ont en 0 le développement asymptotique cherché ; on peut ensuite en déduire le même résultat pour les dérivées en utilisant l'équation différentielle, et on conclut par (1.5) ; je n'entre pas dans les détails].

3. Généralisations

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$; pour $p \geqslant 0$, on désigne par $\mathcal{C}^p(U)$ l'espace des fonctions continues sur U à valeurs complexes, qui admettent des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre p. On désigne par $\mathcal{C}^\infty(U)$ l'espace des fonctions qui appartiennent à $\mathcal{C}^p(U)$ pour tout $p \geqslant 0$.

On sait que, dans $\mathcal{C}^p(U)$ [*resp.* $\mathcal{C}^\infty(U)$], une dérivée d'ordre $k \leqslant p$ (*resp.* d'ordre quelconque) est indépendante de l'ordre des dérivations choisies. On pose $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, et on note $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \alpha_n^{\alpha_n}$ une telle dérivation, avec $\partial_i = \partial/\partial x_i$.

La proposition (1.1) admet la généralisation suivante

Théorème 3.1

Dans $\mathbb{R}^{m+n}$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$, soit U un ouvert ; soit $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, avec $f(0, \dots, 0; y_1, \dots, y_n) = 0$. Alors il existe $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tels qu'on ait $f = \sum x_i g_i$.

Localement, au voisinage d'un point où $x_1 = \dots = x_n = 0$, le théorème peut se démontrer par exemple par la première méthode indiquée en (1.1). Ceci sera suffisant pour les applications que j'ai en vue. On passe de là au cas général par un argument de « partition de l'unité » pour lequel je renvoie à la littérature, par exemple à [**S**] (voir aussi la deuxième partie de l'exposé).

On peut aussi utiliser la généralisation à plusieurs variables du théorème de Borel ; pour l'énoncer, étant donné un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, de coordonnées $y_1, \dots, y_n$ désignons par $\mathcal{C}^\infty(U)[\![x_1, \dots, x_m]\!]$ l'espace des séries formelles $\sum a_\alpha x^\alpha$ avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$, $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Théorème 3.2

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^{m+n}$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ et soit $U \subset \mathbb{R}^n$ l'intersection de V avec $x_1 = \dots = x_m = 0$. Étant donné $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(U)[\![x_1, \dots, x_m]\!]$, il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ admettant $\widehat{f}$ comme « série de Taylor partielle en x ».

La dernière expression veut dire ceci : si $\widehat{f} = \sum a_\alpha x^\alpha$, alors

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0, \dots, 0, y_1, \dots, y_n), \quad \text{avec } \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!.$$

Ici encore, on peut démontrer, le résultat au voisinage de chaque point de U par une généralisation des méthodes utilisées au n$^{\text{o}}$ 2 ; on « globalise » par une partition de l'unité.

En pratique, l'application de ces résultats se fera souvent en les combinant avec le théorème des fonctions implicites, dont je rappelle l'énoncé.

Théorème 3.3

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{m+n}$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ avec $0 \in U$; soient $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(U)$, à valeurs réelles. On suppose qu'on a $f_1(0) = \dots = f_n(0) = 0$, et $\text{dét}(\partial f_i/\partial y_j(0)) \neq 0$. Alors il existe

(i) *un ouvert $V \subset \mathbb{R}^m$ avec $0 \in V$, et un ouvert $W \subset R^n$, avec $0 \in W$, et $V \times W \subset U$,*

(ii) *des fonctions $\varphi_i \in \mathcal{C}^\infty(V)$, à valeurs réelles dans W, $1 \leqslant i \leqslant n$,* *tels que la propriété suivante soit vérifiée :*

Dans $V \times W$, les équations $f_1 = \cdots = f_n = 0$ sont équivalentes aux équations $y_i = \varphi_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
(*En particulier, on a $\varphi_i(0) = 0$.*)

Pour abréger, je dirai dans la suite que, « au voisinage de 0, les équations $\{f_i = 0\}$ sont équivalentes aux équations $\{y_i = \varphi_i(x)\}$ ».

L'énoncé peut être précisé en utilisant (3.1) et le changement de variables $\overline{x}_i = x_i$, $\overline{y}_j = y_j - \varphi_j(x)$. En écrivant que f_i s'annule sur

$$\{y_j = \varphi_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

on trouve qu'il existe au voisinage de 0 des fonctions h_{ij}, C^∞ à valeurs réelles, telles qu'on ait

$$f_i = \sum_j (y_j - \varphi_j) h_{ij}$$

Comme $\varphi_j(0) = 0$, on aura $\partial f_i / \partial y_j(0,0) = h_{ij}(0)$; donc la condition $\text{dét}(\partial f_i / \partial y_j(0)) \neq 0$ s'écrit ici $\text{dét}(h_{ij}(0)) \neq 0$.

Il faut remarquer que la combinaison des résultats précédents donne même des résultats pour des points singuliers. Voici un exemple :

Soit f de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2$ au voisinage de 0, à valeurs réelles. Soit $\widehat{f} = \sum f_k$ sa série de Taylor en 0, f_k polynôme homogène de degré k. On suppose que le premier terme non nul de $\widehat{f}$ est f_ℓ et que l'on a $f_\ell = \prod (y - \alpha_i x)$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$, les α_i étant *réels* et *distincts*.

On va voir que, au voisinage de 0 (*i.e.* dans un voisinage non précisé, plus petit que le précédent), l'ensemble $f = 0$ est réunion d'une famille de courbes $y = \alpha_i x + \varphi_i$, φ_i fonction C^∞ de x au voisinage de 0, ayant un zéro d'ordre $\geqslant 2$ en 0.

Pour cela, j'ai besoin du lemme suivant.

Lemme 3.4. *Soit g de classe C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$; on suppose que $\widehat{g}$ commence par des termes de degré ℓ ; alors il existe $h_0, \ldots, h_\ell$, fonctions C^∞ au voisinage de 0 telles qu'on ait $g = \sum_{p+q=\ell} x^p y^q h_q$.*

On fait un développement limité d'ordre ℓ par rapport à y :

$$g(x,y) = g(x,0) + y \frac{\partial g}{\partial y}(x,0) + \cdots + \frac{y^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \frac{\partial^{\ell-1} g}{\partial y^{\ell-1}}(x,0) + k(x,y),$$

$k(x,y)$ a un zéro d'ordre ℓ en $y = 0$ pour tout x ; l'application répétée de (3.1) montre qu'on a $k(x,y) = y^\ell h_\ell(x,y)$.

Ensuite, l'utilisation des séries de Taylor montre que $\partial^k g / \partial y^k(x,0)$ $(0 \leqslant k \leqslant \ell - 1)$ a un zéro en $x = 0$ d'ordre $m - k$; alors l'application répétée de (1.1) montre qu'il s'écrit $x^{m-k} f_k(x)$; et le résultat s'en déduit immédiatement. [On notera que cette même méthode permet aussi de réduire la démonstration de (3.1) au cas particulier $m = 1$, *i.e.* à la proposition (1.1) « avec paramètres ».]

Revenons alors à la situation comme citée plus haut ; d'après le lemme précédent, appliqué à $\ell+1$ au lieu de ℓ, il existe $h_0, \ldots, h_{\ell+1}$, de classe C^∞ au voisinage de 0, qu'on peut supposer à valeurs réelles, telles qu'on ait $f - f_\ell = \sum_{p+q=\ell+1} x^p y^q h_q$.

Faisons alors un « éclatement » de 0, *i.e.* posons $y = tx$; on a $f(x,tx) = g(x,t)$, g une fonction de classe C^∞ pour $(x,t) \in U \times \mathbb{R}$, U un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. On a alors $g(x,t) = x^\ell k(x,t)$, avec

$$k(x,t) = \prod(t-\alpha_i) + x \sum_0^{\ell+1} t^q h_q(x,tx).$$

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage des points $t = \alpha_i$, $x = 0$ pour obtenir le résultat cherché.

On remarquera que l'hypothèse « α_i distincts » est nécessaire ; par exemple, les zéros de $f = y^2 - x^3$ ne peuvent pas s'écrire comme la réunion des zéros de deux fonctions $y - \varphi_i(x)$, φ_i de classe C^∞ au voisinage de 0 ; on peut le voir par exemple en remarquant que, pour $x < 0$, l'équation $f = 0$ n'a pas de solution.

4. Le théorème de division

Ce théorème a plusieurs énoncés équivalents ; avant de les donner je rappelle la notation suivante : si k est un corps (ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $k[x_1, \ldots, x_n]$ désigne l'anneau des polynômes en $(x_1, \ldots, x_n)$.

***Théorème 4.1* (« division par un polynôme »).** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $P \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$; pour que $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ puisse s'écrire $f = Pg$, $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$, il faut et il suffit que pour tout $a \in U$, la série de Taylor $\widehat{f}_a$ puisse s'écrire $\widehat{f}_a = P\widehat{h}_a$ avec $\widehat{h}_a \in \mathbb{C}[\![x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]\!]$.*

Un énoncé équivalent fait intervenir la notion d'*idéal fermé* de $\mathcal{C}^\infty(U)$; il existe sur $\mathcal{C}^\infty(U)$ une structure d'espace métrique vectoriel topologique complet (voir la deuxième partie). D'autre part, cet espace est un anneau, et même une $\mathbb{C}$-algèbre pour la multiplication.

Soit alors $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{C}^\infty(U)$; pour tout $a \in U$, soit $\widehat{\mathcal{I}}_a$ l'ensemble des séries de Taylor en a des éléments de $\mathcal{I}$; il résulte immédiatement du théorème de Borel que c'est un idéal de $\mathbb{C}[\![x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]\!]$, appelé « idéal ponctuel de $\mathcal{I}$ ». On a alors le théorème suivant conjecturé par Laurent Schwartz et démontré par H.W. Whitney (voir [**T**] par exemple).

Théorème 4.2. *Pour qu'un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}^\infty(U)$ soit fermé, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante : $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ appartient à $\mathcal{I}$ si et seulement si, pour tout $a \in U$, $\widehat{f}_a$ appartient à $\widehat{\mathcal{I}}_a$.*

Moyennant le théorème précédent, le théorème (4.1) peut donc s'énoncer :

Théorème 4.1′. *$P \cdot \mathcal{C}^\infty(U)$ est fermé dans $\mathcal{C}^\infty(U)$.*

On peut voir, en utilisant la théorie des espaces vectoriels topologiques (le « théorème du graphe fermé » de Banach), que cet énoncé est encore équivalent au suivant, en apparence plus fort.

Théorème 4.1″. *Si une suite de fonctions f_k de $\mathcal{C}^\infty(U)$ est telle que les Pf_k tendent vers 0 dans $\mathcal{C}^\infty(U)$, alors les f_k tendent vers 0 dans $\mathcal{C}^\infty(U)$.*

(Pour la convergence dans $\mathcal{C}^\infty(U)$, voir la deuxième partie.)

Enfin chacun de ces énoncés est équivalent au théorème suivant (voir dans la deuxième partie ce que cela veut dire).

Théorème 4.1‴. *Étant donné une distribution sur U, $S \in \mathcal{D}'(U)$, il existe $T \in \mathcal{D}'(U)$ tel qu'on ait $PT = S$.*

Cet énoncé est ce qu'on appelle « division des distributions ». Il avait été conjecturé par Laurent Schwartz, et démontré indépendamment par L. Hörmander [**H**] et S. Łojasiewicz [**L**].

En fait, Hörmander démontre directement (4.1″) et Łojasiewicz (4.1‴) ; mais ceci n'est pas une très grande différence (en pratique, une méthode qui donne un énoncé, donnerait aussi directement les autres par pratiquement les mêmes raisonnements). D'autres différences sont plus importantes : Hörmander démontre le théorème pour des polynômes, tandis que Łojasiewicz le démontre dans le cas plus général des fonctions analytiques réelles (*i.e.* C^∞ et égales à leur développement de Taylor au voisinage de chaque point).

Une autre différence réside dans les *stratifications* de l'ensemble V des zéros de P utilisées. On appelle stratification de V une suite décroissante de sous-variétés algébriques fermées (= ensemble des zéros d'une famille de polynômes) $U = V_0 \supset V_1 = V \supset V_2 \supset \cdots \supset V_m = \varnothing$ telles que les $V_i - V_{i+1}$ soient non singuliers. Hörmander se sert simplement de la stratification par l'ordre des zéros de P ; Łojasiewicz utilise des stratifications plus raffinées (et, bien sûr, analytiques réelles et non nécessairement algébriques).

Il n'est pas question de donner ici la démonstration générale de ce théorème ; pour cela (et la fin de la partie I), une bonne référence est le livre de Tougeron [**T**]. Je me borne à quelques indications générales. Les deux principaux ingrédients sont les suivants :

(i) Une extension du théorème de Borel (due à Whitney) aux éléments V_i d'une stratification, *i.e.* la caractérisation de la famille sur V, des séries de Taylor d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$; en fait, il suffit même du cas, plus simple, où l'on suppose f plate sur V_{i+1}, (alors, localement, sur $V_i - V_{i+1}$, par le théorème des fonctions implicites, on est ramené à (3.2) ; il faut ajouter des conditions « de platitude » au voisinage de V_{i+1}).

(ii) L'inégalité suivante : soit P un polynôme sur $\mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble de ses zéros, et d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$; alors, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$ tels qu'on ait, pour tout $x \in K$:

$$|P(x)| \geqslant C \cdot d(x, V)^\alpha.$$

Cette inégalité porte le nom « d'inégalité de Łojasiewicz » [Elle était connue bien avant pour les polynômes, et a été démontrée pour la première fois par cet auteur dans le cas analytique].

Je vais montrer, à titre d'exemple, comment cette inégalité permet de démontrer (4.1) dans le cas $U = \mathbb{R}^n$, P un polynôme $\geqslant 0$, nul seulement en 0 (par exemple $P = \sum x_i^2$).

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que, en 0, il existe une série formelle $h \in \mathbb{C}[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ avec $\widehat{f} = Ph$ (aux autres points la condition est trivialement satisfaite). Par le théorème de Borel (3.2), il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dont la série de Taylor en 0, $\widehat{g}$, soit égal à h. Alors $f - Pg$ est plat en 0.

On est donc ramené au cas ou f est plat en 0 ; alors on utilise l'inégalité de Łojasiewicz : il existe un ouvert $U \ni 0$ tel que sur U, on ait $f(x) \geqslant C|x|^\alpha$, $|x|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. On en déduit que la fonction égale à f/P hors de 0 et nulle en 0 est de classe C^∞ et plate en 0 (appliquer par récurrence aux dérivées partielles le lemme d'Hestenes (1.5)). Ceci démontre le résultat.

Pour terminer ce paragraphe, je signale l'extension suivante du théorème de division ; cette extension qui s'applique aussi au cas analytique, peut s'obtenir en généralisant la méthode de Łojasiewicz ([**M**] ; voir aussi l'exposé de [**T**]).

Théorème 4.3. *Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Alors l'idéal engendré dans $\mathcal{C}^\infty(U)$ (U ouvert de $\mathbb{R}^n$) par les P_i est fermé.*

D'après les équivalences considérées ci-dessus, cela veut encore dire ceci :

(i) Pour que $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ puisse s'écrire $f = P_1 g_1 + \cdots + P_r g_r$, il faut et il suffit que, en tout point $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$, $\widehat{f}_a$ soit dans l'idéal de $\mathbb{C}[\![x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n]\!]$ engendré par les P_i.

(ii) Soit f_k une suite d'éléments de $P_1\mathcal{C}^\infty(U)+\cdots+P_r\mathcal{C}^\infty(U)$ qui tend vers 0 dans $\mathcal{C}^\infty(U)$; alors il existe des $g_{k,i}$, $1\leqslant i\leqslant r$, tendant vers 0 pour $k\to\infty$ avec i fixé, et vérifiant $f_k=\sum P_i g_{k,i}$.
(À noter qu'ici, on n'a pas unicité de la décomposition des f_k, pas plus d'ailleurs que, dans (i), on n'a unicité de la décomposition de $\widehat{f}_a$; ceci contrairement aux cas $r=1$).

Enfin, l'énoncé correspondant en terme de distributions sera donné dans la deuxième partie.

5. Le théorème de préparation différentiable

On prend ici les notations suivantes :

$$x\in\mathbb{R}^n,\quad x=(x_1,x')\text{ avec }x'=(x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

Étant donné f, de classe C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles, on dit que f est un « polynôme distingué en x_1 » si $f=x_1^p+\sum_1^p a_i(x')x_1^{p-i}$, avec $a_i(0)=0$.

On a le théorème suivant, version C^∞ d'un théorème bien connu sur les fonctions analytiques au voisinage de 0 (= les séries entières convergentes en 0).

***Théorème 5.1* (division avec reste).** *Soit f un polynôme distingué, et soit g de classe C^∞ au voisinage de $0\in\mathbb{R}^n$. On a*

$$g=fh+\sum_{i=1}^p x_1^{p-i}r_i(x')$$

avec h de classe C^∞ au voisinage de $0\in\mathbb{R}^n$, et r_i de classe C^∞ au voisinage de $0\in\mathbb{R}^{n-1}$.

Contrairement au cas analytique, on n'a pas d'unicité de h et des r_i (cela tient à ce que tous les zéros de f, en tant que polynôme en x_1, ne sont pas nécessairement réels). Un calcul facile montre, par contre, qu'on a unicité dans les séries de Taylor en 0.

La démonstration repose sur l'astuce suivante : quitte à ajouter de nouvelles variables $t_1,\ldots,t_p$, on peut se borner à établir le théorème pour le « polynôme générique » $P(x_1,t)=x_1^p+\sum_i t_i x_1^{p-i}$, *i.e.* à établir, pour $g\in\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $0\in\mathbb{R}^{n+p}$ une identité $g=Ph+\sum_1^p x_1^{p-i}r_i(x',t)$, h de classe C^∞ en (x,t) et les r_i de classe C^∞ en (x',t) au voisinage de 0. On fait ensuite $t_i=a_i(x')$.

En utilisant le fait que $P(x_1,t)$ est un polynôme *par rapport à toutes les variables*, il est alors possible d'établir cette formule par des procédés plus ou moins voisins de ceux utilisés dans le théorème de division (4.1). La première méthode [**M**] suivait d'assez près la démonstration de Łojasiewicz de (4.1). Ensuite, des méthodes un peu différentes (notamment Mather, Nirenberg et Łojasiewicz lui-même) ont permis d'obtenir un résultat plus précis à savoir une dépendance linéaire et continue de h et r_i par rapport à g ; voir notamment dans [**T**] la méthode de Łojasiewicz.

Corollaire 5.2 **(« théorème de préparation différentiable »)**
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, à valeurs réelles. On suppose que $f(x_1, 0)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$ sont nulles en 0, et que $\partial^p f/\partial x_1^p(0,0) \neq 0$. Il existe alors g, polynôme distingué en x_1, et h, C^∞ en 0, avec $h(0) \neq 0$, tels qu'on ait $f = gh$.

Ce corollaire avait été proposé comme conjecture à l'auteur par R. Thom. Il s'appelle ainsi à cause de son analogue avec le « théorème de préparation » ou « Vorbereitungssatz » de Weierstrass dans le cas analytique.

En admettant le « théorème de division par le polynôme générique », la démonstration est la suivante : tout d'abord, en multipliant f par une fonction inversible, on peut se ramener au cas où $f(x_1, 0) = x_1^p$ (appliquer (1.1) à répétition).

On écrit alors

$$f(x_1, x') = P(x_1, t)g(x, t) + \sum_{i=1}^{p} x_1^{p-i} r_i(x', t)$$

g et les r_i de classe C^∞ au voisinage de 0.

Par l'unicité des séries de Taylor en 0, on voit qu'on a $g(0,0) \neq 0$, et même $\widehat{g}(x_1, 0, t) = 1$ et $\widehat{r}_i(0, t) = t_i$. On est donc dans les conditions d'application du théorème des fonctions implicites : il existe des $a_i(x')$ tels que les équations, $r_i = 0$ équivalent à $t_i = a_i(x')$. En faisant dans la formule précédente la substitution $t_i = Q_i(x')$, on trouve le résultat cherché.

Voici un exemple classique d'application du théorème (5.1) ; pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, désignons comme d'habitude par

$$\sigma_1 = x_1 + \cdots + x_n, \ldots, \quad \sigma_n = x_1 \cdots x_n$$

les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, \ldots, x_n$. On a le théorème suivant, dû à G. Glaeser.

Théorème 5.3 **(« Newton différentiable »).** *Soit f de classe C^∞ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, symétrique en $x_1, \ldots, x_n$, i.e. fixe par les permutations, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$, σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. Il existe alors g de classe C^∞ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ tel qu'on ait $f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.*

L'analogue pour les polynômes est le théorème de Newton bien connu des taupins ; d'où le nom.

En utilisant le théorème (5.1), on s'y ramène de la manière suivante ; soit f de classe C^∞ en $0 \in \mathbb{R}^n$; on applique successivement l'identité de la division aux polynômes génériques $P(x_1, t), P(x_2, t), \dots, P(x_n, t)$; on trouve

$$f = \sum P(x_i, t) h_i(x, t) + \sum x^\alpha r_\alpha(t), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ 0 \leqslant \alpha_i \leqslant p - 1$$

avec h_i et r_α de classe C^∞ en 0. La substitution $t_i = (-1)^i \sigma_i(x_1, \dots, x_n)$ annule les $P(x_i, t)$, et il reste $f = \sum x^\alpha r_\alpha(\sigma)$.

Si maintenant f est symétrique, on peut remplacer dans cette expression les x^α par leur moyenne sur le groupe symétrique ; le théorème de Newton permet de conclure.

Pour terminer, voici une démonstration élémentaire du théorème de division (par le polynôme générique) dans le cas $p = 2$; malheureusement, cette démonstration ne se généralise pas. Le procédé habituel d'élimination du terme de degré 1 nous ramène à la division par $x_1^2 - t$, *i.e.* à démontrer une identité

$$f(x_1, x', t) = (x_1^2 - t) g(x_1, x', t) + x_1 r_1(x', t) + r_2(x', t).$$

D'après les résultats du § 3, il suffit de trouver r_1 et r_2 vérifiant

$$f(x_1, x', x_1^2) = x_1 r_1(x', x^2) + r_2(x', x^2)$$

À l'adjonction près des paramètres x', qui n'ajoutent pas de difficulté, on est ramené à montrer qu'une fonction $f(x_1)$, de classe C^∞ au voisinage de 0, s'écrit $x_1 g(x_1^2) + h(x_1^2)$; pour le voir on décompose f en partie paire et impaire, et on applique (1.1) et (1.6).

PARTIE II
DIVISION DES DISTRIBUTIONS

1. Généralités sur les distributions

Dans ce paragraphe, je rappelle rapidement la définition et les principales propriétés des distributions, tout au moins celles dont j'aurai à me servir. Pour plus de détails, voir notamment le traité de Laurent Schwartz [**S**].

(i) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit K un compact de U ; pour $f \in \mathcal{C}^m(U)$, on pose $\|f\|_{m,K} = \sup_{|\alpha| \leqslant m, x \in K} |\partial^\alpha f(x)|$.

Cette famille de semi-normes définit une topologie, dans laquelle un système fondamental de voisinage de 0 est donné par une famille finie d'inégalités $\|f\|_{m,K_i} < \varepsilon_i$; les voisinages d'un point $g \in \mathcal{C}^m(U)$ sont obtenues par translation à partir des voisinages de 0.

On peut voir que cette topologie est définie par une distance invariante par translation ; en pratique, pour les questions de continuité, etc., il suffira de retenir ceci :

(a) Une suite $\{f_k\}$ de fonctions de $\mathcal{C}^m(U)$ converge vers 0 si et seulement si les f_k convergent uniformément vers 0 sur tout compact $K \subset U$, ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant m$

(b) Une suite $\{f_k\}$ converge vers g si et seulement si $\{f_k - g\}$ converge vers 0.

(c) L'espace $\mathcal{C}^m(U)$ est complet au sens suivant : une suite $\{f_k\}$ est convergente si et seulement si la suite double $\{f_k - f_\ell\}$ tend vers 0 pour $k \to +\infty$, $\ell \to +\infty$.

Dans $\mathcal{C}^\infty(U)$, on a les mêmes propriétés, en prenant ici comme famille de « semi-normes » les $\|f\|_{m,K}$, $m \in \mathbb{N}$, K compact $\subset U$.

(ii) Soit $\mathcal{D}(U)$ [notations de Schwartz ; on écrit aussi $\mathcal{C}_c^\infty(U)$] l'espace des fonctions de classe C^∞ sur U, nulles en dehors d'un compact $K \subset U$; nous avons vu au § I, n° 2, qu'il existait « beaucoup » de telles fonctions.

Pour K compact $\subset U$, notons $\mathcal{D}_K(U)$ l'espace des fonctions de $\mathcal{D}(U)$ à support compact dans K (= nulles hors de K). C'est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^\infty(U)$ (la démonstration est immédiate : soient $f_k \in \mathcal{D}_K(U)$, convergeant vers $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$; il est clair que g est nul hors de K).

Dans la suite, on munit $\mathcal{D}_K(U)$ de la topologie (si l'on veut, de la métrique) induite par $\mathcal{C}^\infty(U)$. Il est possible aussi de munir $\mathcal{D}(U)$ d'une topologie « limite inductive des $\mathcal{D}_K(U)$ ». Je ne m'en servirai pas du tout.

(iii) L'espace $\mathcal{C}^\infty(U)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et $\mathcal{D}(U)$ en est un sous-espace.

On définit alors les distributions sur U de la manière suivante.

Définition 1.1. Une distribution T sur U est une forme $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathcal{D}(U)$ qui vérifie la propriété suivante :

Pour tout compact $K \subset U$, la restriction de T à $\mathcal{D}_K(U)$ est continue.

Cette dernière propriété s'énonce de deux manières équivalentes suivantes :

(i) Si la suite $f_k \in \mathcal{D}_K(U)$ tend vers 0, $T(f_k) \to 0$.

(ii) Pour tout K compact $\subset U$, il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels qu'on ait

$$\forall\, f \in \mathcal{D}_K(U), \quad |T(f)| \leqslant C\|f\|_{m,K}.$$

À noter que « l'ordre » m de T sur K peut augmenter indéfiniment si l'on agrandit K.

Notation. On note $\mathcal{D}'(U)$ les distributions sur U.

(iv) Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, on dispose de la mesure de Lebesgue $dx = dx_1 \cdots dx_n$ (si l'on fait un changement linéaire de coordonnées, on change dx par une constante).

Toute fonction f localement intégrable (sous-entendu : pour dx) définit une distribution $[f]$: pour $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, on pose

$$[f](\varphi) = \int_U f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Il est clair que la condition de continuité est vérifiée : en effet, si $\varphi \in \mathcal{D}_K(U)$, on a $|[f](\varphi)| \leqslant \sup_{x\in K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)|\,dx$.

(v) La multiplication des distributions est définie ainsi soient $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $T \in \mathcal{D}'(U)$; on définit fT par

$$(fT)(\varphi) = T(f\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Il est évident que fT est une distribution (formule de Leibniz) ; si $T = [g]$, g fonction localement intégrable (pour dx), on a $[fg] = f[g]$; en effet les deux membres valent

$$\mathcal{D}(U) \ni \varphi \longmapsto \int g(x)f(x)\varphi(x)\,dx.$$

(vi) La dérivation des distributions est définie ainsi : soit $T \in \mathcal{D}'(U)$; on pose

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} T\Big)(\varphi) = -T\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big), \quad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Par intégration par parties, on vérifie immédiatement ceci : si $T = [f]$, avec $f \in \mathcal{C}^1(U)$, alors

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T = \Big[\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big].$$

L'intérêt de cette définition (et des distributions) est le suivant : on peut dériver indéfiniment au sens des distributions *n'importe quelle fonction localement intégrable*. Par contre, en général, le produit de deux distributions n'est pas défini.

Exemple de base. Soit Y la « fonction d'Heaviside », qui vaut 1 pour $x > 0$, et 0 pour $x < 0$ (peu importe sa valeur pour 0, qui est de mesure nulle). La distribution correspondante, notée aussi Y est définie par

$$Y(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

On a
$$\frac{dY}{dx}(\varphi) = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(0).$$
dY/dx est ce qu'on rappelle la distribution (ou « fonction ») de Dirac, et on la note δ. On aura donc par exemple $\delta'(\varphi) = -\varphi'(0)$; et aussi $x\delta(\varphi) = (x\varphi)(0) = 0$, donc $x\delta = 0$; donc l'équation $xT = 0$ n'implique pas $T = 0$, contrairement à ce qui se passe si, par exemple T est une fonction continue.

2. Localisation ; support des distributions

La localisation repose sur les résultats suivants que j'admets ; voir par exemple [**S**]

(i) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$; un recouvrement ouvert de U est une collection d'ouverts $\{V_i\}_{i\in I}$ avec $V_i \subset U$, $\cup V_i = U$.

Un tel recouvrement est dit localement fini si tout compact $K \subset U$ ne rencontre qu'un nombre fini des V_i

(ii) Un recouvrement $\{W_j\}_{j\in J}$ est dit plus fin que $\{V_i\}_{i\in I}$ si tout W_j est contenu dans un V_i.

On a les deux résultats suivants.

(2.1) *Tout recouvrement admet un raffinement localement fini par des ouverts relativement compacts dans U.*

(2.2) *Pour tout recouvrement $\{V_i\}_{i\in I}$ de U localement fini, les V_i étant relativement compacts dans U, il existe « une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement», c'est-à-dire une collection de fonctions $\alpha_i \in \mathcal{D}(V_i)$, α_i pour tout $\geqslant 0$, et $\sum \alpha_i = 1$.*

Soit maintenant $T \in \mathcal{D}'(U)$. On dit que « V, ouvert $\subset U$ n'appartient pas au support de T » si $T(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(V)$.

Soient $V_i \subset U$, $i \in I$, qui n'appartiennent pas au support de T ; alors $V = \cup V_i$, n'y appartient pas non plus ; pour le voir, il suffit d'établir ceci : tout $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ s'écrit comme une somme finie $\varphi = \sum \varphi_i$, $\varphi_i \in \mathcal{D}(V_i)$. Ceci se voit en prenant un recouvrement localement fini de V plus fin que $\{V_i\}$, et une partition de l'unité subordonnée.

Par suite, il existe un plus grand V n'appartenant pas au support de T ; naturellement, on appelle « support de T » son complémentaire dans U.

Soit maintenant K un compact de U, et T une distribution à support dans K ; T définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^\infty(U)$ de la manière suivante.

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(U)$, $\alpha = 1$ au voisinage de K (existence par (2.2) : prendre le recouvrement de U formé de $K - U$ et d'un voisinage relativement compact de K). Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, on pose $T(f) = T(\alpha f)$; il est clair que cela ne dépend pas de α.

On montre que ce procédé donne une bijection « distributions à support compact sur U » $\longleftrightarrow$ « formes linéaires continues sur $\mathcal{C}^\infty(U)$ ».

3. Division des distributions

Le théorème est ici le suivant (*cf.* I.4.1‴) :

***Théorème 3.1*.** *Soit U un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, et P un polynôme $\in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Pour tout $s \in \mathcal{D}'(U)$, il existe $T \in \mathcal{D}'(U)$ tel qu'on ait $PT = S$.*

J'indique rapidement comment ce théorème se déduit de (I.4.1″)

(i) On voit d'abord qu'il suffit de traiter le cas où S est à support compact. Soit en effet $\{V_i\}_{i \in 1}$ un recouvrement localement fini de U, et soit α_i une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement.

On prend d'abord T_i tel qu'on ait $PT_i = \alpha_i S$; soit ensuite $\beta_i \in \mathcal{D}(V_i)$, égal à 1 au voisinage du support de α_i (existence par les arguments du § 2) ; on remplace T_i par $\beta_i T_i = T_i'$ qui vérifie encore $PT_i' = \alpha_i S$. Alors la somme $\sum T_i'$ est localement finie, et répond à la question

(ii) Supposons donc S à support compact dans U ; on veut trouver T, forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^\infty(U)$ vérifiant $PT = S$, c'est-à-dire, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $T(P\varphi) = S\varphi$.

D'après (I.4.1″), la forme linéaire sur $P\mathcal{C}^\infty(U)$ définie par cette formule est continue pour la topologie induite sur $P\mathcal{C}^\infty(U)$ par $\mathcal{C}^\infty(U)$. D'après le théorème de Hahn-Banach cette forme linéaire s'étend en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^\infty(U)$; ceci donne le résultat cherché.

Plus généralement, le théorème (I.4.3) se traduit ici de la manière suivante :

***Théorème 3.2*.** *Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_2]$ et soient $S_1, S_r \in \mathcal{D}'(U)$. Pour qu'il existe $T \in \mathcal{D}'(U)$ vérifiant $P_i T = S_i$, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

Si $Q_1, \dots, Q_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ vérifient $\sum Q_i D_i = 0$, alors on a $\sum Q_i S_i = 0$.

J'admets ce résultat et son équivalence avec (I.4.3) ; *cf.* [**M**].

4. Exemples

Je me limiterai ici à quelques exemples très élémentaires ; je renvoie aux conférences de Sabbah pour une étude plus systématique, fondée notamment sur le prolongement analytique de $|P|^s$.

Exemple 1. La fonction qui vaut $1/x$ pour $x > 0$ et 0 pour $x < 0$ n'est pas intégrable au voisinage de 0 ; mais sa primitive $Y \log x$ l'est (Y, la fonction d'Heaviside, définie en 1).

Soit $T = \frac{d}{dx}(Y \log x)$; on a

$$T(\varphi) = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log x \, dx.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \varphi'(x) \log x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big[\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx - \varphi(\varepsilon) \log \varepsilon \Big] \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \Big[\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx - \varphi(0) \log \varepsilon \Big]. \end{aligned}$$

On écrit souvent $T = \mathrm{Pf}(Y/x)$ (Pf = « partie finie »).

On a aussi

$$T(\varphi) = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx$$

et naturellement $xT = Y$.

Exemple 2. La fonction $1/(x^2 + y^2)$ n'est pas intégrable à l'origine dans $\mathbb{R}^2$; mais, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, la fonction

$$\frac{\varphi(x, y) - \varphi(0, 0)}{x^2 + y^2}$$

est intégrable à l'origine. On voit alors comme plus haut que

$$\iint_{x^2+y^2 \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x, y)}{x^2 + y^2} \, dxdy - \pi\varphi(0, 0) \log \varepsilon$$

a une limite ; ceci définit une distribution $T = \mathrm{Pf}\, 1/(x^2 + y^2)$, et l'on a

$$(x^2 + y^2)T = 1.$$

***Exemple 3* (« Valeur principale de Cauchy »).** La fonction $1/x$ n'est pas intégrable au voisinage de 0 ; mais, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'intégrale

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx$$

a une limite pour $\varepsilon \to 0$; en effet les deux termes logarithmiques obtenus pour $x > 0$ et $x < 0$ (*cf.* exemple 1) s'annulent.

On pose

$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

(vp = « valeur principale »), et on note $\mathrm{vp}(1/x)$ la distribution ainsi obtenue.

On a évidemment $x\,\mathrm{vp}(1/x)=1$.

Cette distribution intervient lorsqu'on veut calculer la limite (au sens des distributions) de $1/(x+i\varepsilon)$ pour $\varepsilon>0$, $\varepsilon\to 0$, qu'on note $1/(x+i0)$.

Par définition

$$\frac{1}{x+i0}(\varphi)=\lim_{\substack{\varepsilon>0\\ \varepsilon\to 0}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx.$$

On écrit l'intégrale du deuxième membre sous la forme

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\,dx+\int_{|x|\geqslant 1}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx+\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\,dx.$$

La somme des deux premiers termes a pour limite

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx+\int_{|x|\geqslant 1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

D'autre part

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+i\varepsilon}=\int_{-1}^{1}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx=-i\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+\varepsilon^2}\longrightarrow -i\pi$$

(faire le changement de variable $x=\varepsilon u$) d'où finalement

$$\frac{1}{x+i0}=\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}-i\pi\delta,\quad (\text{et } x\cdot\frac{1}{x+i0}=1).$$

Références

[H] L. Hörmander – « On the division of distributions », *Ark. Mat.* **3** (1958), p. 555–568.

[L] S. Łojasiewicz – « Sur le problème de la division », *Studia Math.* **8** (1959), p. 87–136.

[M] B. Malgrange – *Ideals of differentiable functions*, Oxford University Press, 1966.

[S] L. Schwartz – *Théorie des distributions,* tome I, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1091, Hermann, Paris, 1950.

[T] J.-C. Tougeron – *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer-Verlag, 1972.

ANNEXE : STANISŁAW ŁOJASIEWICZ (1926-2002)[1]

S. Łojasiewicz est mort le 14 novembre dernier. Je crois bien qu'alors, j'ai d'abord pensé à son rire, sonore et inimitable, que je n'entendrai plus ; j'ai ensuite associé son nom à celui de deux autres grands mathématiciens disparus peu de temps auparavant, Laurent Schwartz et René Thom, tant son œuvre se rattache à la leur.

S. Łojasiewicz était né à Varsovie le 9 octobre 1926. Je ne sais guère ce que fut sa vie avant 1945 ; nous n'en avions guère parlé ; il m'a juste dit une fois que, pendant la guerre, en Pologne, les lycées avaient été fermés par les nazis, et que les études étaient organisées de manière clandestine, dans des appartements privés.

À partir de 1945, il est étudiant, puis chercheur, à l'Université de Cracovie, où il demeurera toute sa vie ; il passe sa thèse en 1950 sous la direction de Ważewski sur le sujet suivant : « Sur l'allure asymptotique des intégrales d'un système d'équations différentielles au voisinage d'un point singulier » (ce renseignement ainsi que d'autres m'a été fourni par K. Kurdyka, ce dont je le remercie très vivement).

Il s'intéresse ensuite à la théorie des distributions. Le travail qui le rendra célèbre et déterminera la suite de son activité, est la solution qu'il donne en 1957 du problème de la division des distributions posé par L. Schwartz.

Je rappelle ce dont il s'agit : étant donné un ouvert U de R^n, une fonction analytique réelle f sur U, et une distribution T sur U, existe-t-il une distribution S telle qu'on ait $fS = T$? Chez L. Schwartz, l'origine de ce problème était la suivante : soit P un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants ; existe-t-il une distribution E (dite « solution élémentaire de E »), telle qu'on ait $PE = \delta$?

Il est naturel de chercher E tempérée (en fait, ce n'est pas le plus simple ; si l'on cherche seulement une distribution sans condition de croissance à l'infini la réponse est plus facile ; mais ceci sort de notre sujet). Pour trouver E tempérée, il est naturel de travailler sur les transformées de Fourier, et de résoudre l'équation $\widehat{P}\widehat{E} = 1$, $\widehat{P}$ un polynôme, $\widehat{E}$ une distribution tempérée ; en fait, le problème est local, car une distribution tempérée n'est rien d'autre qu'une distribution sur R^n, prolongeable à la sphère S^n (ou à l'espace projectif réel) ; il est alors naturel de ne pas se limiter à $T = 1$, ni à $f =$ un polynôme.

---

[1] Texte paru dans la *Gazette des mathématiciens* n° 96 (avril 2003), reproduit ici avec l'aimable autorisation de la Société mathématique de France.

Le problème, qui paraissait très difficile à l'époque, fut résolu simultanément en 1957 par S. Łojasiewicz et L. Hörmander, ce dernier se limitant toutefois au cas des polynômes. Leurs méthodes diffèrent sur plusieurs points : tandis que Łojasiewicz traite directement le problème de la division, Hörmander montre un résultat équivalent par dualité : la multiplication par f a une image fermée dans les fonctions C^∞. Une autre différence est dans la stratification utilisée : Hörmander utilise simplement la stratification par l'ordre des zéros, tandis que Łojasiewicz démontre et utilise une stratification beaucoup plus détaillée des zéros de f. Le point commun est l'inégalité reliant la croissance d'une fonction analytique à la distance à l'ensemble de ses zéros (inégalité triviale dans le cas complexe, beaucoup moins évidente dans le cas réel) ; dans le cas des polynômes elle peut se démontrer à l'aide d'un théorème d'élimination algébrique réelle de Tarski-Seidenberg ; dans le cas analytique, elle est plus délicate à établir et porte à juste titre le nom d'« inégalité de Łojasiewicz ».

Pendant que j'y suis, je signale une autre « inégalité de Łojasiewicz » plus subtile qui est relative à la comparaison d'une fonction analytique et de son gradient au voisinage de ses zéros (si bien que la terminologie donne quelquefois lieu à des confusions). Cette dernière inégalité a été notamment utilisée par Thom pour donner des majorations des nombres de Betti des variétés algébriques réelles. Dans le cas algébrique, les exposants intervenant dans les deux inégalités sont rationnels ; leur étude a donné lieu à de nombreux travaux.

Personnellement, j'ai eu à me servir de ce travail de deux manières ; d'une part pour une extension du théorème de division à des systèmes $f_i S = T_i$ (les T_i doivent alors vérifier une condition de compatibilité *i.e.* satisfaire les relations analytiques satisfaites par les f_i) ; d'autre part, dans le « théorème de préparation différentiable » conjecturé par R. Thom ; en gros dans les fonctions C^∞, il s'agit de remplacer une division exacte $\varphi = f\psi$ (φ et ψ de classe C^∞, et f analytique ; ceci est essentiellement un problème dual de la division des distributions) par une division avec reste. Dans les deux cas, le dévissage des ensembles analytiques donné par Łojasiewicz est si bien fait que ses méthodes s'appliquent presque sans changement. Je signale aussi que Łojasiewicz a donné ultérieurement une autre démonstration du théorème de préparation différentiable dans sa version forte due à J. Mather (dépendance linéaire du quotient et du reste). Cette démonstration repose sur une version du « théorème de Newton différentiable » dans le domaine complexe. De toutes les démonstrations qui ont été données de ce théorème c'est sans aucun doute celle que je préfère.

Comme je le disais plus haut, son travail sur la division des distributions a été le point de départ de ses travaux ultérieurs. En 1964, il publie une démonstration de l'existence d'une triangulation semi-analytique des ensembles semi-analytiques, travail fait en grande partie à Pise en 1962, où il avait été invité par A. Andreotti (pour être juste, je dois dire qu'une autre démonstration de ce théorème a été donnée simultanément par B. Gieseke). En 1964-65, il passe une année à Orsay et y donne un cours où il expose ses connaissances sur les ensembles semi-analytiques devant un auditoire passionné, incluant R. Thom et l'auteur de ces lignes. Ce cours ronéotypé par les soins de l'I.H.E.S, est resté la référence de base du sujet ; il n'a jamais été publié sous une autre forme.

Nous devions le revoir ensuite souvent en France notamment lors d'un séjour à l'I.H.E.S. en 1967-68. Il aimait voyager en Europe, Amérique du Nord et du Sud notamment ; il sillonnait infatigablement l'Europe en voiture allant surtout en Espagne, Italie et France (pendant longtemps, ces voyages se faisaient à bord d'une vieille Fiat polonaise qui rendait perplexe les garagistes occidentaux). Cependant il était très attaché à la Pologne et à Cracovie, malgré ses désaccords avec les gouvernements communistes, et aussi malgré des conditions de vie, en particulier de logement, assez difficiles. À ma connaissance, il n'a jamais envisagé de quitter son poste en Pologne et à Cracovie ; vu sa réputation, cela lui aurait été facile.

Depuis 1970, ses travaux se sont poursuivis dans la même direction et ont été prolongés par les travaux de ses nombreux élèves en Pologne et à l'étranger. Après l'introduction des ensembles sous analytiques par Gabrielov et Hironaka ce sujet a été aussi l'objet de son attention ; en particulier lui-même et ses élèves se sont attachés à étudier les ensembles sous analytiques en évitant autant que possible de se servir de la désingularisation. Il travaillait ces dernières années en collaboration, avec M.A. Zurro, à un exposé d'ensemble de ces sujets ; une première version résumée, en espagnol, a été publiée à Valladolid en 1992. Sa disparition brutale laisse ce travail inachevé ; mais si j'ai bien compris, la première partie est essentiellement terminée, et devrait être publiée prochainement ; cette publication sera le meilleur hommage à sa mémoire.

Bernard Malgrange

B. MALGRANGE, Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS, Université de Grenoble I, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères, France • *E-mail :* `Bernard.Malgrange@ujf-grenoble.fr`