DIVISION PAR UNE FONCTION HOLOMORPHE SUR UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE

par

Laurent Schwartz

Nous avons indiqué dans notre ouvrage « Théorie des Distributions » [(1)] que, sur une variété indéfiniment différentiable V, la division d'une distribution quelconque par une fonction indéfiniment différentiable H est toujours possible, si, en chaque point où $H = 0$, la différentielle de H est $\neq 0$. Dans beaucoup d'autres cas la division est encore possible, mais dès que les singularités de la « sous variété W » d'équation $H = 0$ deviennent très compliquées, nous ne pouvons plus rien dire. Il est *probable* que si V est analytique (réelle), la division par une fonction H analytique est toujours possible ; en fait on ne sait même pas si sur $\mathbb{R}^n$ la division par un polynome est toujours possible. Le présent article a pour but de montrer (Corollaire IV du théorème I) que, si V est une variété analytique *complexe* à n dimensions complexes (donc $N = 2n$ dimensions réelles), la division par une fonction *holomorphe* H est toujours possible. Les théorèmes I, II, III donnent par ailleurs des propriétés de la divisibilité des fonctions indéfiniment différentiables par des fonctions holomorphes. Nous supposerons toujours V connexe. Nous démontrerons d'abord quelques lemmes.

Note des éditeurs : Nous reproduisons ici l'article de Laurent Schwartz paru dans la revue *Summa Brasiliensis Mathematicae* (éditée par l'Instituto de Matematica Pura et Applicada au Brésil), vol. 2, fasc. 9, 1955, p. 181–209. Nous avons gardé le texte original (ainsi, L.S. écrit « polynome » au lieu de « polynôme » comme on le fait aujourd'hui), mais nous n'avons pas repris ses notations $\mathbf{E}, \mathbf{E}', \mathbf{D}, \mathbf{D}'$ et avons gardé celles de son livre $\mathscr{E}, \mathscr{E}', \mathscr{D}, \mathscr{D}'$, qui sont aussi celles utilisées aujourd'hui, pour les espaces de fonctions C^∞ ($\mathscr{E}$), C^∞ à support compact ($\mathscr{D}$), les distributions ($\mathscr{D}'$) et les distributions à support compact ($\mathscr{E}'$). Pour la commodité du lecteur, nous avons utilisé la notation $\mathbb{R}$ pour le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ pour celui des nombres complexes.

(1) « Théorie des Distributions », Paris, Hermann, 1951 (2 volumes). Voir tome 1, chapitre V, § 5 théorème VIII. Nous adoptons les notations de ce volume pour les espaces $\mathscr{D}, \mathscr{D}', \mathscr{E}, \mathscr{E}'$.

Plaçons nous dans $\mathbb{R}^N$. Pour une fonction $\theta \in \mathscr{E}$, appelons $M_m(\theta)$ la borne supérieure sur $\mathbb{R}^N$, finie ou infinie, des modules des dérivées d'ordre $\leqslant m$ de θ. Soit alors P un polynome homogène de degré p elliptique, c.a.d. ne s'annulant qu'à l'origine ; pour $\varphi \in \mathscr{E}$, posons $\psi = P\varphi$.

Lemme I. *On a l'inégalité*

$$M_m(\varphi) \leqslant A(m; P) M_{m+p}(\psi), \tag{1}$$

la constante $A(m;P)$ dépendant seulement de m et du polynome P, et non de φ.

Développons ψ suivant Taylor au voisinage de l'origine jusqu'à l'ordre $m+p-1$, en utilisant l'expression intégrale du reste.[(2)]

$$\begin{cases} \psi(x) = Q_{m+p-1}(x) + R_{m+p-1}(x), \\ Q_{m+p-1}(x) = \displaystyle\sum_{|q| \leqslant m+p-1} \frac{x^q}{q!} D^q \psi(0), \\ R_{m+p-1}(x) = \displaystyle\int_0^x \sum_{\substack{|q|=m+p-1 \\ i=1,2,\dots,N}} \frac{(x-\xi)^q}{q!} \Big(\frac{\partial}{\partial \xi_i} D^q \psi(\xi) \Big) d\xi_i; \end{cases} \tag{2}$$

l'intégrale qui figure au dernier membre est prise sur n'importe quelle courbe rectifiable joignant 0 à x, car, pour x fixé, la différentielle de degré 1 en ξ qu'il faut intégrer est fermée ; cette différentielle s'écrit en effet

$$\sum_{|q|=m+p-1} \frac{(x-\xi)^q}{q!} d_\xi D^q \psi(\xi), \tag{3}$$

et dans sa différentielle extérieure (en ξ pour x fixé)

$$\sum_{|q|=m+p-1} d_\xi \frac{(x-\xi)^q}{q!} \wedge d_\xi D^q \psi(\xi), \tag{4}$$

le coefficient de chaque $d_{\xi_i} \wedge d_{\xi_j}$ est nul.

On a alors

$$\varphi(x) = \frac{Q_{m+p-1}(x)}{P(x)} + \frac{R_{m+p-1}(x)}{P(x)}. \tag{5}$$

---

(2) Nous adoptons pour les dérivées les notations simplifiées suivantes. $q = (q_1, \dots, q_N)$ est un système de N entiers $\geqslant 0$. Alors $|q| = q_1 + \cdots + q_N$. D^q désigne la dérivée $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{q_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{q_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{q_N}$, d'ordre $|q|$. x^q désigne le produit $x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_N^{q_N}$, tandis que $q!$ désigne $q_1! q_2! \cdots q_N!$. Le développement de Taylor s'écrit $f(x) = \sum D^q f(0) x^q / q!$. Si $r = (r_1, \dots, r_N)$ est un autre indice de dérivation, on écrira $q \leqslant r$ si $q_j \leqslant r_j$ pour $j = 1, 2, \dots, N$ et $q < r$ si $q \leqslant r$ et $q \neq r$; $q + r$ sera l'indice de dérivation $(q_1 + r_1, q_2 + r_2, \dots, q_N + r_N)$. Le symbole $\binom{q}{r}$ désignera la « combinaison » $\binom{q_1}{r_1}\binom{q_2}{r_2} \cdots \binom{q_N}{r_N}$; la formule de Leibnitz pour la dérivation d'un produit s'écrit alors $D^q uv = \sum \binom{q}{r} D^r u \, D^{q-r} v$.

Comme P est homogène, et que ψ est divisible par P, les polynomes homogènes de divers degrés qui figurent dans le développement de Taylor de ψ sont tous divisibles par P, de sorte que Q_{m+p-1}/P est un polynome de degré $\leqslant m-1$, et a toutes ses dérivées d'ordre m nulles. On a donc, si D^r est une dérivation d'ordre $|r|=m$:

$$D^r\varphi(x) = D^r(P^{-1}R_{m+p-1}) = \sum_{s\leqslant r}\binom{r}{s}D^s(1/P)D^{r-s}R_{m+p-1}. \tag{6}$$

Par récurrence sur s, on voit immédiatement que $D^s(1/P)$ est un quotient $\theta_s/P^{|s|+1}$, où θ_s est un polynome homogène de degré $(p-1)\,|s|$. Alors $|\theta_s|$ est majoré, à un facteur près qui dépend de s et P, par $|x|^{(p-1)|s|}$, tandis que $|P|$ est minoré, par raison d'homogénéité, par $a\,|x|^p$, a étant le minimum(*) de $|P|$ sur la sphère unité $|x|=1$. Finalement $|D^s(1/P)|$ est majoré, à un facteur près qui dépend de s et P, par $|x|^{(p-1)|s|-(|s|+1)p} = |x|^{-|s|-|p|}$.

Étudions maintenant les dérivées successives d'ordre $\leqslant m$ de R_{m+p-1}. Une dérivée $\partial/\partial x_k$ (pour $m\geqslant 1$) est somme de 2 termes. L'un provient de la dérivation sous le signe $\int$ de $(x-\xi)^q/q!$, il n'est $\neq 0$ que si $q_k\neq 0$, et il s'obtient alors en remplaçant, dans l'intégrale, $(x-\xi)^q/q!$ par $(x-\xi)^{q'}/q'!$, q' se déduisant de q en y remplaçant seulement q_k par q_k-1. L'autre provient de la dérivation par rapport à la borne supérieure d'intégration x ; comme le chemin d'intégration est arbitraire, on peut supposer qu'il se termine par un segment parallèle à l'axe des x_k, de sorte que la dérivée s'obtient en remplaçant ξ par x dans le coefficient de $d\xi_k$ de la différentielle à intégrer ; cela donne donc 0. On a ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}R_{m+p-1}(x) = \int_0^x \sum_{\substack{|q'|=m+p-2\\ i=1,2,\dots,N}} \frac{(x-\xi)^{q'}}{q'!}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_k}D^{q'}\psi(\xi)\,d\xi_i. \tag{7}$$

Les dérivées suivantes se calculent de la même manière, les mêmes phénomènes se produisent (les exposants de $(x-\xi)$ restent >0 dans l'expression à dériver, tant qu'on calcule les dérivées d'ordre $\leqslant m$ de R_{m+p-1}). On a finalement

$$D^{r-s}R_{m+p-1}(x) = \int_0^x \sum_{\substack{|q''|=m+p-1-|r-s|\\ i=1,2,\dots,N}} \frac{(x-\xi)^{q''}}{q''!}\frac{\partial}{\partial\xi_i}D^{r-s+q''}\psi(\xi)\,d\xi_i. \tag{8}$$

On en déduit alors, en calculant l'intégrale sur le chemin rectiligne $(0,x)$ de longueur $|x|$, que $\left|D^{r-s}R_{m+p-1}(x)\right|$ est majoré, à un facteur près qui dépend seulement de m,p, par $M_{m+p}(\psi)\,|x|^{m+p-|r-s|}$.

(*) N.d.E. : On a $a>0$ par hypothèse d'ellipticité.

Alors de (6) on déduira la majoration :

$$|D^r \varphi(x)| \leqslant A(m; P) M_{m+p}(\psi) \tag{9}$$

(parce que $-|s| - p + m + p - |r - s| = m - |r| = 0$), d'où finalement, en réunissant toutes les majorations correspondant aux dérivées D^r d'ordre $|r| = m$, la formule (1) à démontrer.

Remarques. 1.°) Le coefficient $A(m; P)$ reste borné pour m et p bornés, si P varie en gardant ses coefficients bornés et en restant uniformément elliptique, c.a.d. borné inférieurement sur la sphère unité $|x| = 1$.

2.°) Si $N = 2$, si on met sur $\mathbb{R}^2$ la structure complexe de $\mathbb{C}$, en appelant $x + iy$ la coordonnée complexe z, et si P est le polynome homogène de degré 1 : $P(x, y) = z$, on aura la majoration

$$M_m(\varphi) \leqslant A(m) M_{m+1}(z\varphi), \tag{10}$$

$A(m)$ dépendant alors seulement de l'entier m.

Les maxima des modules des dérivées de φ et ψ étant invariants par translation, *on a la même majoration si z est remplacé par le polynome non homogène $z - z_0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, avec toujours la même constante $A(m)$.*

On en déduit le lemme suivant :

Lemme II. *Si P est un polynome unitaire de degré p de la variable complexe z :*

$$P(z) = z^p + a_1 z^{p-1} + \cdots + a_{p-1} z + a_p, \tag{11}$$

si, dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $\varphi \in \mathscr{E}$, et si on pose $\psi = P\varphi$, on a l'inégalité

$$M_m(\varphi) \leqslant A(m; p) M_{m+p}(\psi), \tag{12}$$

la constante $A(m; p)$ dépendant seulement de m et du degré p de P, et non de $\varphi \in \mathscr{E}$ ni des coefficients du polynome P.

Il suffit en effet de décomposer P en facteurs :

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_p)$$

et d'appliquer p fois de suite une inégalité du type (10) :

$$M_m(\varphi) \leqslant A(m) M_{m+1}((z - z_1)\varphi)$$
$$M_{m+1}((z - z_1)\varphi) \leqslant A(m+1) M_{m+2}((z - z_2)(z - z_1)\varphi), \ldots$$

d'où (12) en multipliant membre à membre ces inégalités.

On peut donner des formes locales des lemmes I et II. Pour le lemme II par exemple, soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, Ω' un ouvert borné tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Pour $\theta \in \mathscr{E}(\Omega)$ (*resp.* Ω'), appelons $M_m(\theta; \Omega)$ (*resp.* $M_m(\theta; \Omega')$) la borne supérieure sur Ω (*resp.* Ω') des modules des dérivées d'ordre $\leqslant m$ de θ. Si P est toujours un polynome unitaire en z de degré p, on a l'inégalité :

$$M_m(\varphi;\Omega') \leqslant A(m;p;\Omega,\Omega')M_{m+p}(\psi;\Omega), \tag{13}$$

la constante $A(m;p;\Omega,\Omega')$ dépendant de m, de p et des ouverts Ω,Ω', non de $\varphi \in \mathscr{E}$ ni du polynome P.

Soit en effet α une fonction appartenant à $\mathscr{D}(\Omega)$ et égale à 1 sur un voisinage de $\overline{\Omega'}$. Alors $\alpha\varphi$ et $\alpha\psi = P\alpha\varphi$, prolongées par 0 dans $\complement\Omega$, sont définies et indéfiniment différentiables dans $\mathbb{R}^2$, et on peut leur appliquer l'inégalité (12) :

$$M_m(\varphi;\Omega') \leqslant M_m(\alpha\varphi;\mathbb{R}^2) \leqslant A(m;p)M_{m+p}(\alpha\psi;\mathbb{R}^2). \tag{14}$$

Comme chaque dérivée de α est bornée, $M_{m+p}(\alpha\psi;\mathbb{R}^2)$ est majoré à un facteur près qui ne dépend que de m, p, α donc de m, p, Ω, Ω', par $M_{m+p}(\psi;\Omega)$, ce qui donne (13).

Nous donnerons également le lemme suivant sous forme locale (on peut le démontrer globalement, mais il faut semble-t-il passer par le local, et son véritable intérêt sera local).

V sera ici une variété $\Omega \times \Lambda$, où Ω est un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ de la variable complexe $z = x + iy$, et Λ est un ouvert de l'espace T^ℓ de la variable $t = (t_1, t_2, \ldots, t_\ell)$, t_j réels. P est une fonction indéfiniment différentiable sur V, polynome unitaire de degré p en z à coefficients fonctions indéfiniment différentiables de t :

$$P(z,t) = z^p + a_1(t)z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(t)z + a_p(t). \tag{15}$$

On suppose de plus que les fonctions a_j sont bornées sur Λ, ainsi que chacune de leur dérivées partielles en t ; soit α_m la borne supérieure des modules des dérivées d'ordre $\leqslant m$. Pour $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega \times \Lambda)$ nous poserons toujours $\psi = P\varphi$, et nous majorerons les dérivées d'ordre $\leqslant m$ de φ dans $\Omega' \times \Lambda$, Ω' étant un ouvert *borné* de $\mathbb{C}$ tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, en fonction des bornes supérieures des modules des dérivées d'ordre plus élevé de ψ dans $\Omega \times \Lambda$. Les dérivées partielles en x, y, vont jouer un rôle très différent des dérivées partielles en t. Appelons $M_{h,k}(\theta;\Omega\times\Lambda)$ la borne supérieure (finie ou infinie) sur $\Omega \times \Lambda$ des modules des dérivées partielles de θ d'ordre $\leqslant h$ en x, y, $\leqslant k$ en t. Si le paramètre t est absent, il suffira de faire $k = 0$ pour retrouver le lemme II (local). La formule que nous allons donner est au fond une amélioration de (13) lorsque φ, P, dépendent d'un paramètre t, et qu'on cherche des majorations des dérivées partielles de φ tant par rapport à x, y, que par rapport au paramètre t.

Lemme III. *On a l'inégalité*

$$M_{h,k}(\varphi; \Omega' \times \Lambda) \leqslant B(h, k; p, \alpha_k; \Omega, \Omega') \sup_{0 \leqslant j \leqslant k} M_{h+p(j+1),k-j}(\psi; \Omega \times \Lambda), \tag{16}$$

la constante B dépendant seulement des quantités entre parenthèses, et non de $\varphi \in \mathscr{E}$.

Nous procéderons par récurrence sur k. Pour $k = 0$, (16) est démontrée car identique à (13). De plus dans ce cas la constante B est indépendante des coefficients de P et dépend seulement de son degré. Supposons (16) démontrée pour $k - 1$, montrons-la pour k. Soit s un indice de dérivation d'ordre $|s| = k$ en t.

La formule de Leibnitz donne :

$$D^s \psi = \sum_{s' \leqslant s} \binom{s}{s'} (D^{s'} \varphi)(D^{s-s'} P) \quad \text{d'où} \tag{17}$$

$$PD^s \varphi = D^s \psi - \sum_{s' < s} \binom{s}{s'} (D^{s'} \varphi)(D^{s-s'} P). \tag{18}$$

Soit Ω'' un ouvert borné de $\mathbb{C}$ tel que $\overline{\Omega''} \subset \Omega$ et $\overline{\Omega'} \subset \Omega''$. L'inégalité (13) appliquée à $D^s \varphi$, pour t fixé quelconque, donne

$$M_h(D^s \varphi; \Omega' \times \Lambda) \leqslant A(h; p; \Omega', \Omega'') M_{h+p}(PD^s \varphi; \Omega'' \times \Lambda).$$

Soit alors r un indice de dérivation en x, y, d'ordre $|r| = h+p$. La formule de Leibnitz nous donnera encore, à partir de (18) :

$$D^r(PD^s \varphi) = D^{r,s} \psi - \sum_{\substack{s' < s \\ r' \leqslant r}} \binom{s}{s'} \binom{r}{r'} (D^{r',s'} \varphi)(D^{r-r',s-s'} P). \tag{19}$$

a) $|D^{r,s} \psi|$ est majoré sur $\Omega'' \times \Lambda$ par $M_{h+p,k}(\psi; \Omega \times \Lambda)$.

b) Examinons les autres termes. Le facteur $\left|D^{r-r',s-s'} P\right|$ est majoré sur $\Omega'' \times \Lambda$ par une constante qui ne dépend que de h, k, Ω'', p, α_k en vertu des hypothèses relatives aux coefficients a_j de P. Quant à $D^{r',s'} \varphi$, c'est une dérivée de φ d'ordre $\leqslant h + p$ en x, y, $\leqslant k - 1$ en t, il est donc majoré dans $\Omega'' \times \Lambda$, d'après la formule(16) supposée vraie pour $k - 1$, par le second membre de cette formule, dans lequel on a remplacé h par $h + p$, k par $k - 1$, et Ω' par Ω''. L'ensemble de toutes ces majorations *a*) et *b*) donne bien (16) pour l'ordre k.

Si nous ne voulons par faire de différence entre les dérivées partielles en x, y, et en t, et faire seulement intervenir l'ordre total de dérivation, nous aurons l'inégalité :

$$M_m(\varphi; \Omega' \times \Lambda) \leqslant B(m; p; \alpha_m; \omega, \Omega') M_{(m+1)p}(\psi; \Omega \times \Lambda). \tag{20}$$

En effet $\sup_{0\leqslant j\leqslant k}(h+(j+1)p+k-j) = h+(k+1)p$, et $\sup_{m=h+k}(h+(k+1)p) = (m+1)p$.

On peut faire des majorations analogues aux précédentes dans le domaine réel, mais avec des différences essentielles.

À la place du lemme II, nous aurons :

Lemme II bis. *Si P est un polynome unitaire de degré p de la variable réelle x :*

$$P(x) = x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_{p-1}x + a_p, \tag{21}$$

si $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$, et si on pose $\psi = P\varphi$, on a l'inégalité

$$M_m(\varphi) \leqslant A'(m;p)\, d^{-m-r} M_{m+q}(\psi), \tag{22}$$

la constante $A'(m;p)$ dépendant seulement de m et p, et non des coefficients de P ni de $\varphi \in \mathscr{E}$; q est le nombre de racines réelles de P, $r = p - q$ le nombre de racines non réelles, d le minimum des valeurs absolues des parties imaginaires des racines non réelles. Si $r = 0$, d^{-m-r} doit être remplacé par 1.

Écrivons en effet $P = QR$, Q (*resp.* R) étant un polynome unitaire en x à racines réelles (*resp.* non réelles). Appelons $L(m;r)$ la borne supérieure des modules (sur l'axe réel) des dérivées d'ordre $\leqslant m$ de $1/R_1$, R_1 parcourant la famille de tous les polynomes unitaires en x de degré r dont les racines sont complexes et de partie imaginaire au moins égale à 1 en valeur absolue [cette quantité est finie, comme on le voit par récurrence sur r, en posant $R_1 = (x - z_1)R_2$, $|\Im z_1| \geqslant 1$, et en appliquant la formule de Leibniz à $1/R_1 = (1/(x-z_1))(1/R_2)$]. Posons alors $x = \xi d$; $R(x) = R(\xi d) = d^r R_1(\xi)$, R_1 étant un polynome du type précédent. On aura alors, en posant $D_x = d/dx$, $D_\xi = d/d\xi$:

$$D_x^m(1/R) = d^{-m} D_\xi^m(1/R) = d^{-m-r} D_\xi^m(1/R_1), \quad \text{d'où} \tag{23}$$

$$|D_x^m(1/R)| \leqslant d^{-r-m} L(m;r). \tag{24}$$

On peut écrire $\varphi = (R\varphi)(1/R)$, de sorte que la formule de Leibniz

$$D^m\varphi = \sum_{m'\leqslant m} \binom{m}{m'} D^{m'}(R\varphi) D^{m-m'}(1/R) \tag{25}$$

donne la majoration

$$M_m(\varphi) \leqslant A_1'(m)\, d^{-r-m} L(m;r) M_m(R\varphi). \tag{26}$$

On a ensuite $\theta Q = \psi$, si on pose $\theta = R\varphi$. Comme le polynome Q a toutes ses racines réelles, on utilisera l'inégalité (1), valable par translation pour le polynome non homogène $x - x_o$, x_o réel :

$$M_m(\theta) \leqslant A_2'(m) M_{m+1}((x - x_o)\theta); \tag{27}$$

Une inégalité analogue utilisée q fois de suite, en prenant successivement pour x_o les racines (réelles) de Q, donnera

$$M_m(\theta) \leqslant A'_2(m;q) M_{m+q}(Q\theta), \tag{28}$$

de sorte que (20) et (28) donnent (22).

La différence entre (12) et (22) saute aux yeux ; dans (22) on ne monte que jusqu'aux dérivées d'ordre $m+q \leqslant m+p$, par contre il y a au dénominateur une puissance de d. Il n'y a pas d'espoir de faire disparaître cette puissance quitte à monter plus haut dans les dérivations ; par exemple pour $\varphi = (x-id)^{-r}$, $P=(x-id)^r$, on a $\psi = 1$; ψ est majorée par 1 et toutes ses dérivées par 0, alors que $D^m\varphi = (-1)^m r(r+1)\cdots(r+m-1)(x-id)^{-(m+r)}$ a un maximum du module (atteint pour $x=0$) qui contient d^{m+r} au dénominateur.

Il existe une forme locale pour le lemme II bis comme pour le lemme II. Passons maintenant au correspondant du lemme III. Prenons pour V la variété $\Omega \times \Lambda$, ω étant un ouvert de la droite réelle $\mathbb{R}$ de la variable x, Λ un ouvert de l'espace T^ℓ de la variable $t = (t_1, t_2, \ldots, t_\ell)$. P sera un polynome unitaire de degré p en x, à coefficients fonctions indéfiniment différentiables de t :

$$P(x) = x^p + a_1(t)x^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(t)x + a_p(t). \tag{29}$$

On suppose en outre : $a)$ que les fonctions a_j sont bornées pour $t \in \Lambda$, ainsi que toutes leurs dérivées partielles en t ; soit α_m la borne supérieure des modules des dérivées d'ordre $\leqslant m$ des a_j ; $b)$ que le nombre q de racines réelles et le nombre $p-q$ des racines non réelles de P, comme polynome en x, sont indépendants de t ; $c)$ que les valeurs absolues des parties imaginaires des racines non réelles de P sont au moins égales à un nombre $d>0$ indépendant de t. Alors pour $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega \times \Lambda)$, on posera toujours $\psi = P\varphi$, on appellera encore Ω' un ouvert borné de $\mathbb{R}$ tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, et on distinguera les dérivées partielles en x des dérivées partielles en t.

Lemme III bis. *On a l'inégalité*

$$M_{h,k}(\varphi;\Omega'\times\Lambda) \leqslant B(h,k;p,\alpha_k;\Omega,\Omega')d^{-N} \sup_{0\leqslant j\leqslant k} M_{h+(j+1)q,k-j}(\psi;\Omega\times\Lambda), \tag{30}$$

le nombre N qui figure en exposant de d étant

$$N = k\left(h + \frac{(k-1)}{2}q + r + q\right) + h + r. \tag{31}$$

La démonstration est calquée sur celle du lemme III, nous ne la reproduisons pas. Le facteur N qui intervient dans l'exposant de d dépend de h, k, q, r, et la méthode de récurrence montre que, q et r étant fixés, N en tant que fonction de h, k vérifie la relation

$$\begin{aligned} N(h,k) &= N(h+q, k-1) + h + r, \\ N(h,0) &= (h+r) \end{aligned} \tag{32}$$

ce qui donne bien (31).

La divisibilité par une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe

Théorème I. *Si V est une variété analytique complexe connexe à n dimensions complexes, si H_ν, φ_ν, sont des filtres*[3] *de fonctions, H_ν holomorphes sur V, $\varphi_\nu \in \mathscr{E}(V)$ et tels que les H_ν convergent dans $\mathscr{E}(V)$ vers une limite H holomorphe non identiquement nulle, et que les $H_\nu \varphi_\nu$ convergent vers 0 dans $\mathscr{E}(V)$, alors les φ_ν elles-mêmes convergent vers 0 dans $\mathscr{E}(V)$.*

Soit en effet $a \in V$. Soit U_a un voisinage ouvert de a que l'on puisse par une « carte locale » identifier à un voisinage ouvert de 0 dans l'espace $\mathbb{C}^n$ des variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, a étant identifié à 0. On peut, d'après le « Vorbereitungssatz » de Weierstrass[4], supposer que H est équivalente au voisinage de 0 à un polynome distingué en z_1 de degré $p \geqslant 0$, quitte à effectuer pour cela un changement linéaire de coordonnées. Nous considérerons donc un voisinage de 0 dans U_a, ouvert relativement compact, de la forme $\Omega_1 \times \Lambda_1$, où Ω_1 est un ouvert borné du plan complexe de la variable z_1, Λ_1 un ouvert connexe borné de l'espace $\mathbb{C}^{n-1}$ de la variable complexe $\zeta = (z_2, \ldots, z_n)$, et nous supposerons que H est identique, sur un voisinage de $\overline{\Omega_1 \times \Lambda_1}$ dans U_a, au produit

$$\begin{aligned} &H = PJ, \quad J \text{ et } 1/J \text{ holomorphes dans un voisinage de } \overline{\Omega_1 \times \Lambda_1}, \\ &P(z_1, \zeta) = z^p + a_1(\zeta) z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(\zeta) z + a_p(\zeta), \end{aligned} \tag{33}$$

les a_j étant des fonctions holomorphes de ζ dans un voisinage de $\overline{\Lambda_1}$ dans $\mathbb{C}^{n-1}$. Pour $\zeta = 0$, toutes les racines en z_1 de P sont confondues avec $z_1 = 0$; si nous appelons Ω un ouvert $|z_1| < R$ d'adhérence contenue dans Ω_1, $|P(z_1, 0)|$ est borné inférieurement pour $|z_1| = R$; donc si Λ_1 a été choisi assez petit, ce que nous supposerons, $|P(z_1, \zeta)|$ est borné inférieurement pour $|z_1| = R$, $\zeta \in \overline{\Lambda_1}$, et il en sera de même de $|H(z_1, \zeta)|$ puisque $1/J$ est holomorphe. Puisque H_ν converge vers H dans $\mathscr{E}(V)$

[3] Nous employons des filtres pour garder la plus grande généralité, mais en conservant le langage des suites

[4] Voir par exemple Séminaire Cartan, 1951–52. C'est aussi là qu'on trouvera toutes les propriétés utilisées dans la suite, relativement aux fonctions analytiques, aux séries convergentes et aux séries formelles.

donc dans $\mathscr{E}(U_a)$, pour ν « assez grand » $|H_\nu|$ est borné inférieurement par un nombre > 0 fixe pour $|z_1| = R$, $\zeta \in \overline{\Lambda_1}$. Les intégrales classiques de Cauchy montrent alors que les racines en z_1 de H_ν situées dans Ω, pour $\zeta \in \overline{\Lambda_1}$, sont en nombre p, et que leurs fonctions symétriques élémentaires sont des fonctions holomorphes de $\zeta \in \Lambda_1$, continues de $\zeta \in \overline{\Lambda_1}$, convergeant suivant le filtre vers les fonctions symétriques correspondantes des racines de P, uniformément pour $\zeta \in \overline{\Lambda_1}$. Autrement dit le polynome unitaire $P_\nu(z_1, \zeta)$ qui admet ces racines a des coefficients $a_{j;\nu}$ holomorphes en ζ sur Λ_1, continues en ζ sur $\overline{\Lambda_1}$, et convergeant suivant le filtre vers les coefficients a_j de P uniformément pour tout $\zeta \in \overline{\Lambda_1}$. Nous retiendrons seulement ceci : pour ν « assez grand » les $a_{j;\nu}$ et leurs dérivées partielles en ζ de tout ordre restent bornés pour $\zeta \in \Lambda$, si Λ est un voisinage de 0 ouvert de $\mathbb{C}^{n-1}$ tel que $\overline{\Lambda} \subset \Lambda_1$.

D'après l'hypothèse, les $H_\nu \varphi_\nu$ convergent vers 0 dans $\mathscr{E}(V)$ donc aussi dans $\mathscr{E}(U_a)$ et par suite les dérivées partielles de tout ordre de $H_\nu \varphi_\nu = P_\nu(J_\nu \varphi_\nu)$ convergent uniformément vers 0 dans $\Omega \times \Lambda$. Les majorations des coefficients $a_{j;\nu}$ et de leurs dérivées partielles en ζ dans Λ montrent alors, d'après le lemme III, par exemple sous la forme de la formule (20), que les dérivées partielles de tout ordre de $J_\nu \varphi_\nu$ convergent uniformément vers 0 sur $\Omega' \times \Lambda$, si Ω' est un ouvert relativement compact de Ω ; comme Ω' est quelconque, cela prouve que les $J_\nu \varphi_\nu$ convergent vers 0 dans $\mathscr{E}(\Omega \times \Lambda)$.

Mais $1/J_\nu$ s'exprime dans $\Omega \times \overline{\Lambda_1}$ par l'intégrale de Cauchy

$$\frac{1}{J_\nu(z_1, \zeta)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|t|=R} \frac{P_\nu(t, \zeta)}{H_\nu(t, \zeta)} \frac{dt}{z_1 - t} \tag{34}$$

(puisque pour ζ fixé elle est holomorphe en z_1), donc les $1/J_\nu$ sont holomorphes dans $\Omega \times \Lambda_1$, et continues dans $\overline{\Omega \times \Lambda_1}$. Pour $|z_1| = R$, $\zeta \in \overline{\Lambda_1}$, les P_ν convergent uniformément vers P, les H_ν uniformément vers H, et H est partout $\neq 0$, donc les $1/J_\nu$ convergent uniformément vers $1/J$; il en est encore ainsi d'après le principe du maximum dans $\overline{\Omega \times \Lambda_1}$, et par suite les $1/J_\nu$ convergent uniformément vers $1/J$ dans $\mathscr{E}(\Omega \times \Lambda)$. Alors les $\varphi_\nu = (1/J_\nu)(J_\nu \varphi_\nu)$ convergent vers 0 dans $\mathscr{E}(\Omega \times \Lambda)$. Comme enfin la convergence vers 0 dans $\mathscr{E}(V)$ est de caractère local, et que les $\Omega \times \Lambda$ définis à partir des U_a associés aux points a de V forment un recouvrement de V, φ_ν converge vers 0 suivant le filtre dans $\mathscr{E}(V)$, *CQFD.*

Remarque. Le théorème I est évidemment valable si on remplace les *fonctions* $\varphi \in \mathscr{E}(V)$ par des *formes différentielles* (les H étant toujours des *fonctions* holomorphes).

COROLLAIRE I. *La multiplication* $\varphi \mapsto H\varphi$, *opération linéaire continue de* $\mathscr{E}(V)$ *dans lui-même, est un monomorphisme*[(5)] *si la fonction holomorphe* H *n'est pas identiquement nulle. Elle reste « équimonomorphique » si* H *parcourt un compact* $\mathscr{G}$ *de* $\mathscr{E}(V)$ *ne contenant pas la fonction* 0.

Dire que l'opération est un monomorphisme, c'est dire que si $H\varphi_\nu$ converge vers 0, φ_ν aussi converge vers 0 ; c'est le cas particulier du théorème I où les H_ν sont tous identiques à H. Un ensemble $\mathbf{A}$ d'opérations linéaires continues A de $\mathscr{E}(V)$ dans lui-même est dit « équimonomorphique » si, quel que soit le voisinage de 0, $\mathscr{W}$, de $\mathscr{E}(V)$, il en existe un autre $\mathscr{V}$ tel que $A\varphi \in \mathscr{V}$ pour au moins un $A \in \mathbf{A}$ entraîne $\varphi \in \mathscr{W}$.

Supposons que l'énoncé du corollaire soit faux. Il existe alors un voisinage de 0, $\mathscr{W}$, de $\mathscr{E}(V)$, et une suite fondamentale de voisinages de 0, $\mathscr{V}_\nu$, à laquelle on peut associer une suite de fonctions $\varphi_\nu \in \mathscr{E}(V)$ et $H_\nu \in \mathscr{G}$, telles que $H_\nu\varphi_\nu \in \mathscr{V}_\nu$, et que néanmoins $\varphi_\nu \in \complement\mathscr{W}$. Comme $\mathscr{G}$ est compact, on peut toujours, en extrayant au besoin une suite partielle, supposer que H_ν converge pour $\nu \to \infty$ vers H non identiquement nulle ; comme $H_\nu\varphi_\nu$ converge vers 0, φ_ν doit converger vers 0 d'après le théorème, ce qui contredit l'hypothèse $\varphi_\nu \in \complement\mathscr{W}$.

COROLLAIRE II. *Si on appelle* $\mathscr{E}_*(V)$ *le complémentaire de* $\{0\}$ *dans* $\mathscr{E}(V)$, *l'ensemble des* $(\alpha, H) \in \mathscr{E}(V) \times \mathscr{E}_*(V)$ *tels que* H *soit une fonction holomorphe et* α *divisible par* H, *est fermé dans* $\mathscr{E}(V) \times \mathscr{E}_*(V)$.

Soit en effet (α_ν, H_ν) un filtre d'éléments de cet ensemble qui tende vers $(\alpha, H) \in \mathscr{E}(V) \times \mathscr{E}_*(V)$. D'abord H est holomorphe (et non identiquement nulle par hypothèse). Nous devons montrer que α est divisible par H. Posons $\alpha_\nu = H_\nu\varphi_\nu$. Montrons que les φ_ν forment un filtre de Cauchy dans $\mathscr{E}(V)$. On a

$$\varphi_\mu - \varphi_\nu = \frac{\alpha_\mu}{H_\mu} - \frac{\alpha_\nu}{H_\nu} = \frac{\alpha_\mu H_\nu - \alpha_\nu H_\mu}{H_\mu H_\nu}\,; \quad \text{ou } \alpha_\mu H_\nu - \alpha_\nu H_\mu = H_\mu H_\nu(\varphi_\mu - \varphi_\nu).$$

Pour le filtre produit, les fonctions $\alpha_\mu H_\nu - \alpha_\nu H_\mu$ convergent vers 0 dans $\mathscr{E}(V)$; les $H_\mu H_\nu$ convergent vers H^2 non identiquement nulle ; donc d'après le théorème I, les $\varphi_\mu - \varphi_\nu$ convergent bien vers 0 dans $\mathscr{E}(V)$. Comme $\mathscr{E}(V)$ est complet, les φ_ν ont une limite φ ; alors les α_ν convergent vers $H\varphi$, qui est donc égal à α, ce qui prouve que α est divisible par H, *CQFD*.

Dans le cas où H est fixe, on en déduit en particulier :

[(5)] G et H étant deux espaces vectoriels topologiques, une application linéaire continue u de G dans H est un monomorphisme (*resp.* épimorphisme) si elle définit un isomorphisme, algébrique et topologique, de G sur $u(G)$ (*resp.* de $G/u^{-1}(0)$ sur H).

Corollaire III. *Dans l'algèbre topologique* $\mathscr{E}(V)$, *l'idéal principal* (H) *engendré par une fonction holomorphe* H *est fermé.*

(On peut le déduire directement du corollaire I : la multiplication par H étant un isomorphisme de $\mathscr{E}(V)$ sur (H), (H) est complet comme $\mathscr{E}(V)$, donc fermé [démonstration valable si $H \neq 0$; pour $H = 0$, le corollaire est évident]).

Corollaire IV (division par H). *Si* H *est holomorphe* $\neq 0$, *quel que soit le courant*[6] $T \in \mathscr{D}'(V)$, *il existe un courant* $X \in \mathscr{D}'(V)$ *tel que* $HX = T$.

En effet, puisque la multiplication par H est un monomorphisme dans $\mathscr{E}(V)$, sa transposée, qui est aussi la multiplication par H, est une application du dual $\mathscr{E}'(V)$ *sur* lui-même. Autrement dit, quel que soit le courant $T \in \mathscr{E}'(V)$, il existe un courant $X \in \mathscr{E}'(V)$ tel que $HX = T$. Cela prouve que la division est possible localement ; elle est donc possible globalement. Précisons. Soit $T \in \mathscr{D}'(V)$. Soit $(U_j)_{j=1,2,\ldots}$ un recouvrement localement fini de V par des ouverts relativement compacts. Décomposons, par partition de l'unité, T en une somme $T = \sum_j T_j$, T_j ayant son support (compact) dans U_j. Il existe donc un courant X_j tel que $HX_j = T_j$. On peut toujours supposer que X_j a aussi son support dans U_j, sans quoi il suffira de le multiplier par une fonction appartenant à $\mathscr{D}(U_j)$, égale à 1 sur un voisinage du support de T_j. Alors la somme $X = \sum_j X_j$ est localement finie donc convergente dans $\mathscr{D}'(V)$ et vérifie bien $HX = T$.

Théorème II. *Pour qu'une fonction* $\alpha \in \mathscr{E}(V)$ *soit divisible dans l'algèbre* $\mathscr{E}(V)$ *par une fonction holomorphe* H *(*V *étant une variété analytique complexe), il faut et il suffit qu'en chaque point* a *de* V *la série formelle* $T_a\alpha$ *soit divisible, dans l'algèbre des séries formelles en* a, *par la série formelle (convergente) de* H.

À chaque point a de V, on peut associer l'idéal $\mathscr{I}_a$ des fonctions « plates » en a, c.a.d. des fonctions de $\mathscr{E}(V)$ qui, sur au moins une carte locale d'un voisinage de a, sont nulles ainsi que toutes leurs dérivées successives en a, auquel cas il en est de même dans toute carte locale d'un voisinage de a. Soit T_a la projection canonique de $\mathscr{E}(V)$ sur l'algèbre quotient $\mathscr{E}_a$. On sait[7] que $\mathscr{E}_a$ est isomorphe (non canoniquement) à l'algèbre des séries formelles à $2n$ variables $z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \ldots, z_n, \overline{z}_n$; une carte locale définit précisément un tel isomorphisme, la série associée à $\alpha \in \mathscr{E}(V)$

[6] Les courants de De Rham sont les distributions-formes différentielles. Voir De Rham-Kodaira, « Harmonic Integrals », Institute for Advanced Study, Princeton, 1950 ; et De Rham, « Variétés différentiables ; formes, courants, formes harmoniques », Paris, Hermann, 1955.

[7] Cette propriété est connue, quoique ne semblant figurer nulle part explicitement dans la littérature. Nous en donnons, dans l'appendice II, une démonstration due à Grothendieck.

étant son développement de Taylor (formel) en a suivant les $z_j, \overline{z}_j$. C'est pourquoi $T_a\alpha$ sera appelé la série formelle de $\alpha \in \mathscr{E}(V)$ en $a \in V$.

Bien évidemment, si $\alpha = H\beta$, $\beta \in \mathscr{E}(V)$, on a $T_a\alpha = (T_aH)(T_a\beta)$; de sorte que si α est divisible par H la série formelle de α en tout point a de V est divisible par la série formelle de H. C'est la réciproque qui n'est pas triviale. Supposons donc $T_a\alpha$ divisible par T_aH dans $\mathscr{E}_a$ pour tout $a \in V$ (il suffit évidemment de le supposer pour les points a de l'ensemble analytique d'équation $H = 0$). Cela signifie que $T_a\alpha$ appartient à l'idéal principal (T_aH) dans $\mathscr{E}_a$; mais (T_aH) n'est autre que l'image $T_a(H)$ par T_a de l'idéal principal (H). D'après un théorème de Whitney[7*], puisque $T_a\alpha$ appartient à $T_a(H)$ pour tout a de V, α appartient à l'adhérence $\overline{(H)}$ de l'idéal (H) dans $\mathscr{E}(V)$; d'après le corollaire III du théorème I, (H) est fermé, donc $\alpha \in (H)$, *CQFD*.

THÉORÈME III. *Soient A et B deux fonctions holomorphes sur V telles que, pour tout point a de V, A et B soient premières entre elles dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en a. Si α est une fonction indéfiniment différentiable, et si αA est divisible par B dans $\mathscr{E}(V)$, alors α est divisible par B.*

D'abord l'anneau des germes de fonctions holomorphes en a est isomorphe à l'anneau des séries « convergentes » à n variables $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$. Les séries convergentes T_aA, T_aB, premières entre elles dans l'anneau précédent, le sont encore dans l'anneau des séries convergentes à $2n$ variables $\zeta_1, \overline{\zeta}_1, \zeta_2, \overline{\zeta}_2, \dots, \zeta_n, \overline{\zeta}_n$, et aussi dans l'anneau des séries formelles par rapport à ces $2n$ variables, c.a.d. dans $\mathscr{E}_a$[8]. Mais l'anneau $\mathscr{E}_a$ des séries formelles en a est factoriel ; alors comme T_aA et T_aB sont premières entre elles dans $\mathscr{E}_a$, et que T_aB divise le produit $(T_a\alpha)(T_aA)$ (puisque B divise αA), T_aB

[7*] WHITNEY : « Ideals of differentiable functions », Amer. J. Math., vol. 70 (1948), pp. 635-658.

[8] Pour que 2 polynomes unitaires, à coefficients dans un anneau L d'intégrité commutatif intégralement clos dans son corps des fractions, soient premiers entre eux, il faut et il suffit que leur résultant R soit $\neq 0$. R est un élément de L, polynome à coefficients entiers par rapport aux coefficients des deux polynomes. Si alors M est un anneau du même type contenant L, le résultant reste le même lorsqu'on considère les 2 polynomes comme ayant leurs coefficients dans M, et par suite si les 2 polynomes sont premiers entre eux en tant que polynomes à coefficients dans L, ils restent premiers entre eux en tant que polynomes à coefficients dans M. Moyennant un changement éventuel de coordonnées locales, les 2 séries formelles considérées dans le texte sont équivalentes, d'après le Vorbereitungssatz de Weierstrass, à 2 polynomes distingués unitaires en ζ_1, à coefficients dans l'anneau L des séries convergentes de $\zeta_2, \dots, \zeta_n$. On les considère ensuite comme polynomes en ζ_1 à coefficients dans l'anneau M des séries formelles en $\overline{\zeta}_1, \zeta_2, \overline{\zeta}_2, \dots, \zeta_n, \overline{\zeta}_n$. Il suffit donc d'appliquer ce que nous venons de dire, en se rappelant que 2 séries convergentes (*resp.* formelles) sont premières entre elles si et seulement si leurs polynomes distingués équivalents sont premiers entre eux.

divise $T_a\alpha$ (théorème de Gauss). Mais ceci est vrai pour tout point a de V, donc, d'après le théorème II, B divise α, *CQFD.*

Remarque. Si A et B sont deux fonctions holomorphes sur V, et si elles sont premières entre elles dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en $a \in V$, elles sont aussi premières entre elles dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en b pour tout b assez voisin de a. Il s'agit d'une condition locale et non ponctuelle. Nous dirons que A et B sont *localement premières entre elles* sur V si cette propriété est vérifiée pour tout $a \in V$. Cela signifie que les ensembles analytiques d'équations respectives $A = 0$, $B = 0$, n'ont pas de branche commune.

COROLLAIRE I. *Si A et B sont localement premières entre elles sur V, toute fonction $\alpha \in \mathscr{E}(V)$ divisible par A et par B dans $\mathscr{E}(V)$ est divisible par leur produit AB.*

Posons en effet $\alpha = \beta A$. B divise ce produit et est première localement avec A, donc divise β d'après le théorème, et AB divise bien α.

COROLLAIRE II. *Tout germe $\widetilde{\alpha}$ de fonction indéfiniment différentiable en 0 dans $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, non plat (c.a.d. de série formelle non nulle), admet, dans l'anneau $\widetilde{\mathscr{E}}_0$ des germes de fonctions indéfiniment différentiables en 0, une décomposition, unique à des facteurs inversibles près :*

$$\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta}\widetilde{H}, \tag{35}$$

où β n'a pas de diviseur holomorphe non inversible, et où $\widetilde{H}$ est le « plus grand » diviseur holomorphe de $\widetilde{\alpha}$ dans $\widetilde{\mathscr{E}}_0$.

Rappelons d'abord les notions relatives aux germes. Si dans l'ensemble des fonctions numériques définies au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ on établit la relation d'équivalence $f \sim g$ si f et g coïncident au voisinage de 0, le quotient possède une structure d'algèbre. La classe d'une fonction f s'appelle germe de f en 0, et se note $\widetilde{f}$. Les germes de fonctions indéfiniment différentiables ou holomorphes forment des sous-anneaux du précédent. Naturellement l'anneau $\mathscr{E}_0$ des séries formelles en 0, quotient de $\mathscr{E}(\mathbb{C}^n)$, est aussi le quotient de l'anneau $\widetilde{\mathscr{E}}_0$ des germes de fonctions indéfiniment différentiables en 0 par l'idéal des germes plats en 0 (le corollaire I peut s'énoncer pour des germes en 0). Soit alors $\widetilde{H}_j$ un germe de fonction holomorphe en 0, irréductible dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes. Il existe un plus grand entier $p_j \geqslant 0$ tel que $\widetilde{\alpha}$ soit divisible par $\widetilde{H}_j^{p_j}$ car la série formelle $T_0\alpha$, non nulle par hypothèse, doit être divisible par $T_0 H_j^{p_j}$. D'après le corollaire I, $\widetilde{\alpha}$ est divisible par tout produit fini des $\widetilde{H}_j^{p_j}$, donc, toujours parce que $T_0\alpha$ n'est pas nulle, les $p_j \neq 0$ sont en nombre fini. Posons alors $\widetilde{H} = \prod_j \widetilde{H}_j^{p_j}$. $\widetilde{\alpha}$ est divisible par $\widetilde{H}$, et si on pose $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta}\widetilde{H}$, $\widetilde{\beta}$ est évidemment dans $\widetilde{\mathscr{E}}_0$ sans diviseur holomorphe non inversible. Enfin $\widetilde{H}$ est bien le plus grand diviseur holomorphe de $\widetilde{\alpha}$ dans $\widetilde{\mathscr{E}}_0$, en ce sens que tout diviseur holomorphe de $\widetilde{\alpha}$ divise $\widetilde{H}$; en effet un tel diviseur est nécessairement de la forme $\prod_j \widetilde{H}_j^{q_j}$, chaque facteur $\widetilde{H}_j^{q_j}$ doit diviser $\widetilde{\alpha}$, donc $q_j \leqslant p_j$ d'après le choix des p_j, donc ce diviseur divise $\widetilde{H}$, *CQFD.*

Remarques. 1.°) Si $\widetilde{\alpha}$ est plate, les entiers p_j qui interviennent dans la démonstration du corollaire II devraient éventuellement être remplacés par $+\infty$ (par exemple la fonction $\exp(-1/H\overline{H})$ est indéfiniment dérivable et divisible par toute puissance finie de H). Dans ce cas il ne saurait y avoir de décomposition (35). Toutefois (35) existe si tous les p_j sont finis, et dans tous les cas, les diviseurs holomorphes de $\widetilde{\alpha}$ sont les produits finis $\prod_j \widetilde{H}_j^{q_j}$, q_j fini $\leqslant p_j$.

2.°) Il n'y a évidemment aucune théorie de la divisibilité locale dans le seul cadre des germes de fonctions indéfiniment différentiables en 0. Considérons par exemple deux fonctions f et g de la variable réelle x, indéfiniment différentiables, qui ne sont $\neq 0$ qu'à l'intérieur des intervalles $(1, 1/2)$, $(1/3, 1/4)$, $(1/5, 1/6), \ldots$ où f est > 0 et g est < 0. Appelons alors h et k les fonctions de x obtenues en échangeant f et g dans une infinité de ces intervalles et en conservant f et g dans une infinité complémentaire de ces intervalles, et là où elles sont nulles. Alors h et k sont encore indéfiniment différentiables ; en tout point x, on a ou bien $h(x) = f(x)$, $k(x) = g(x)$, ou bien $h(x) = g(x)$, $k(x) = f(x)$, donc toujours $h(x) + k(x) = f(x) + g(x)$, et $h(x)k(x) = f(x)g(x)$. Alors le germe en 0 de la fonction de deux variables x, y réelles

$$\alpha(x, y) = (y - f(x))(y - g(x)) = (y - h(x))(y - k(x))$$

(de série formelle y^2 à l'origine) a deux décompositions $\widetilde{A}\widetilde{B} = \widetilde{C}\widetilde{D}$ en produits de deux facteurs irréductibles (car la série formelle de chaque facteur, réduite à y, est irréductible dans l'anneau des séries formelles) qui ne sont pas équivalentes, car l'ensemble $A = 0$ ne coïncide avec aucun des ensembles d'équations $C = 0$, $D = 0$, au voisinage de l'origine. Remarquons cependant que si nous avons là un contre-exemple dans une théorie des germes en 0, ce n'est pas un contre-exemple dans une théorie globale. En effet les fonctions A et C, aussi bien que A et D, ne sont pas premières entre elles dans l'anneau des germes de fonctions indéfiniment différentiables en *tout* point de $\mathbb{R}^2$ (si x_o est un point où $f(x_o) = h(x_o) \neq 0$, et si y_o est la valeur commune, alors au voisinage du point x_o, y_o, les deux fonctions A et C coïncident).

Pour le théorème suivant, nous énoncerons d'abord un lemme algébrique :

Lemme IV. *Si H est une série convergente à n variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$, à coefficients complexes, sans facteur carré non inversible dans l'anneau des séries convergentes, si A est une série formelle en $z_1, z_2, \ldots, z_n$, et si A s'annule sur toutes les courbes analytiques $z_j = \theta_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, passant par l'origine et annulant H, alors A est divisible par H dans l'anneau des séries formelles.*

(Série convergente veut dire : absolument convergente pour des valeurs assez petites des $|z_j|$). Une courbe analytique passant en 0 est définie par des séries convergentes $z_j = \theta_j(t)$ à coefficients complexes de la variable t sans terme constant. De telles séries peuvent être substituées dans A et H ; on obtient alors des séries formelle (pour A), convergente (pour H), de la variable t. On dit alors que A ou H s'annule sur la courbe analytique si la substitution précédente dans A ou H donne 0. (Dans le cas de H, cela veut dire que la courbe analytique est tracée sur l'ensemble $\mathbf{H}$ d'équation $H = 0$, pour t complexe assez voisin de 0). Le lemme est un « Nullstellensatz » en séries formelles. On pourrait le généraliser en supposant H série formelle, mais alors il faudrait remplacer les séries convergentes θ_j par des séries formelles(9).

Théorème IV. *Soit H une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe V, localement sans facteur carré non inversible. Pour que $\alpha \in \mathscr{E}(V)$ soit divisible par H^m dans $\mathscr{E}(V)$, il faut et il suffit que ses dérivées d'ordre $\leqslant m-1$ en z, quelconque en $\overline{z}$, soient nulles sur l'ensemble analytique $\mathbf{H}$ d'équation $H = 0$.*

La condition et évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Remarquons qu'on ne peut pas parler globalement des dérivées partielles de α ; mais le fait que toutes les dérivées partielles

$$D^r_{(z)} D^s_{(\overline{z})} = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{r_1} \left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{r_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{r_n} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}\right)^{s_1} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right)^{s_n}$$

$|r| \leqslant m-1$, s quelconque, soient nulles en un point a de V, sur une carte locale d'un voisinage de a, entraîne la même propriété sur toute autre carte locale d'un voisinage de a, et a donc un sens intrinsèque.

Supposons d'abord $m = 1$. D'après le théorème II, nous devons simplement montrer que la série formelle $T_a\alpha$ est divisible par la série convergente T_aH, quel que soit $a \in V$. Pour cela, prenons une carte locale d'un voisinage de a, de coordonnées locales $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. D'après l'hypothèse, α s'annulant sur $\mathbf{H}$, la série formelle s'annule sur toute courbe analytique

(9) Voir à l'appendice I la démonstration de ce lemme.

complexe tracée sur **H**, définie par des substitutions $z = \theta(t)$, ou $z_j = \theta_j(t)$, $\overline{z}_j = \overline{\theta_j(t)}$, où les θ_j sont des séries convergentes sans terme constant annulant H, les $\overline{\theta_j}$ étant les complexes conjuguées. La série formelle de α s'écrit

$$T_a\alpha = \sum_s \overline{z}^s \alpha_s(z), \tag{36}$$

où α_s est une série formelle en z. La substitution $\theta, \overline{\theta}$, ci-dessus, dans $T_a\alpha$, donne une série formelle en $t, \overline{t}$, qui doit être nulle. Ses termes indépendants de $\overline{t}$ forment une série formelle en t, qui n'est autre que $\alpha_0(\theta(t))$. Donc la série formelle $\alpha_0(z)$ doit être annulée par toutes les substitutions $z = \theta(t)$ qui annulent T_aH, et comme par hypothèse T_aH est sans facteur carré non inversible dans l'anneau des séries convergentes en a, le Lemme IV montre que α_0 est divisible par T_aH. Mais toute dérivée partielle $(1/s!)D^s_{(\overline{z})}\alpha$ s'annule sur **H** comme α ; les termes indépendants de $\overline{z}$ dans la série formelle correspondante forment une série formelle α_s en z, donc α_s est aussi divisible par T_aH. Cela prouve finalement que $T_a\alpha$ est divisible par T_aH, donc α par H dans $\mathscr{E}(V)$ (théorème II).

Supposons maintenant m quelconque $\geqslant 2$. Raisonnons par récurrence, supposons la propriété vraie pour $m-1$, montrons-la pour m. Le théorème étant démontré pour $m-1$, α est divisible par H^{m-1} ; posons $\alpha = \beta H^{m-1}$, $\beta \in \mathscr{E}(V)$, et montrons que β est divisible par H. Cette propriété étant locale, démontrons-la au voisinage d'un point a, et comme une multiplication de H par une fonction holomorphe inversible ne change rien au problème, nous pouvons nous placer dans $\mathbb{C}^n$ et supposer que H est un polynome distingué en z_1. Le fait que H soit sans facteur carré non inversible au voisinage de a signifie alors que H et $\partial H/\partial z_1$ sont premières entre elles au voisinage de a.

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z_1} = \frac{\partial\beta}{\partial z_1} H^{m-1} + \beta \frac{\partial H}{\partial z_1} H^{m-2}.$$

Le premier membre est nul ainsi que ses dérivées partielles d'ordre $\leqslant m-2$ en z, quelconque en $\overline{z}$ sur **H**, il en est de même du terme qui contient H^{m-1} en facteur dans le second membre ; donc le deuxième terme du second membre a la même propriété. Cela prouve que $\beta(\partial H/\partial z_1)H^{m-2}$ est divisible par H^{m-1} au voisinage de a, toujours à cause du théorème supposé démontré pour $m-1$. Donc $\beta\partial H/\partial z_1$ est divisible par H au voisinage de a. Comme H et $\partial H/\partial z_1$ sont premières entre elles au voisinage de a, le théorème III montre que H divise β au voisinage de a, donc α est divisible par H^m au voisinage de a, et par suite sur V.

THÉORÈME V. *Si* $\alpha \in \mathscr{E}(V)$ *est divisible par une fonction holomorphe* H *dans le complémentaire* $\complement S$ *d'un ensemble analytique* S *de dimension complexe* $\leqslant n-2$, α *est divisible par* H *dans* $\mathscr{E}(V)$.

Montrons d'abord le théorème lorsque H est localement sans facteur carré non inversible. De l'hypothèse résulte que les dérivées partielles de α d'ordre quelconque en $\overline{z}$ sont nulle sur l'ensemble analytique $\mathbf{H}$ d'équation $H=0$, dans $\complement S$. Mais $\complement S \cap \mathbf{H}$ est dense dans $\mathbf{H}$, parce que la dimension complexe de S est $\leqslant n-2$, donc elles sont nulles partout sur $\mathbf{H}$ par continuité, et d'après le théorème IV, α est divisible par H partout.

Passons au cas général. Au voisinage de tout point a de V, H est un produit de facteurs H_j distincts ou non, irréductibles en tant que germes en a, donc localement sans facteur carré non inversible dans tout un voisinage V_a de a. Alors α est divisible par H_1 dans $V_a \cap \complement S$, donc dans V_a ; posons $\alpha = \alpha_1 H_1$, $\alpha_1 \in \mathscr{E}(V_a)$. Mais α_1 est divisible par H_2 dans $V_a \cap \complement S$ (puisque α était divisible par H) donc dans V_a ; posons $\alpha_1 = \alpha_2 H_2$, *etc.* Ainsi de proche en proche nous montrons que α est divisible par le produit des H_j donc par H au voisinage de a et par suite dans V, *CQFD.*

COROLLAIRE. *Pour que* $\alpha \in \mathscr{E}(V)$ *soit divisible par la fonction holomorphe* H, *il suffit que* $T_a\alpha$ *soit divisible par* T_aH *pour tout* a *non singulier de l'ensemble analytique* $\mathbf{H}$ *d'équation* $H=0$.

En effet $T_a\alpha$ est aussi divisible par T_aH lorsque a n'appartient pas à $\mathbf{H}$. Alors $T_a\alpha$ est divisible par T_aH pour tout point $a \in \complement S$, S étant l'ensemble des points singuliers de $\mathbf{H}$. D'après le théorème II, α est divisible par H sur $\complement S$, et comme S est de dimension $\leqslant n-2$, α est divisible par H dans $\mathscr{E}(V)$.

THÉORÈME VI. *Si* $\alpha \in \mathscr{E}(V)$ *est divisible par une fonction holomorphe* H *sur le complémentaire d'un ensemble analytique* $S \supset \mathbf{H}$, *et si le quotient par* H *de toute dérivée partielle en* $\overline{z}$ *de* α *est borné sur* S *au voisinage de tout point de* V, α *est divisible par* H *dans* $\mathscr{E}(V)$.

Supposons d'abord que H soit sans facteur carré non inversible au voisinage d'un point a de V. Si $D^s_{(\overline{z})}\alpha/H$ est borné au voisinage de a dans $\complement S$, nécessairement $D^s_{(\overline{z})}\alpha$ est nulle sur $\mathbf{H}$; le théorème IV prouve alors que α est divisible par H au voisinage de a.

Dans le cas général, H s'écrit toujours au voisinage de a comme produit $H_1H_2\cdots$ d'un nombre fini de fonctions holomorphes sans diviseur carré non inversible au voisinage de a. Comme $D^s_{(\overline{z})}\alpha/H_1$ est borné sur $\complement S$ au voisinage de a, α est divisible par H_1. On pose ensuite $\alpha = \alpha_1 H_1$, alors $D^s_{(\overline{z})}\alpha = (D^s_{(\overline{z})}\alpha_1)H_1$, de sorte que, $D^s_{(\overline{z})}\alpha/H_1H_2$ étant borné dans $\complement S$ au voisinage de a, il en est de même de $D^s_{(\overline{z})}\alpha_1 H_2$, donc α_1 est divisible par H_2, et ainsi de suite, *CQFD*.

Formes différentielles semi-méromorphes

Dans un article antérieur[(10)], nous avons appelé forme différentielle *semi-méromorphe* sur une variété analytique complexe V une forme différentielle φ définie presque partout, telle que, pour chaque point a de V, il existe une fonction holomorphe L définie au voisinage de a et non identiquement nulle, dont le produit par φ soit presque partout égal au voisinage de a à une forme différentielle (définie partout) indéfiniment différentiable. (Il conviendrait alors d'appeler semi-holomorphe une forme différentielle presque partout égale à une forme indéfiniment différentiable). Les fonctions holomorphes L ayant cette propriété définissent, si on leur adjoint la fonction 0, un idéal de l'anneau des germes de fonctions holomorphes en a. Nous allons voir que *cet idéal est principal*. Pour simplifier les notations, étant entendu que : « au voisinage de a » veut dire : « dans un voisinage (variable) de a », nous identifierons fonctions et ensembles avec leur germe en a. Soit alors H holomorphe telle que $H\varphi = \alpha$ soit indéfiniment différentiable au voisinage de a. Si α et H ont un diviseur commun K holomorphe, on peut remplacer α et H par (α/K) et (H/K) ; on peut donc toujours par réduction se ramener au cas où α et H n'ont pas de diviseur commun holomorphe non inversible. H *étant ainsi choisi*, et L étant une fonction holomorphe quelconque telle que $\varphi L = \beta$ soit indéfiniment différentiable au voisinage de a, nous allons montrer que L est multiple de H au voisinage de a. On a au voisinage de a : $L\alpha = H\beta$. Soit D le *pgcd* de H et L dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en a. On a aussi $(L/D)\alpha = (H/D)\beta$. Mais alors H/D, premier avec (L/D), et divisant $(L/D)\alpha$, doit diviser α (théorème III) ; comme α et H sont sans facteur commun holomorphe non inversible, cela prouve que H/D est inversible au voisinage de a, donc $D = H$ au voisinage de a à un facteur inversible près, autrement dit H divise bien L au voisinage de a, *CQFD*.

Une forme différentielle semi-méromorphe a un « ensemble polaire », ensemble des points de V au voisinage desquels elle n'est pas semi-holomorphe. On peut toujours supposer que la forme est définie sur le complémentaire de son ensemble polaire. Au voisinage de tout point a de V, l'ensemble polaire S est contenu dans l'ensemble analytique $\mathbf{H}$ d'équation $H = 0$, si (H) est l'idéal principal défini plus haut. Il n'est

[(10)] « Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe », Colloque de Géométrie différentielle (Strasbourg, 1953).

contenu au voisinage de a dans aucun ensemble analytique strictement plus petit. Supposons en effet $\widetilde{H}_a$ non identiquement nulle. Tout d'abord S n'est pas contenu dans un ensemble analytique de dimension complexe $\leqslant n-2$, d'après le théorème V. D'autre part il n'est pas contenu non plus dans un ensemble analytique de dimension complexe $n-1$ strictement plus petit que $\mathbf{H}$. Dans ce cas en effet on pourrait écrire au voisinage de a : $H = H_1 H_2$, H_1 et H_2 étant premières entre elles, non inversibles, l'ensemble polaire S étant contenu dans l'ensemble $\mathbf{H}_1$ d'équation $H_1 = 0$. La forme $H_1\varphi$ aurait alors son ensemble polaire contenu dans celui de φ, c.a.d. dans $\mathbf{H}_1$, et en outre contenu dans $\mathbf{H}_2$, puisque son produit par H_2, soit $H\varphi$, est indéfiniment différentiable ; il serait donc contenu dans $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$, donc de dimension complexe $\leqslant n-2$, donc vide (théorème V), ce qui obligerait H_1 à appartenir à l'idéal principal (H), contrairement à l'hypothèse.

On peut réunir les résultats précédents, ainsi que les théorèmes V et VI (compte tenu de ce que $D^s_{(\overline{z})}(\alpha/H) = (1/H)D^s_{(\overline{z})}\alpha$), dans le théorème suivant :

THÉORÈME VII. *Soit φ une forme différentielle semi-méromorphe sur une variété analytique complexe V, de dimension complexe n. À tout point a de V correspond un idéal principal (H) de l'anneau des germes de fonctions holomorphes en a : (H) est l'idéal des fonctions holomorphes L définies au voisinage de a dont le produit par φ est semi-holomorphe au voisinage de a. L'ensemble polaire de φ est contenu au voisinage de a dans l'ensemble analytique $\mathbf{H}$ d'équation $H = 0$, et dans aucun ensemble analytique strictement plus petit. Toute forme semi-méromorphe, semi-holomorphe dans le complémentaire d'un ensemble analytique de dimension complexe $\leqslant n-2$, est semi-holomorphe ; toute forme semi-méromorphe bornée ainsi que chacune de ses dérivées partielles en z au voisinage de tout point de V, est semi-holomorphe.*

Remarque. La considération des dérivées partielles en z est évidemment inévitable : $\overline{H}/H$ est bornée en module par 1 et n'est pas semi-holomorphe.

Problèmes ouverts

Les questions traitées ici soulèvent malheureusement plus de problèmes qu'elles n'en résolvent.

1.°) Dans l'algèbre topologique $\mathscr{E}(V)$, un idéal engendré par un *nombre fini* de fonctions holomorphes est-il fermé ? Plus généralement, le produit $\mathscr{E}^m(V) = \mathscr{E}(V) \times \mathscr{E}(V) \times \cdots \times \mathscr{E}(V)$ est un module topologique sur l'anneau $\mathscr{E}(V)$; un sous-module engendré par un nombre fini d'éléments holomorphes est-il fermé ?

2.°) Le théorème I (et par suite ses corollaires, et les théorèmes II et III avec leurs corollaires) sont-ils vrais sur une variété analytique réelle V, lorsqu'on remplace partout « fonction holomorphe » par « fonction analytique » ?

Appendice I

Cet appendice a pour but de démontrer le lemme algébrique IV de la page 38, qui est la proposition II de cet appendice.

Nous appellerons $K[[x]]$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, l'anneau des séries formelles à n variables x_j sur un corps K. Si K est valué complet non discret de caractéristique 0, $K_c[[x]]$ sera l'anneau des séries convergentes, c.a.d. des séries formelles qui deviennent absolument convergentes quand on substitue aux x_j des éléments de K de valeur absolue assez petite. Si K est le corps des nombres complexes, $K_c[[x]]$ est l'anneau des germes de fonctions holomorphes en un point.

PROPOSITION I. *Soient f un polynome à une variable x, à coefficients dans l'anneau $K[[w]]$ des séries formelles à une variable w, sur un corps K valué complet non discret, de caractéristique 0, algébriquement clos, et g un polynome unitaire à coefficients dans $K[[w]]$ (resp. $K_c[[w]]$). On suppose que toute substitution à x et w de séries formelles (resp. convergentes) à une variable t, sans terme constant, qui annule g, annule aussi f. Alors, si g ne contient pas de facteur carré dans $K[[w]][x]$, f est divisible par g dans $K[[w]][x]$.*

Si g n'est pas irréductible, f possède la même propriété vis-à-vis de chacun des facteurs irréductibles de g ; si dans ce cas le lemme est supposé démontré, f est divisible par chaque facteur irréductible de g, et comme tous sont distincts par hypothèse, f est divisible par g. Il nous suffit donc de démontrer le lemme lorsque g est irréductible.

Soit p le degré de g en x. D'après le théorème de Puiseux[11], si l'on pose $w = t^p$, g devient complètement réductible dans $K[[t]][x]$ (*resp.* $K_c[[t]][x]$). Soient $h_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, p$, ses racines, toutes distinctes, séries formelles (*resp.* convergentes) en t. Chacune des p substitutions différentes $w = t^p$, $x = h_j(t)$, annule alors g, donc doit annuler f. Si nous effectuons la division de f par g, possible puisque g est unitaire,

$$f = gQ + R, \tag{37}$$

chacune de ces substitutions doit aussi annuler R. Mais R est un polynome en x de degré $\leqslant p-1$ à coefficients dans $K[[w]]$, donc si l'on pose $w = t^p$, R est un polynome en x de degré $\leqslant p-1$ à coefficients dans $K[[t]]$, ayant p

[11] WALKER : « Theory of algebraic curves ».

racines distinctes, donc identiquement nul ; il est alors aussi identiquement nul avant la substitution $w = t^p$, et f est bien divisible par g.

Proposition II. *Soient f une série formelle à n variables x_j, à coefficients dans un corps K valué complet non discret, de caractéristique 0, algébriquement clos, et g une série formelle (resp. convergente). On suppose que toute substitution aux x_j de séries formelles (resp. convergentes) $h_j(t)$ à une variable t sans terme constant, qui annule g, annule aussi f. Alors si g ne contient pas de facteur carré (non inversible) dans $K[[x]]$, f est divisible par g dans $K[[x]]$.*

On peut toujours par un changement de variables linéaires se ramener au cas où f et g sont équivalents à des polynomes distingués en x_1. Mais des séries formelles ou convergentes équivalentes à f et g vérifient aussi les hypothèses, donc si le théorème est démontré pour les polynomes distingues équivalents à f et g, il l'est pour f et g ; supposons donc que f et g eux-mêmes soient des polynomes distingués. Effectuons la division de f par g en tant que polynomes en x_1 :

$$f = gQ + R. \tag{38}$$

Appelons y la variable $(x_2, \dots, x_n) \in K^{n-1}$; les coefficients de f et R sont dans $K[[y]]$, ceux de g dans $K[[y]]$ (*resp.* $K_c[[y]]$). Effectuons la substitution $y = \eta w$ ($y_j = \eta_j w$, $\eta_j \in K$). Alors f, g, R deviennent des polynomes en x_1 à coefficients dans $K[[w]]$ (*resp.* $K_c[[w]]$). Les polynomes f et g se trouvent vérifier les hypothèses de la proposition I, si toutefois g est sans facteur carré. Soit $D(y)$ le discriminant de g en tant que polynome en x_1. D est une série formelle (*resp.* convergente) qui n'est pas identiquement nulle puisque g est sans facteur carré dans $K[[x]]$. Donc l'ensemble de ses termes de plus bas degré est un polynome homogène D_k de degré k en y. Le discriminant de g après substitution $y = \eta w$ est alors $D(\eta w)$; c'est une série formelle (*resp.* convergente) en w, dont le terme de plus bas degré est $D_k(\eta w)$ si ce polynome n'est pas nul. Autrement dit g est sûrement sans facteur carré après substitution si $D_k(\eta w) = w^k D_k(\eta) \neq 0$ ou $D_k(\eta) \neq 0$. Dans ces conditions, la proposition I nous dit que, après substitution, f est divisible par g, donc que R est nul. R est donc un polynome en x_1 à coefficients dans $K[[y]]$, qui devient nul par toute substitution $y = \eta w$ telle que $D_k(\eta) \neq 0$. Chaque coefficient A de R est donc une série formelle qui devient nulle par toute substitution $y = \eta w$ telle que $D_k(\eta) \neq 0$. Si A_m est l'ensemble des termes de plus bas degré de A, $A_m(\eta w) = w^m A_m(\eta)$ est nul toutes les fois que $D_k(\eta) \neq 0$; cela signifie que A_m est identiquement nul, donc aussi A, donc aussi R, et f est bien divisible par g, *CQFD.*

Appendice II

Cet appendice a pour but de démontrer la propriété de la page 34, dont la démonstration (due à Grothendieck) est annoncée dans la note 7.

Proposition. *Sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$, le quotient $\mathscr{E}_0$ de l'algèbre $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ par l'idéal des fonctions plate en 0 est isomorphe à l'algèbre S des séries formelles en $x_1, x_2, \ldots, x_N$.*

L'application T_0 qui à chaque fonction $\alpha \in \mathscr{E}$ fait correspondre sa série de Taylor en 0 est en effet une représentation de $\mathscr{E}$ dans S, dont le noyau est exactement l'idéal des fonctions plates en 0 ; elle définit donc une représentation injective de $\mathscr{E}_0$ dans S qui nous permet d'identifier $\mathscr{E}_0$ à une sous-algèbre de S ; nous devons montrer que $\mathscr{E}_0 = S$ ou $T_0(\mathscr{E}) = S$. Munissons $\mathscr{E}_0$ de la topologie quotient de celle de $\mathscr{E}$; c'est alors un espace de Fréchet. Munissons S de la topologie produit (convergence de chaque coefficient de la série formelle) ; c'est encore un espace de Fréchet. T_0 est continue de $\mathscr{E}$ dans S donc $\mathscr{E}_0$ a une topologie plus fine que la topologie induite par S ; par ailleurs $\mathscr{E}_0$ est dense dans S, car les polynomes en $x_1, x_2, \ldots, x_N$, qui forment un sous-espace vectoriel dense de S, sont dans $\mathscr{E}_0$. La transposée de l'injection $\mathscr{E}_0 \to S$ est une application $S' \to \mathscr{E}_0'$, et puisque $\mathscr{E}_0$ est dense dans S, cette transposée est une injection permettant d'identifier S' à un sous-espace de $\mathscr{E}_0'$.

Nous allons montrer que $S' = \mathscr{E}_0'$, alors, d'après les propriétés connues des espaces de Fréchet, l'application $\mathscr{E}_0 \to S$ est un homomorphisme, $\mathscr{E}_0$ sera fermé dans S, et comme il est dense on aura $\mathscr{E}_0 = S$.

Nous aurons ainsi montré non seulement que $\mathscr{E}_0 = S$ (c.a.d. que toute série formelle est la série de Taylor d'une fonction de $\mathscr{E}$) mais que ces espaces ont même topologie (donc, par exemple, que si une suite de séries formelles converge vers 0, pour la convergence de chaque coefficient, elles sont les séries de Taylor d'une suite de fonctions de $\mathscr{E}$ convergeant vers 0 dans $\mathscr{E}$).

S étant un espace produit, son dual S' est une somme directe. Un élément de S' est défini par une suite de coefficients b_p, nuls sauf un nombre fini ; son produit scalaire avec la série formelle $\sum a_p x^p \in S$ (notations « à une variable » définies au début de la Théorie des Distributions) est défini par

$$\Big\langle (b_p)_{\substack{p=(p_1,p_2,\ldots,p_N)\\ p_i \text{ entiers } \geqslant 0}}, \sum_p a_p x^p \Big\rangle = \sum_p a_p b_p.$$

Comme élément de $\mathscr{E}_0'$, l'élément de S' est défini par la même formule, où on se borne à considérer les $\sum a_p x^p \in \mathscr{E}_0$. Comme $\mathscr{E}_0$ est un quotient de $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}_0'$ peut être identifié à un sous-espace de $\mathscr{E}'$; l'élément précédent de

$S' \subset \mathscr{E}_0'$ est alors identifié à l'élément de $\mathscr{E}'$, distribution à support vide ou réduit à l'origine, défini par :

$$\langle B, \varphi \rangle = \sum_p b_p \frac{D^p \varphi(0)}{p!}, \quad \text{ou} \quad B = \sum_p (-1)^{|p|} b_p \frac{D^p \delta}{p!}.$$

Ainsi identifié à un sous-espace de $\mathscr{E}'$, S' est l'ensemble des combinaisons linéaires finies de dérivées de la mesure de Dirac.

Mais $\mathscr{E}_0'$ est, dans $\mathscr{E}'$, l'orthogonal du sous-espace des fonctions de $\mathscr{E}$ plates en 0 ; c'est évidemment le sous-espace des distributions de support vide ou réduit à 0 (car déjà une distribution nulle sur toutes les fonctions nulles au voisinage de 0 est nulle dans le complémentaire de 0 donc a son support vide ou réduit à 0), c.a.d. des combinaisons linéaires finies de dérivées de la mesure de Dirac, donc $S' = \mathscr{E}_0'$, *CQFD*.