ASPECTS ALGÉBRIQUES DE LA DIVISION DES DISTRIBUTIONS

par

Claude Sabbah

Introduction

La théorie des distributions élargit le cadre des fonctions localement intégrables, en introduisant des objets (les distributions) qui s'intègrent sur toute fonction C^∞ à support compact (encore appelée *fonction test*). La dérivée d'une distribution est ainsi une distribution bien définie. De cette manière, la dérivée d'une fonction localement intégrable est bien définie... comme distribution.

Que faire alors avec les fonctions qui ne sont *pas* localement intégrables ? Deux attitudes sont possibles, de même qu'avec beaucoup d'autres objets mathématiques (les séries divergentes, etc.) : ou bien ou les supprime du champ d'étude, et on se prive alors de la modélisation de certains phénomènes intéressants, ou bien on essaye de les intégrer au champ d'étude, et l'analyse précise en devient assez compliquée.

Sans chercher des pathologies inutiles, je vais considérer deux exemples de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (définies presque partout) :

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \exp(1/x).$$

De tels exemples ne sont pas particuliers. Il arrive souvent que des solutions d'équations différentielles, ou aux dérivées partielles, ne soient pas localement intégrables partout. Peut-on alors encore les considérer comme solution de l'équation (ou du système d'équations) près de ces points singuliers ? (En effet, la notion de dérivation n'a plus de sens clair près de ces points, puisque la fonction n'est pas une distribution.) Autrement dit, existe-t-il une distribution qui prolonge la fonction près de ces points ?

Regardons le premier exemple : sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f admet pour primitive la fonction $F(x) = \log|x|$; celle-ci est localement sommable sur $\mathbb{R}$ tout entier, et il est donc naturel de prolonger f comme la distribution $T_f = F'$: pour toute fonction C^∞ à support compact $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \langle F', \varphi\rangle \overset{\text{déf}}{=} -\langle F, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Lorsque le support de φ ne contient pas l'origine, *i.e.* $\varphi \equiv 0$ près de 0, on peut intégrer par parties et obtenir (puisque φ est à support compact)

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

La relation $x \cdot f = 1$ s'étend aussi en la relation

$$x \cdot T_f = 1.$$

Ce n'est pas tout-à-fait trivial : il s'agit de vérifier que, pour toute fonction test φ, la formule d'intégration par parties s'applique pour donner l'égalité

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}} x \log|x|\ \varphi'(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} (1 - \log|x|)\varphi(x)\,dx.$$

En effet, on en déduit alors

$$\begin{aligned}
\langle xT_f, \varphi\rangle = \langle xF', \varphi\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} F(x)(x\varphi(x))'\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} F(x)(\varphi(x) + x\varphi'(x))\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} [F(x)\varphi(x) + (1 - F(x))\varphi(x)]\,dx \quad \text{d'après } (*) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

qui est l'égalité cherchée.

Regardons le deuxième exemple : nous allons voir que, dans ce cas, une distribution T_g n'existe pas.

En effet, supposons que T_g existe. Par définition, il existe un entier $p \geqslant 0$ et une constante $C > 0$ tels que, pour toute fonction test φ à support dans $[-1, 1]$, on ait

$$(1) \qquad |\langle T_g, \varphi\rangle| \leqslant C \sup_{k \leqslant p} \left\|\varphi^{(k)}\right\|_\infty.$$

Soit $\chi \geqslant 0$ une fonction C^∞ à support compact contenu dans $]1/2, 5/2[$ et telle que $\chi \equiv 1$ sur $[1, 2]$. Pour $\varepsilon > 0$, soit $\chi_\varepsilon(x) = \chi(x/\varepsilon)$. Ainsi, $\chi_\varepsilon \equiv 1$ sur $[\varepsilon, 2\varepsilon]$. On a alors d'une part

$$|\langle T_g, \chi_\varepsilon\rangle| = \Big|\int_{\mathbb{R}} \exp(1/x)\chi_\varepsilon(x)\,dx\Big| \geqslant \varepsilon \exp(1/2\varepsilon),$$

et d'autre part, pour $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\operatorname{Supp}\chi_\varepsilon \subset [-1, 1]$,

$$|\langle T_g, \chi_\varepsilon\rangle| \leqslant C \sup_{k \leqslant p} \left\|\chi_\varepsilon^{(k)}\right\|_\infty = C'/\varepsilon^p,$$

avec $C' = C \sup_{k \leqslant p} \left\|\chi^{(k)}\right\|_\infty$. Ceci conduit à une contradiction.

Le procédé utilisé dans le premier exemple se généralise : soit S une distribution sur $\mathbb{R}$ et χ une fonction C^∞ à support compact telle que $\chi \equiv 1$ près de 0 ; alors la forme linéaire T définie par

$$T : \varphi \longmapsto \Big\langle S, \frac{\varphi(x) - \chi(x)\varphi(0)}{x} \Big\rangle \tag{2}$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$ solution de $x \cdot T = S$ (exercice). On dit que T est un résultat de la division de S par x. Si $\widetilde{T}$ en est un autre, $\widetilde{T} - T$ est une distribution à support l'origine annulée par la multiplication par x, donc $\widetilde{T} - T = a\delta_0$, $a \in \mathbb{C}$ (δ_0 est la masse Dirac à l'origine, autrement dit la distribution définie par $\varphi \mapsto \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$).

***Exercice* (division de δ_0 par x).** La relation $x\delta_0 = 0$ se dérive en $\delta_0 + x\delta_0' = 0$, donc un quotient de δ_0 par x est $-\delta_0'$, et l'ensemble des quotients est l'ensemble $\{a\delta_0 - \delta_0' \mid a \in \mathbb{C}\}$.

1. Équations aux dérivées partielles et division des distributions

Pourquoi se pose-t-on le problème de savoir si on peut diviser une distribution par une fonction (un polynôme ou une fonction analytique réelle). Cette question apparaît très tôt. Voici ce qu'en dit Laurent Schwartz dans le sommaire du chapitre V de son livre [**11**] :

> (...) *Les* § *4 et 5 traitent du problème de la division. Dans le cas d'une variable* ($n = 1$, § *4*) *la division par une puissance de x est aussi très utile dans la Mécanique ondulatoire et dans la pratique des équations différentielles. Le* § *5 par contre correspond à des notions peu utilisées jusqu'à présent, parce qu'il n'était pas possible de poser correctement le problème. Il est maintenant correctement posé, mais n'est pas pour autant résolu ; nous ne traitons que des cas particuliers ; j'ai résolu des cas plus généraux mais encore bien insuffisants* (*il faudrait au moins pouvoir diviser par n'importe quelle fonction analytique*)*. L'intérêt de la division résulte de ce que, par transformation de Fourier, elle résout des problèmes essentiels de la théorie des équations aux dérivées partielles et équations intégrales.* (...)

Soit $P(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$ un opérateur différentiel portant sur n variables $x_1, \dots, x_n$, *à coefficients constants*. Par exemple, on peut choisir pour P certains opérateurs classiques de la physique, comme le laplacien, ou le d'alembertien (équation des ondes), *etc.*.

On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$Pu = v,$$

où v est une distribution tempérée donnée. On commence par chercher une *solution élémentaire* (encore appelée *solution fondamentale*), c'est-à-dire une distribution E — si possible tempérée — qui satisfait à

$$PE = \delta_0, \tag{3}$$

où δ_0 est la distribution de Dirac à l'origine de $\mathbb{R}^n$. Supposons une telle distribution E trouvée. Alors, pour toute distribution v pour laquelle le produit de convolution $E \star v$ est défini « convenablement » (par exemple v à support compact), l'équation $Pu = v$ admet pour solution $u = E \star v$.

Puisqu'on travaille avec des distributions tempérées, on peut faire usage de la transformation de Fourier. L'équation (3) est équivalente, après une telle transformation, à l'équation

$$\widehat{P} \cdot \widehat{E} = 1.$$

Maintenant, $\widehat{P}$ est l'opérateur de multiplication par un *polynôme* en les variables $\xi_1, \dots, \xi_n$ duales de Fourier de $x_1, \dots, x_n$. La résolution de l'équation aux dérivées partielles (3) se ramène ainsi au problème de division de la distribution 1 par un polynôme.

C'est essentiellement cette question que nous aborderons dans la suite. Notons aussi que, pour résoudre plus généralement l'équation $Pu = v$ lorsqu'on ne peut pas utiliser une solution élémentaire, *i.e.* lorsque le produit de convolution $E \star v$ n'est pas bien défini, on peut utiliser aussi la transformation de Fourier qui ramène le problème à celui de la division de la distribution tempérée $\widehat{v}$ par le polynôme $\widehat{P}$. Il est donc aussi utile de considérer la question générale de la division d'une distribution par un polynôme.

L'existence d'une solution fondamentale distribution E pour un opérateur à coefficients constants est connue sous le nom de « théorème de Malgrange-Ehrenpreis » et a été démontrée il y a 50 ans par ces auteurs. Si les mathématiciens suédois L. Hörmander d'une part et polonais S. Łojasiewicz d'autre part ont donné, vers 1958, une solution générale au problème de la division, il est parfois nécessaire d'obtenir une telle solution plus explicitement. Vers 1968, les mathématiciens anglais M. Atiyah [**1**] et russe J.N. Bernstein [**4**], puis J.N. Bernstein et S.I. Gel'fand [**6**] ont donné indépendamment une telle solution.

Celle-ci résout en fait un problème posé par le mathématicien russe I.M. Gel'fand au Congrès International des mathématiciens en 1954, à savoir la « méromorphie de la distribution f^s » lorsque f est un polynôme.

En 1972, J.N. Bernstein publie [**5**] une autre solution, plus algébrique et assez élémentaire, que je vais expliquer plus bas. Cette dernière utilise de manière essentielle une équation fonctionnelle, appelée désormais *équation de Bernstein*, associée à un polynôme $f(x_1, \dots, x_n)$. L'existence d'une telle équation fonctionnelle s'obtient par un procédé purement algébrique, comme nous le verrons aux paragraphes 4 à 11.

Cette équation fonctionnelle met en évidence un polynôme $b_f(s)$ d'une variable attaché au polynôme f, appelé *polynôme de Bernstein*[1] de f (on dit aussi *polynôme de Bernstein-Sato*, du nom du mathématicien japonais Mikio Sato, qui a considéré le même problème à la même époque, la terminologie japonaise étant plutôt celle de *b-fonction*).

Outre sa simplicité — contrairement aux méthodes antérieures de M. Atiyah ou Bernstein et Gel'fand, la méthode de J.N. Bernstein ne fait pas appel à un théorème de démonstration difficile et longue, appelé « théorème de résolution des singularités » et dû au mathématicien japonais Heisuke Hironaka —, la méthode de Bernstein permet d'estimer les pôles possibles de la « distribution méromorphe f^s » mieux que ne le permettaient les méthodes précédentes. Nous donnerons quelques exemples de calcul explicite d'un tel polynôme. Il existe aussi des algorithmes développés pour le calculer, certains implémentés dans des systèmes de calcul formel.

À ce point de l'exposé, je ne peux m'empêcher de citer René Thom en 1970[2] :

> (...) *Discutons d'abord l'argument d'utilité. L'algèbre est, dit-on, plus utile que la géométrie, plus nécessaire. Il n'est certes pas question de nier l'utilité scientifique générale d'une théorie comme l'algèbre linéaire, de certaines notions d'algèbre multilinéaire. Pour ce qui est de l'algèbre commutative générale* (*polynômes, etc.*), *on doit déjà se montrer plus sceptique. Et, dans sa vie courante, qui a jamais eu à résoudre une équation du second degré, à se servir explicitement de la notion de module sur un anneau ? L'argument d'utilité n'est donc pas, en ce qui concerne l'algèbre, aussi contraignant qu'il paraît. Il vaut, par contre à plein pour les notions de calcul différentiel et intégral [...], car ce sont là des connaissances de base indispensables à toute présentation de la physique classique. À un niveau élémentaire, certes, l'usage de l'algèbre apporte de massives simplifications. On se souvient du problème d'arithmétique du certificat d'études, dont la solution « par le raisonnement » exigeait une agilité d'esprit peu commune, alors que sa solution par l'algèbre n'exigeait que l'emploi correct d'un mécanisme formel élémentaire. Là, l'économie de pensée apportée par l'algèbre n'est pas niable. Mais, dès qu'on traite de situations plus compliquées, cet avantage de l'algèbre tend à s'effacer. Descartes avait imaginé la géométrie analytique pour réduire la géométrie à l'algèbre. Or, c'est un fait d'expérience — bien connu de tous ceux qui ont pratiqué l'ancienne « Taupe »—, que l'avantage des*

---

(1) polynôme qu'on ne confondra pas avec les classiques « polynômes de Bernstein » utilisés dans l'approximation des fonctions par des polynômes ; ces dernier datent du début du 20e siècle (*cf.* S. Bernstein, « Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités », Comm. Soc. Math. Kharkov **13** (1912)) .

(2) « Les mathématiques modernes : une erreur pédagogique et philosophique ? », *L'Age de la Science*, III, 3, Paris, Dunod, pp. 225–242 ; in *Apologie du Logos*, Hachette, Paris, 1990, pp. 553–576, avec ajout d'un « chapeau ». Voir aussi le CD-Rom des Œuvres complètes, édité par l'Institut des Hautes Études Scientifiques.

> *méthodes analytiques sur les méthodes géométriques, dans un problème de nature quelque peu théorique et générale, est souvent loin d'être décisif.* (...)

Mis à part quelques exemples simples, le calcul algébrique ou algorithmique du polynôme de Bernstein-Sato $b_f(s)$ attaché à un polynôme donné f devient inextricable dès que le degré de f dépasse 4 ou 5 et le nombre de variables est 3 ou 4. Certes, ses racines sont des nombres rationnels, d'après le mathématicien japonais M. Kashiwara, et elles sont strictement négatives, comme l'a montré B. Malgrange, mais néanmoins la complexité des calculs est très grande. Les méthodes géométriques ou topologiques peuvent apporter alors une aide appréciable. En effet, dans les années 1970–1980, B. Malgrange a expliqué comment calculer par voie topologique le polynôme dont les racines, avec multiplicité, sont les $\exp 2i\pi\nu$, où ν parcourt l'ensemble des racines de $b_f(s)$. Cette approche a permis de donner une démonstration plus « élémentaire » de la rationalité des racines du polynôme de Bernstein-Sato, *i.e.* qui n'utilise pas le théorème de « résolution des singularités ».

Cet aspect ne sera pas abordé ici, et je renvoie par exemple à l'article de B. Malgrange [**9**].

Par ailleurs, l'article [**10**] de P. Schapira dans l'*Encyclopædia Universalis* donne une idée de la géométrie *microlocale* sous-jacente à l'équation de Bernstein.

2. Transformation de Mellin et division

Soit $\psi(x)$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Il n'est, en général, pas possible de la diviser par x avec un quotient du même type que ψ, cela pour deux raisons :

(a) si ψ est C^∞ près de 0, nous avons vu (*cf.* exposé de B. Malgrange) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $x \mapsto \psi(x)/x$ reste C^∞ près de 0 est que $\psi(0) = 0$;

(b) si ψ est C^k ($k \geqslant 1$) et $\psi(0) = 0$, le quotient $\psi(x)/x$ est en général C^{k-1} ; si ψ est continue et $\psi(0) = 0$, le quotient peut ne pas être localement intégrable près de 0 (par exemple prendre $\psi(x) = 1/\log|x|$).

Le théorème de division (ici, c'est la formule simple (2)) nous dit que le quotient $\psi(x)/x$ existe comme distribution. On peut alors le dériver et obtenir la formule usuelle de dérivation d'un quotient.

La transformation de Mellin donne une méthode pour obtenir le quotient, dans de nombreuses situations. Expliquons cette méthode, en partant d'une fonction continue $\psi(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que Ré$(s) > -1$, la fonction $x \mapsto x^s\psi(x)$ est localement sommable sur $\mathbb{R}_+$. Considérons-la comme une distribution $T_{\psi,s}$ sur $\mathbb{R}_+$: pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$,

$$\langle T_{\psi,s}, \varphi\rangle = \int_0^\infty x^s\psi(x)\varphi(x)dx.$$

Tout le problème revient à donner un sens à $T_{\psi,-1}$.

Faisons varier s. Le théorème de dérivation sous $\int$ permet de montrer que, pour chaque fonction test φ, la fonction $s \mapsto \langle T_{\psi,s}, \varphi\rangle$ est holomorphe pour Ré$(s) > -1$. La méthode consiste alors à résoudre le problème suivant :

Problème de prolongement 2.1. *Est-il possible de prolonger cette fonction en une fonction méromorphe de s sur un domaine contenant le point $s = -1$?*

• Si la réponse est positive, on *définit* $\langle T_{\psi,-1}, \varphi\rangle$ comme le terme constant du développement de Laurent en $s = -1$ de la fonction $s \mapsto \langle T_{\psi,s}, \varphi\rangle$.

• On montre ensuite que la correspondance ainsi définie

$$\varphi \longmapsto \langle T_{\psi,-1}, \varphi\rangle$$

est une distribution.

• On remarque aussi que

$$\langle x \cdot T_{\psi,-1}, \varphi\rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle T_{\psi,-1}, x\varphi\rangle = \langle T_{\psi,0}, \varphi\rangle = \langle \psi, \varphi\rangle,$$

ce qui montre que $x \cdot T_{\psi,-1} = \psi$, et $T_{\psi,-1}$ est un « quotient » de ψ par x.

Cette méthode se généralise : soit f un polynôme de n variables à coefficients dans $\mathbb{R}$ et S une distribution sur $\mathbb{R}^n$; on cherche une distribution T solution de $f \cdot T = S$. Une telle distribution existe (*cf.* exposé de B. Malgrange), on cherche à en donner une formule « calculable » et à comprendre certaines propriétés de T à partir de celles de S (calcul du front d'onde par exemple, *cf.* exposé de J.-M. Bony).

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, et soit p l'ordre de S sur ce compact. Alors S s'étend de manière unique en une forme linéaire continue sur l'espace des fonction C^p à support contenu dans K.

Quitte à remplacer f par f^2, on peut supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (si on sait diviser S par f^2, on saura diviser S par f).

Lorsque s est un nombre complexe on peut définir la fonction f^s sur l'ensemble $U = \{f \neq 0\} = \{f > 0\}$ par $f^s = \exp(s \log f)$. C'est ainsi une fonction C^∞ sur ce domaine. De plus, lorsque la partie réelle de s est > 0, cette fonction se prolonge par continuité à $\mathbb{R}^n$ en posant $f^s(x) = 0$ pour $x \in f^{-1}(0)$. Pour Ré$(s) = 0$ cette fonction est localement bornée au voisinage de $f^{-1}(0)$, mais pour Ré$(s) < 0$ l'intégrabilité locale en les points de $f^{-1}(0)$ n'est pas assurée. Au contraire, si p est un entier $\geqslant 0$ et si $\mathrm{Ré}(s) > p$, la fonction f^s est de classe C^p au voisinage de tout point de $f^{-1}(0)$.

[À partir de quelle valeur de $\mathrm{Ré}(s)$ est-ce que cette fonction n'est plus localement intégrable ? Nous examinerons cette question au paragraphe 3.]

Si φ est C^∞ à support dans K et si $\mathrm{Ré}(s) > p$, la fonction $f^s\varphi$ est C^p à support dans K, et

$$s \longmapsto \langle S, f^s\varphi\rangle \tag{4}$$

est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Ré}(s) > p$.

Supposons que l'on sache résoudre le problème de prolongement 2.1. On montre ensuite que la correspondance qui à φ associe le terme constant $\langle T, \varphi\rangle$ du développement de Laurent en $s = -1$ de la fonction $s \mapsto \langle S, f^s\varphi\rangle$ est une distribution.

La distribution T n'est pas exactement une solution au problème de division, car on peut seulement montrer que $S - fT$ est une distribution à support dans l'ensemble $\{f = 0\}$.

Conclusion. *La méthode par transformation de Mellin, lorsqu'elle s'applique, ramène le problème de la division par f d'une distribution quelconque sur $\mathbb{R}^n$ à celui de la division par f d'une distribution à support dans $\{f = 0\}$ d'ordre inférieur ou égal à celui de S.*

Néanmoins, si S est d'ordre 0, c'est-à-dire si on peut choisir $p = 0$ ci-dessus (et si la méthode par transformation de Mellin s'applique), la distribution T satisfait à $fT = S$. C'est le cas par exemple si S est une fonction localement sommable.

3. L'équation fonctionnelle de Bernstein et le prolongement méromorphe

Nous allons d'abord examiner en détail le cas où la distribution S est la fonction constante 1.

On peut interpréter la transformation de Mellin (4), pour s fixé, comme le résultat d'une mesure de S à l'aide de « l'appareil de mesure » f^s. La variable s représente le « bouton » de l'appareil. Lorsque le bouton s s'approche d'une valeur polaire, la fonction $\langle S, f^s\varphi\rangle$ présente un pic, donc est observable. Ces valeurs polaires ont ainsi une signification importante pour la distribution S et leur apparition ne doit pas être considérée comme un phénomène malheureux, pas plus que l'apparition d'une oasis dans un désert. S'intéresser à la distribution $S = 1$ revient à rechercher les « fréquences propres » de l'appareil de mesure f^s.

Étant donnée une fonction φ, C^∞ à support compact (ou plus généralement à décroissance rapide à l'infini) et si dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, la fonction

$$I_\varphi : s \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f^s \cdot \varphi(x)\, dx \tag{5}$$

est holomorphe dans le demi-plan $\text{Ré}(s) > 0$ (en utilisant les critères usuels de dérivation sous $\int$). De plus, la limite de $I_\varphi(s)$ quand $s \to 0$ (avec $\text{Ré}(s) > 0$) existe et vaut $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx$. Ce procédé permet de construire beaucoup de fonctions holomorphes d'une variable complexe.

Un exemple de ce type d'intégrales est donné par la fonction Γ : celle-ci est définie par

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^s e^{-t} \frac{dt}{t}$$

pour $\text{Ré}(s) > 0$. Il est bien connu que la fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur *tout* le plan complexe, avec des pôles aux entiers négatifs, ces pôles étant simples, d'ailleurs. Pour le montrer, on observe que, dans son domaine de définition $\{\text{Ré}\, s > 0\}$, la fonction Γ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \tag{6}$$

On *définit* alors, pour $\text{Ré}\, s > -1$, la fonction $\Gamma^{(>-1)}(s)$ par la formule

$$\Gamma^{(>-1)}(s) = \frac{1}{s} \cdot \Gamma(s+1).$$

Cette fonction est bien un prolongement de Γ puisque, d'après (6), elle coïncide avec Γ sur $\text{Ré}\, s > 0$. On itère le procédé pour prolonger Γ à tout demi-plan $\text{Ré}\, s > -k$, avec $k \geqslant 1$. Le fait que Γ satisfasse l'*équation aux différences finies* (6) permet, d'une part, de la prolonger et, en même temps, de voir que les pôles *se reproduisent* aux entiers négatifs.

Dans quelle mesure les fonctions construites par le procédé ci-dessus satisfont-elles à ce type de propriétés ? Bien que ces fonctions ne satisfassent pas en général à une équation aux différences finies, car la fonction φ casse la symétrie, elles satisfont à des relations du même type, et on retrouve l'extension méromorphe et la reproduction des pôles :

Théorème 3.1. *La fonction définie pour* $\text{Ré}(s) > 0$ *par l'expression* (5) *s'étend en une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$ *et l'ensemble des pôles est contenu dans une réunion d'ensembles* $\{\nu - n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *où* ν *parcourt un ensemble fini de nombres complexes indépendant du choix de la fonction* φ.

Remarque 3.2. Des techniques plus compliquées que celles mises en jeu ci-dessous permettent de montrer que les nombres ν qui interviennent sont des rationnels < 0. L'ordre des pôles n'est pas nécessairement simple cependant, contrairement au cas de la fonction Γ. Pour le premier pôle ν_0 rencontré en faisant décroître Ré(s) à partir de 0, la fonction f^{ν_0} n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

Principe de la démonstration du théorème 3.1. L'ingrédient essentiel pour obtenir l'équation aux différences (6) est l'intégration par parties, par rapport à la dérivation d/dt. Pour la fonction I_φ, on cherche à fabriquer un ersatz de l'opérateur « $\partial/\partial f$ », qui n'existe *a priori* que lorsque f est une coordonnée. On appliquera l'intégration par parties avec cet ersatz.

Nous notons

– ∂_{x_i} l'opérateur de dérivation $\partial/\partial x_i$,

– pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ (où le produit est ici pris au sens de la composition des dérivations).

Si une fonction est dans une parenthèse à droite d'un opérateur, elle est dérivée par lui ; si elle est à gauche, elle multiplie le résultat qui se trouve à sa droite. Un opérateur P à coefficients polynomiaux en $x_1, \ldots, x_n, s$ a ainsi une expression du type

$$P(s, x, \partial_x) = \sum_\alpha p_\alpha(s, x_1, \ldots, x_n)\partial_x^\alpha$$

où les p_α sont des polynômes en leurs arguments. Nous aurons aussi à considérer des opérateurs Q à coefficients dans l'anneau $\mathbb{R}(s)[x_1, \ldots, x_n]$ des polynômes en $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients dans le corps des fractions rationnelles en s.

On cherche ainsi un tel opérateur $Q(s, x, \partial_x)$ qui satisfasse, sur $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{f^{-1}(0)\}$ et pour tout $s \in \mathbb{C}$, à la relation

$$Q(s, x, \partial_x)(f^{s+1}) = (s+1)f^s. \tag{7}$$

En général, les coefficients de Q ont des pôles en s et, en éliminant les dénominateurs, on récrit cette relation sous la forme

$$P(s, x, \partial_x)(f^{s+1}) = (s+1)\widetilde{b}(s)f^s = b(s)f^s, \tag{8}$$

où $b(s) \in \mathbb{R}[s]$ est un polynôme non identiquement nul et P un opérateur différentiel linéaire, dont les coefficients sont des polynômes en $x_1, \ldots, x_n$ et s.

Donnons d'abord quelques exemples.

Exemple 3.3. Le plus simple est celui où f est un monôme

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}.$$

Alors un calcul direct donne

$$\Big[\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m_i}(m_i s+k)\Big]\cdot f^s=\Big[\partial_{x_1}^{m_1}\cdots\partial_{x_n}^{m_n}\Big](f^{s+1}).$$

Exemple 3.4. Considérons ensuite le cas d'une forme quadratique

$$f(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1^2+\cdots+a_nx_n^2$$

avec $a_i\neq 0$ pour tout i. Notons d'abord que la relation d'Euler due à l'homogénéité donne

$$2(s+1)f^{s+1}=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\partial_{x_i}\Big)(f^{s+1})$$

et n'est donc pas très utile puisque le terme de gauche n'est pas de la forme $b(s)f^s$. On utilise plutôt la relation

$$\partial_{x_i}^2(f^{s+1})=2a_i(s+1)\big(f^s+2s(a_ix_i^2)f^{s-1}\big)$$

et en sommant sur i on obtient

$$4(s+1)(s+n/2)f^s=\Big(\sum_i\frac{\partial_{x_i}^2}{a_i}\Big)(f^{s+1})$$

qui est une relation du type voulu.

Exemple 3.5. Considérons maintenant le cas d'une parabole semi-cubique

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^3.$$

Ici encore la relation d'Euler ne sera pas de grande utilité. On a les relations

$$\partial_{x_1}^2(f^{s+1})=2(s+1)\big(f^s+2sx_1^2f^{s-1}\big)\tag{9}$$

$$\partial_{x_2}^2(f^{s+1})=3(s+1)x_2\big(2f^s+3sx_2^3f^{s-1}\big).\tag{10}$$

Il ne serait pas judicieux de considérer ici $\partial_{x_2}^3(f^{s+1})$. Par contre on déduit de ces deux relations

$$(9x_2\partial_{x_1}^2+4\partial_{x_2}^2)(f^{s+1})=6(s+1)(6s+7)x_2f^s$$

et on en déduit, en dérivant par rapport à x_2, que

$$\big(\partial_{x_2}(9x_2\partial_{x_1}^2+4\partial_{x_2}^2)\big)(f^{s+1})=6(s+1)(6s+7)\big(f^s+3sx_2^3f^{s-1}\big).$$

On peut maintenant opérer comme dans l'exemple précédent en combinant cette relation avec la relation (9) ci-dessus et on obtient

$$(6s+5)(6s+6)(6s+7)f^s=\big(9(6s+7)\partial_{x_1}^2+2\partial_{x_2}(9x_2\partial_{x_1}^2+4\partial_{x_2}^2)\big)(f^{s+1}).$$

Dans cet exemple, on voit que l'opérateur $P(s,x,\partial_x)$ dépend effectivement de s.

Exemple 3.6. Soit $f(x_1,\dots,x_n)$ un polynôme homogène de degré d. Tous les monômes sont de degré d, de sorte que la relation d'Euler s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = d \cdot f,$$

c'est-à-dire encore $\big[\sum_i \frac{1}{d} x_i \partial_{x_i}\big](f) = f$.

Plus généralement, nous dirons que le polynôme f est *quasi-homogène* s'il existe des rationnels positifs $q_1,\dots,q_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} q_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = f.$$

Ceci signifie que les seuls monômes x^α apparaissant avec un coefficient non nul dans f sont tels que $\sum_i q_i\alpha_i = 1$.

Soit donc f un polynôme quasi-homogène et $q_1,\dots,q_n$ les rationnels correspondants. Nous ferons l'hypothèse supplémentaire que

(H) *les dérivées partielles $\partial_{x_1} f,\dots,\partial_{x_n} f$ ne s'annulent simultanément qu'à l'origine des coordonnées.*

Un exemple typique est le polynôme de Pham-Brieskorn

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{d_i}, \quad d_1,\dots,d_n \geqslant 2.$$

On a alors $q_i = 1/d_i$.

Soit J_f l'idéal de l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ formé des combinaisons $\sum_i g_i \cdot \partial f/\partial x_i$. C'est l'*idéal jacobien* de f. Sous l'hypothèse (H), on peut montrer que le quotient $M_f = \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]/J_f$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *de dimension finie*. On note $\mu(f)$ sa dimension.

Pour un polynôme de Pham-Brieskorn, une base de M_f est formée des classes des monômes x^α, où $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ est un multi-indice entier tel que $\alpha_i < d_i - 1$ pour tout $i = 1,\dots,n$. Ainsi, $\mu(f) = (\sum_i d_i) - n$.

La formule

$$\Big(\sum_i q_i x_i \partial_{x_i}\Big)(\partial_{x_k} f) = (1 - q_k)\cdot \partial_{x_k} f$$

montre que l'idéal J_f est laissé stable par l'opérateur $\sum_i q_i x_i \partial_{x_i}$, qui induit donc un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de M_f. Notons $\rho_1,\dots,\rho_r$ ses valeurs propres (les nombres ρ_j sont supposés deux à deux distincts). On peut alors trouver une équation de Bernstein (8) dans laquelle le polynôme $b(s)$ vaut

$$b(s) = (s+1)\prod_{j=1}^{r}\big(s + \rho_j + \textstyle\sum_i q_i\big).$$

Explicitons ce résultat pour un polynôme de Pham-Brieskorn. Les classes des monômes x^α (avec $\alpha_i < d_i - 1$ pour tout i) sont des vecteurs propres pour l'endomorphisme induit par l'opérateur $\sum_i q_i x_i \partial_{x_i}$, de valeur propre $\sum_i \alpha_i/d_i$. On peut donc écrire ici

$$b(s) = (s+1)\prod{}' \Big(s + \sum_i \frac{\beta_i}{d_i}\Big)$$

où $\beta_i \in [1, d_i - 1] \cap \mathbb{N}$ et $\prod'$ signifie que l'on prend le produit sans multiplicité. La plus grande racine de b est obtenue lorsque tous les β_i sont égaux à 1, c'est donc $-\sum_i 1/d_i$.

Plus généralement, si f est quasi-homogène et satisfait l'hypothèse (H), la classe de 1 dans M_f est un vecteur propre de l'endomorphisme induit par $\sum_i q_i x_i \partial_{x_i}$, de valeur propre 0. Donc $-\sum_i q_i$ est la plus grande racine de $b(s)$.

Remarque. Dans tous les exemples précédents, $(s+1)$ divise le polynôme $b(s)$. Autrement dit, dans la relation (7), le facteur $(s+1)$ ne peut pas être éliminé. C'est bien clair si f est une coordonnée. Ceci reste vrai quelque soit f. En effet, hors de $\{f = 0\}$, on peut évaluer l'équation (8) en $s = -1$ pour obtenir

$$f(x)P(-1, x, \partial_x)(1) = b(-1),$$

où $P(-1, x, \partial_x)(1)$ est le résultat de l'action de l'opérateur différentiel P sur la constante 1. Cette identité se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}^n$ et, en évaluant en $x = 0$ ou en un point quelconque tel que $f(x) = 0$, on trouve $b(-1) = 0$. Ainsi, $b(s)$ doit être divisible par $(s+1)$. (On remarquera aussi que, si on écrit $P(s, x, \partial_x) = \sum_\alpha a_\alpha(s, x)\partial_x^\alpha$, alors $a_0(s, x)$ doit aussi être divisible par $(s+1)$).

3.7. Comment ce type de relation sert-il à démontrer le théorème 3.1 ? Supposons donc trouvée une telle relation (8) et soit d l'ordre maximum des dérivations qui interviennent dans P. Si $\mathrm{Ré}(s) > d$, la fonction f^{s+1} est de classe C^d sur tout l'espace $\mathbb{R}^n$ et l'égalité (8) se prolonge par continuité à $\mathbb{R}^n$.

Soit P^* l'adjoint de l'opérateur P : par définition, si g est une fonction de classe C^d et φ une fonction C^∞ à support compact, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(g) \cdot \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g \cdot P^*(\varphi) \, dx$$

qui est l'analogue de l'intégration par parties, où les termes tout intégrés sont nuls puisque φ est à support compact. L'adjoint de P est aussi un opérateur différentiel : il suffit de le vérifier lorsque $P = \partial_{x_i}$ puis d'utiliser le fait que $(P \circ Q)^* = Q^* \circ P^*$.

Montrons comment prolonger $I_\varphi(s)$ au demi-plan $\text{Ré}(s) > -1$. Posons

$$I_\varphi^{(>-1)}(s) = \frac{1}{b(s)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{s+1} \cdot P^*(s, x, \partial_x)(\varphi)\, dx.$$

Pour $\text{Ré}(s) > -1$ l'intégrale est holomorphe en s, de sorte que $I_\varphi^{(>-1)}(s)$ est une fonction méromorphe dans le demi-plan $\text{Ré}(s) > -1$. Il s'agit de vérifier que $I_\varphi^{(>-1)}$ coïncide avec I_φ pour $\text{Ré}(s) > 0$. Par unicité du prolongement analytique, il suffit de vérifier cette coïncidence sur un demi-plan $\text{Ré}(s) \gg 0$. Mais si $\text{Ré}(s) > d$, on a, pour toute fonction φ, C^∞ à support compact, l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^{s+1} \cdot P^*(s, x, \partial_x)(\varphi)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} P(f^{s+1}) \cdot \varphi\, dx = b(s) \int_{\mathbb{R}^n} f^s \varphi\, dx$$

d'après la définition de P^*, d'où l'égalité $I_\varphi = I_\varphi^{(>-1)}$ sur ce domaine.

Un raisonnement analogue permet de poursuivre le prolongement. Les pôles supplémentaires qui peuvent apparaître sont les zéros des polynômes $b(s+1), b(s+2), \dots$, c'est-à-dire les translatés par des entiers < 0 des zéros de b (pour obtenir $I_\varphi^{(>-2)}$, utiliser la relation (8) en y remplaçant d'abord s par $s+1$). $\square$

Il s'avère que l'existence d'une équation fonctionnelle (8) est un résultat purement algébrique concernant certains modules sur l'algèbre de Weyl. La suite de cet article développe les outils nécessaires à la démonstration de ce résultat. Il s'agit d'étudier l'ensemble de toutes les équations différentielles linéaires homogènes (à coefficients dans l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[s, x_1, \dots, x_n]$) satisfaites par la fonction f^s sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \smallsetminus \{f = 0\}$. Ces équations forment un idéal dans l'algèbre de Weyl, et des propriétés de finitude dans cette algèbre nous donneront une relation du type voulu.

Avant de considérer ces questions algébriques, il nous reste à achever le programme de division indiqué à la suite du problème 2.1. Si on développe la fonction $s \mapsto I_\varphi^{(>-2)}(s)$ (holomorphe sur $\text{Ré}(s) > -2$) en série au voisinage de $s = -1$:

$$I_\varphi^{(>-2)}(s) = \sum_{k \geqslant -k_0} a_k(\varphi)(s+1)^k,$$

nous voulons voir que $\varphi \mapsto a_0(\varphi)$ est une distribution (et en fait le même résultat vaut pour tout a_k). Il suffit de montrer un résultat analogue pour les coefficients de la fonction $s \mapsto b(s+1)b(s)I_\varphi^{(>-2)}(s)$. Cette dernière fonction admet l'expression intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{s+2} \cdot P^*(s+1, x, \partial_x)\big(P^*(s, x, \partial_x)(\varphi)\big)\, dx, \tag{11}$$

qui ne fait intervenir que des dérivées à un ordre fini de φ. Il n'est alors pas difficile de donner des majorations du type (1), où la constante C ne dépend que du sup de $|f|$ et des coefficients de l'opérateur P^* sur le support de φ.

Corollaire 3.8. *La distribution* $T : \varphi \mapsto a_0(\varphi)$ *satisfait à* $fT = 1$.

Démonstration. Nous voulons montrer que, pour toute fonction test φ, on a

$$\langle fT, \varphi \rangle \overset{\text{déf}}{=} a_0(f\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx.$$

Remarquons que $I_{f\varphi}(s) = I_\varphi(s+1)$ admet une limite quand $s \to -1$ avec $\mathrm{Ré}(s) > -1$, limite égale à $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, dx$. Par conséquent le prolongement méromorphe $I_{f\varphi}^{(>-2)}(s)$ n'a pas de pôle en $s = -1$ et son terme constant $a_0(f\varphi)$ vaut $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, dx$. □

Remarques 3.9

(1) Tous les coefficients a_k sont ainsi des distributions. Pour $k < 0$, a_k est une distribution à support dans $\{f = 0\}$, car si le support de φ ne rencontre pas l'ensemble $\{f = 0\}$, alors $s \mapsto I_\varphi(s)$ est holomorphe sur tout le plan complexe, donc $a_k(\varphi) = 0$ pour $k < 0$.

(2) La distribution T, et plus généralement les distributions a_k $(k \in \mathbb{N})$ sont *tempérées*. En effet, il s'agit de montrer qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ et un entier p tels que, pour tout s dans un voisinage fixe de -1 et toute fonction test φ, le module du terme de droite dans (11) est majoré par

$$C \sup_{\substack{|\alpha| \leqslant p \\ |\beta| \leqslant p}} \left\| x^\alpha \partial_x^\beta \varphi \right\|_\infty .$$

Ceci s'obtient sans difficulté en utilisant le fait qu'il existe N tel que, pour tout tel s, $|f|^{\mathrm{Ré}\, s+2} \|x\|^{-N}$ soit sommable sur le domaine $\{\|x\| \geqslant 1\}$. L'entier p dépendra alors de N et du degré de l'opérateur P.

4. L'algèbre de Weyl

On travaille sur un corps $\boldsymbol{k}$ de caractéristique 0, par exemple $\boldsymbol{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous aurons aussi à considérer plus loin le corps $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{k}(s)$ des fractions rationnelles d'une variable s à coefficients dans $\boldsymbol{k}$.

Définition 4.1. L'algèbre de Weyl à n variables sur $\boldsymbol{k}$, notée $A_n(\boldsymbol{k})$, est l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux, c'est-à-dire le quotient de l'algèbre libre engendrée par les algèbres de polynômes $\boldsymbol{k}[x_1, \ldots, x_n]$ et $\boldsymbol{k}[\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}]$ par l'idéal bilatère engendré par les relations

(4.1)(∗) $$[\partial_{x_i}, x_j] = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Rendons cette définition plus manipulable. Un élément de $A_n(\boldsymbol{k})$ s'écrit donc comme somme à coefficients dans $\boldsymbol{k}$ de « monômes »

$$x^{\alpha^{(1)}}\partial_x^{\beta^{(1)}}\cdots x^{\alpha^{(\ell)}}\partial_x^{\beta^{(\ell)}},$$

où les α et les β sont des multi-indices dans $\mathbb{N}^n$ et où l'on pose

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},\quad \partial_x^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1}\cdots\partial_{x_n}^{\beta_n}.$$

La multiplication de deux monômes consiste simplement en leur juxtaposition. Les relations (4.1)($*$) permettent d'écrire de manière unique un tel élément sous la forme

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}x^\alpha\partial_x^\beta$$

avec $a_{\alpha,\beta}\in\boldsymbol{k}$. La règle de multiplication avec cette écriture (*i.e.* ce représentant de la classe) est plus compliquée : par exemple on a

$$\partial_{x_i}\cdot x_i = x_i\cdot\partial_{x_i}+1.$$

L'algèbre $A_n(\boldsymbol{k})$ n'est pas commutative. Elle opère sur elle-même par multiplication à gauche ou à droite (les deux opérations commutent mais ne sont pas identiques). Elle opère naturellement à gauche sur l'algèbre des polynômes $\boldsymbol{k}[x_1,\dots,x_n]$: si f est un tel polynôme, on note x_if le produit de x_i par f et $\partial_{x_i}(f)$ la dérivée partielle de f par rapport à x_i. On étend ensuite l'action par composition des précédentes. Elle opère de la même manière sur l'algèbre $\boldsymbol{k}[x_1,\dots,x_n,1/f]$ des fractions rationnelles dont le dénominateur divise une puissance d'un polynôme donné f (cette propriété est stable par dérivation).

5. Idéaux de l'algèbre de Weyl

Puisque l'algèbre n'est pas commutative, il est nécessaire de considérer trois types d'idéaux : les idéaux à gauche, les idéaux à droite et les idéaux bilatères. Réglons tout de suite le compte de ces derniers.

Proposition 5.1. *Il n'y a pas d'idéal bilatère propre, i.e. l'algèbre $A_n(\boldsymbol{k})$ est simple.*

Démonstration. C'est la non-commutativité qui permet ce résultat, car il est évidemment faux sur une algèbre de polynômes. Soit donc I un tel idéal, supposé non nul, et soit $0\neq P\in I$. On écrit $P=\sum_{\alpha,\beta}a_{\alpha,\beta}x^\alpha\partial_x^\beta$. Soit $m_j(P)=\max\{\alpha_j\mid a_{\alpha,\beta}\neq 0\}$ pour $j=1,\dots,n$ et soit j tel que $m_j(P)\neq 0$, de sorte que x_j apparaît effectivement dans l'opérateur P. Alors l'opérateur $Q=[\partial_{x_j},P]$ est dans I, n'est pas nul et on a $m_j(Q)=m_j(P)-1$ (le vérifier).

On est ramené ainsi à supposer que P est un opérateur à coefficients constants. On effectue le même raisonnement en prenant le crochet avec des

x_j et on trouve finalement que I contient une constante non nulle, c'est-à-dire $I = A_n(\boldsymbol{k})$. □

Il suffit donc de s'intéresser aux idéaux à gauche (ou à droite).

Proposition 5.2. *L'algèbre $A_n(\boldsymbol{k})$ est noethérienne, i.e. les idéaux (à gauche ou à droite) sont de type fini.*

Démonstration. Un résultat analogue est vrai pour les algèbres de polynômes, on va donc essayer de s'y ramener.

Commençons par remarquer que $A_n(\boldsymbol{k})$ contient l'algèbre des polynômes comme sous-algèbre : ce sont les opérateurs qui ne font pas intervenir de dérivation, donc les opérateurs de multiplication par un polynôme. On peut ensuite filtrer $A_n(\boldsymbol{k})$ de la manière suivante : $F_p(A_n(\boldsymbol{k}))$ est l'ensemble des opérateurs de la forme

$$\sum_\alpha \sum_{\{\beta \mid |\beta| \leqslant p\}} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial_x^\beta$$

où l'on note $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$. Ainsi F_p désigne le sous-espace des opérateurs d'ordre $\leqslant p$. On a $F_0 = \boldsymbol{k}[x_1, \dots, x_n]$, $F_p \subset F_q$ pour $p \leqslant q$, $\bigcup_p F_p = A_n(\boldsymbol{k})$ et enfin la propriété multiplicative suivante :

$$F_p \cdot F_q = F_{p+q} \tag{12}$$

où le terme de gauche désigne l'ensemble des sommes de produits d'un terme dans F_p et d'un terme dans F_q. Ceci implique en particulier que F_p est un module (à gauche et à droite) sur F_0 et on voit qu'il est libre de type fini (de base les ∂_x^β pour $|\beta| \leqslant p$).

Lemme 5.3. *L'algèbre graduée $\mathrm{gr}^F A_n(\boldsymbol{k})$ est égale à l'algèbre des polynômes $\boldsymbol{k}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$ où ξ_i est la classe de ∂_{x_i} dans F_1/F_0.*

Démonstration. Rappelons que l'algèbre graduée gr^F est l'algèbre $\oplus_p \mathrm{gr}_p^F$, avec $\mathrm{gr}_p^F = F_p/F_{p-1}$ et où l'on convient que $F_{-1} = 0$ de sorte que $\mathrm{gr}_0^F = F_0$. Les propriétés de la filtration F montrent que c'est effectivement une algèbre, et l'égalité (12) montre qu'elle est engendrée par les ξ_i. Il reste à vérifier la commutativité. Celle-ci provient du fait que la classe du commutateur $[\partial_{x_i}, x_i]$ est nulle dans F_1/F_0, puisque ce commutateur (égal à 1) est dans F_0. □

Si P est un opérateur dans $A_n(\boldsymbol{k})$, son ordre relativement à la filtration F est le plus petit p tel que $P \in F_p$. Son symbole est alors la classe de P dans F_p/F_{p-1}. C'est un polynôme homogène de degré p en ξ, donc de la forme $\sum_{\{\beta \mid |\beta|=p\}} a_\beta(x)\xi^\beta$. L'ensemble des symboles des éléments de I engendre un idéal $\sigma(I)$ de $\boldsymbol{k}[x, \xi]$ qui a la propriété suivante : un élément est dans

$\sigma(I)$ si et seulement si chacun des termes homogènes qui le composent est dans $\sigma(I)$ (on dit que l'idéal est gradué). D'après le théorème de Hilbert (l'anneau $\boldsymbol{k}[x,\xi]$ est noethérien), on peut extraire du système de générateurs $(\sigma(P))_{P\in I}$ une famille finie qui engendre encore $\sigma(I)$. Ainsi il existe un nombre fini d'opérateurs P de I tels que les symboles $\sigma(P)$ engendrent $\sigma(I)$. On vérifie alors que I est engendré par ces opérateurs (exercice). $\square$

Remarque 5.4. Attention, il est faux en général que, si $P_1,\dots,P_r$ engendrent l'idéal I, alors les symboles $\sigma(P_1),\dots,\sigma(P_r)$ engendrent l'idéal des symboles $\sigma(I)$. C'est le contraire qui est vrai. Ce principe est à la base de la recherche algorithmique de générateurs d'un idéal (base de Gröbner).

6. La filtration de Bernstein

Dans le cadre algébrique que nous considérons ici, une autre filtration peut aussi être définie et va se révéler très utile : il s'agit de la filtration de Bernstein, qui exploite le fait que l'anneau des coefficients est aussi naturellement filtré par le degré. Pour $p\in\mathbb{N}$ on note donc $B_p(A_n(\boldsymbol{k}))$ l'ensemble des opérateurs de la forme

$$\sum_{\{\alpha,\beta\ \mid\ |\alpha|+|\beta|\leqslant p\}} a_{\alpha,\beta}x^\alpha\partial_x^\beta.$$

Ici, chaque B_p est un espace vectoriel de dimension finie, et la propriété (12) est aussi satisfaite. Le gradué de $A_n(\boldsymbol{k})$ pour cette filtration est encore l'algèbre des polynômes $\boldsymbol{k}[x,\xi]$ (pour la même raison).

7. Modules de type fini sur l'algèbre de Weyl

Nous nous intéressons, dans la suite, aux systèmes d'équations aux dérivées partielles et à leurs solutions. D'un point de vue algébrique, cela revient à considérer des modules (à gauche) sur l'algèbre de Weyl. Expliquons pourquoi.

Remarquons d'abord que l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$, sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ou l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$, sont des $A_n(\boldsymbol{k})$-modules à gauche : ceci signifie simplement qu'on peut appliquer un opérateur aux dérivées partielles à ces objets, que la composition se fait *à gauche*, et que la règle de Leibniz (4.1)($*$) est satisfaite.

Supposons maintenant donnée une famille finie d'opérateurs aux dérivées partielles $P_1,\dots,P_r\in A_n(\boldsymbol{k})$. Si une distribution u sur $\mathbb{R}^n$ est solution du système correspondant, c'est-à-dire si u satisfait à

$$P_1(x,\partial_x)(u)=\cdots=P_r(x,\partial_x)(u)=0,$$

alors u satisfait aussi à $Q(x,\partial_x)(u) = 0$ pour tout opérateur aux dérivées partielles $Q \in A_n(\boldsymbol{k})$ de la forme $Q = \sum_{i=1}^r Q_i P_i$, *i.e.* pour tout opérateur Q contenu dans l'*idéal à gauche* $(P_1,\dots,P_r)$ engendré par $P_1,\dots,P_r$ dans $A_n(\boldsymbol{k})$.

Le quotient $M \overset{\text{déf}}{=} A_n(\boldsymbol{k})/(P_1,\dots,P_r)$ est un *module à gauche* sur l'algèbre de Weyl. La distribution u définit alors un *homomorphisme* de $A_n(\boldsymbol{k})$-modules à gauche $M \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ par la formule

$$[R] \longmapsto R(u).$$

Cette formule est bien définie, puisque si l'on change le représentant R de $[R] \in M$, *i.e.* si on remplace R par $R+Q$ avec $Q \in (P_1,\dots,P_r)$, alors $R(u) = (R+Q)(u)$.

En conclusion : *à tout système d'équations aux dérivées partielles correspond un $A_n(\boldsymbol{k})$-module à gauche ; une solution distribution de ce système est un homomorphisme du module dans le module des distributions.* L'étude des $A_n(\boldsymbol{k})$-modules à gauche correspond donc à l'étude des propriétés algébriques des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Ces propriétés algébriques ont des conséquences sur les propriétés des solutions.

Soit donc M un $A_n(\boldsymbol{k})$-module à gauche[(3)]. Il n'y a pas, en général, de notion naturelle de « symbole » d'un élément de M. Un façon de définir l'ordre d'un élément consiste à choisir des générateurs $m_1,\dots,m_r$ de M et de dire qu'un élément $m \in M$ est d'ordre $\leqslant k$ s'il existe des opérateurs $P_1,\dots,P_r$, tous d'ordre $\leqslant k$, tels que $m = P_1m_1 + \cdots + P_km_k$. Comme une telle écriture n'est pas unique, en général, l'ordre de m est obtenu en considérant toutes les écritures possibles et en prenant le minimum des ordres qu'elles définissent. Ce n'est pas très explicite, mais c'est bien défini car, heureusement, toute partie de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément. Ceci conduit à la notion de « bonne filtration ».

Une *bonne filtration* de M relativement à la filtration F (on a une notion analogue si l'on choisit la filtration B de $A_n(\boldsymbol{k})$) est une filtration croissante exhaustive $(F_kM)_{k\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ et satisfaisant aux propriétés suivantes :

– $F_kM = 0$ pour $k \ll 0$;

– $F_\ell A_n(\boldsymbol{k}) \cdot F_kM \subset F_{k+\ell}M$ pour tous k et ℓ, en particulier F_kM est un module sur $F_0A_n(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}[x]$ et le gradué $\mathrm{gr}^F M$ est un module sur l'anneau gradué $\mathrm{gr}^F A_n(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}[x,\xi]$;

– il existe k_0 tel qu'il y ait égalité dans l'inclusion ci-dessus pour tout $k \geqslant k_0$ et tout $\ell \geqslant 0$;

– F_kM est de type fini sur $F_0A_n(\boldsymbol{k})$.

(3) tous les résultats ont bien entendu un analogue à droite.

On peut montrer que les deux dernières conditions sont en fait équivalentes à la suivante :

– le module gradué $\mathrm{gr}^F M$ est un module de type fini sur l'algèbre des polynômes $\mathrm{gr}^F A_n(\boldsymbol{k})$.

Ainsi, $F_k M$ est l'ensemble des éléments d'ordre $\leqslant k$. Pour obtenir une bonne filtration, on choisit comme ci-dessus des générateurs $m_1, \dots, m_r$ de M et on pose

$$F_k M \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{r} F_k A_n(\boldsymbol{k}) \cdot m_i.$$

(Exercice : vérifier que les propriétés ci-dessus sont satisfaites). Dans cette filtration, les générateurs sont d'ordre 0. On pourrait aussi leur donner à chacun un ordre arbitraire ℓ_i dans $\mathbb{N}$, et poser

$$F_k^{(\boldsymbol{\ell})} M \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{r} F_{k-\ell_i} A_n(\boldsymbol{k}) \cdot m_i,$$

en convenant que $F_j A_n(\boldsymbol{k}) = 0$ pour $j < 0$. Ceci est aussi une bonne filtration, qui peut avoir des indices négatifs. Ceux-ci restent cependant en nombre fini.

Il est donc clair qu'on peut fabriquer une grande quantité de bonnes filtrations (choix des générateurs, choix des degrés) et il est donc important de les comparer.

Proposition 7.1. *Deux bonnes filtrations sont comparables.*

Cela signifie qu'étant données deux bonnes filtrations $F_\bullet$ et $F'_\bullet$ de M, il existe un entier k_0 tel que, *pout tout* k, on ait

$$F_k M \subset F'_{k_0+k} M \quad \text{et} \quad F'_k M \subset F_{k_0+k} M.$$

Cette propriété s'obtient en prenant un nombre fini de générateurs de M dans un F_{k_1} et dans un F'_{k_2}, puis en exprimant les uns en fonction des autres.

Remarque 7.2. On peut donner une définition analogue pour les filtrations de type B. Le quatrième point dit alors que $B_k M$ est de type fini sur $B_0 A_n(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}$, autrement dit est un espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 7.3. *Le module à gauche M admet une bonne filtration si et seulement si il est de type fini sur $A_n(\boldsymbol{k})$. Supposons que tel soit le cas, et soit $F_\bullet M$ une bonne filtration. Alors*

(1) *si M' est un sous-module à gauche de M, la filtration $F_\bullet M' \overset{\text{déf}}{=} F_\bullet M \cap M'$ est une bonne filtration de M', en particulier M' est aussi de type fini ;*

(2) *si M'' est un quotient de M, la filtration $F_\bullet M''$ image de celle de M par la projection $M \to M''$ est bonne ;*

(3) *si on a une suite exacte courte* $0 \to M' \xrightarrow{a} M \xrightarrow{b} M'' \to 0$ *de modules à gauche, on en déduit une suite exacte* (*pour ces filtrations précisément*)

$$0 \longrightarrow \mathrm{gr}^F M' \longrightarrow \mathrm{gr}^F M \longrightarrow \mathrm{gr}^F M'' \longrightarrow 0.$$

Rappelons que *suite exacte courte* signifie que a est injectif, b surjectif et $\operatorname{Ker} b = \operatorname{Im} a$.

Démonstration. La suffisance est claire puisque si on se donne un nombre fini de générateurs $m_1, \ldots, m_r$ de M, on obtient une bonne filtration en prenant $F_k M = \sum_{i=1}^r F_k A_n(\boldsymbol{k}) \cdot m_i$. Inversement, si $F_\bullet M$ est une bonne filtration, un système de générateurs de $F_{k_0} M$ sur $F_0 A_n(\boldsymbol{k})$ en est aussi un pour M sur $A_n(\boldsymbol{k})$.

Le point (2) est immédiat et le point (1) est le classique *lemme d'Artin-Rees* (*cf.* par exemple [**8**, exercice 2, chap. 6]), dont l'argument repose uniquement sur le fait que, sur un anneau noethérien, tout sous-module d'un module de type fini est encore de type fini. Enfin le point (3) est conséquence facile des deux premiers. □

Remarque 7.4. On voit en particulier que tout sous-module d'un $A_n(\boldsymbol{k})$-module de type fini l'est encore.

8. Le polynôme de Hilbert d'une bonne filtration

Les résultats précédents s'appliquent aussi bien aux filtrations de type F qu'à celles de type B. Nous allons maintenant exploiter le fait que, pour une bonne filtration $B_\bullet M$, la dimension de $B_k M$ est finie.

Proposition 8.1. *Soit $B_\bullet M$ une bonne filtration d'un $A_n(\boldsymbol{k})$-module M de type fini non nul. Il existe un unique polynôme d'une variable $H_{M,B}(t)$ tel que pour tout k assez grand on ait $\dim B_k M = H_{M,B}(k)$.*

Soit $d \geqslant 0$ le degré de ce polynôme. Alors le terme de degré d est égal à $\dfrac{m}{d!} t^d$ avec $m \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ et ne dépend pas de la bonne filtration choisie sur M.

Le polynôme $H_{M,B}$ est le *polynôme de Hilbert* de la bonne filtration, son degré $d = d(M)$ est la *dimension*(4) de M et le coefficient $m = \mathrm{mult}(M)$ est la *multiplicité* de M.

(4) Ici, le mot « dimension » est à prendre au sens géométrique : il ne s'agit pas de la dimension d'un espace vectoriel car, en tant que tel, M n'est pas de dimension finie en général. Lorsque $\boldsymbol{k} = \mathbb{C}$, si $\mathrm{gr}^B M$ est le quotient de l'anneau $\boldsymbol{k}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ par l'idéal engendré par des polynômes $p_1(x,\xi), \ldots, p_r(x,\xi)$, la dimension de $\mathrm{gr}_B M$, donc celle de M, est la dimension du sous-ensemble de $\mathbb{C}^{2n}$ défini par les équations $p_1(x,\xi) = \cdots = p_r(x,\xi) = 0$.

Exemple 8.2. Dire que $d(M)=0$, c'est dire que, pour une (ou toute) bonne filtration $B_\bullet M$, la dimension $\dim B_jM$ est constante dès que j est assez grand. Puisque la filtration est supposée exhaustive, *i.e.* $\cup_j B_jM=M$, c'est que $M=B_jM$ pour un certain j. Ceci est équivalent au fait que M est un $\boldsymbol{k}$-espace vectoriel de dimension finie. Cette dimension n'est alors autre que $\mathrm{mult}(M)$. Espérons que tout ceci n'engendrera pas trop de confusion !

Démonstration de la proposition 8.1. Soit $B_k\,\mathrm{gr}^BM=\oplus_{\ell\leqslant k}\mathrm{gr}^B_\ell M$. C'est une bonne filtration du $\boldsymbol{k}[x,\xi]$-module gradué gr^BM et l'on a de manière évidente

$$\dim B_kM=\dim B_k\,\mathrm{gr}^BM.$$

On peut donc appliquer un résultat classique d'algèbre commutative (voir l'annexe, corollaire A.2, ou aussi le dernier chapitre de [**3**]) pour conclure que $\dim B_kM$ est un polynôme en k pour k assez grand, dont le terme dominant a la forme voulue.

Étant données deux bonnes filtrations B et B' de M, il existe un entier k_0 tel que pour tout ℓ on ait

$$B_\ell M\subset B'_{\ell+k_0}M\quad\text{et}\quad B'_\ell M\subset B_{\ell+k_0}M,$$

donc, pour tout ℓ assez grand, on a

$$H_{M,B}(\ell)\leqslant H_{M,B'}(\ell+k_0)\quad\text{et}\quad H_{M,B'}(\ell)\leqslant H_{M,B}(\ell+k_0),$$

ce qui donne immédiatement l'indépendance du terme de plus haut degré du polynôme $H_{M,B}$ vis-à-vis de la bonne filtration. □

Exercice 8.3. Si $M=A_n(\boldsymbol{k})$, montrer que $d(M)=2n$ et $\mathrm{mult}\,M=1$. Si $M=\boldsymbol{k}[x]$, montrer que $d(M)=n$ et $\mathrm{mult}\,M=1$. [Tout revient au calcul de la dimension et la multiplicité d'un anneau de polynômes, pour lequel on choisira la filtration B évidente par le degré.]

L'intérêt et l'utilité de ces notions viennent du résultat suivant :

Corollaire 8.4. *Soit* $0\to M'\to M\to M''\to 0$ *une suite exacte courte de* $A_n(\boldsymbol{k})$*-modules de type fini. On a alors* $d(M)=\max(d(M'),d(M''))$*. Si les trois dimensions sont égales, on a de plus* $\mathrm{mult}(M)=\mathrm{mult}(M')+\mathrm{mult}(M'')$*. Si par exemple* $d(M')<d(M'')$*, on a* $\mathrm{mult}(M)=\mathrm{mult}(M'')$*.*

Démonstration. Il résulte de la proposition précédente que l'on peut calculer les nombres cherchés avec une bonne filtration à notre convenance. Choisissons alors une bonne filtration $B_\bullet M$ et considérons les bonnes filtrations induites $B_\bullet M'$ et $B_\bullet M''$. Elles sont bonnes d'après la proposition 7.3. On conclut en utilisant la suite exacte de la proposition 7.3-(3) pour les filtrations $B_\bullet$ ainsi construites. □

9. Inégalité de Bernstein et modules holonomes

Théorème 9.1. *Soit $M \neq 0$ un $A_n(\boldsymbol{k})$-module de type fini. On a alors*

$$d(M) \geqslant n.$$

Exercice 9.2. Montrer que si $n > 0$ et $M \neq 0$, on ne peut avoir $d(M) = 0$ (cette égalité signifie que M est un $\boldsymbol{k}$-espace vectoriel de dimension finie et on considérera la trace du crochet $[\partial_{x_1}, x_1]$).

Démonstration du théorème 9.1. Fixons une bonne filtration $B_\bullet M$ avec $B_0 M \neq 0$.

Lemme 9.3. *L'application $\boldsymbol{k}$-linéaire*

$$\begin{aligned} B_i A_n(\boldsymbol{k}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(B_i M, B_{2i} M) \\ P &\longmapsto (m \mapsto Pm) \end{aligned}$$

est injective.

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur i : le cas $i = 0$ résulte de l'hypothèse sur $B_0 M$. Soit alors $i \geqslant 1$ et $0 \neq P \in B_i A_n(\boldsymbol{k})$, et supposons que pour tout $m \in B_i M$ on ait $Pm = 0$. On ne peut avoir $P \in B_{i-1} A_n(\boldsymbol{k})$ par hypothèse de récurrence. Il apparaît donc dans P un monôme contenant x_j ou ∂_{x_j} pour un $j \in \{1, \ldots, n\}$. Supposons que ce soit x_j par exemple. Alors on a $0 \neq [P, \partial_{x_j}] \in B_{i-1} A_n(\boldsymbol{k})$ et par hypothèse de récurrence il existe $m \in B_{i-1} M \subset B_i M$ tel que $[P, \partial_{x_j}] m \neq 0$. Or ceci est contradictoire, puisque d'une part $Pm = 0$, donc $\partial_{x_j} Pm = 0$, et d'autre part $P(\partial_{x_j} m) = 0$ puisque $\partial_{x_j} m \in B_i M$. $\square$

Considérons le polynôme de Hilbert $H_{M,B}$. Le lemme montre que pour tout i assez grand on a

$$\begin{aligned} H_{A_n(\boldsymbol{k}),B}(i) = \dim B_i A_n(\boldsymbol{k}) &\leqslant \dim \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(B_i M, B_{2i} M) \\ &= \dim B_i M \cdot \dim B_{2i} M \\ &= H_{M,B}(i) H_{M,B}(2i) \end{aligned}$$

et par suite (voir l'exercice 8.3)

$$2n = \deg H_{A_n(\boldsymbol{k}),B} \leqslant 2 \deg H_{M,B} = 2d(M). \qquad \square$$

Définition 9.4. Un $A_n(\boldsymbol{k})$-module de type fini est dit *holonome*[5] si $M = 0$ ou $M \neq 0$ et $d(M) = n$.

---

[5] Le mot « holonome » vient du grec par la Mécanique (notion de liaison holonome). Ici, la signification en est que le système d'équations aux dérivées partielles contient le maximum possible d'équations sans être trivial, *i.e.* est de dimension minimum.

Corollaire 9.5. *Tout sous-module (resp. tout quotient) d'un module holonome est encore holonome.*

Démonstration. En effet, si on considère une suite exacte courte (*i.e.* a est injectif, b surjectif et $\operatorname{Im} a = \operatorname{Ker} b$)

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\ a\ } M \xrightarrow{\ b\ } M'' \longrightarrow 0$$

avec M holonome et si aucun des modules n'est nul, on a les inégalités $d(M'), d(M'') \geqslant n$, et d'autre part $n = d(M) = \max(d(M'), d(M''))$. Donc les trois dimensions sont égales à n. □

Remarque 9.6. Inversement, si M' et M'' sont holonomes, M l'est aussi.

Les modules holonomes ressemblent beaucoup aux espaces vectoriels de dimension finie.

Corollaire 9.7. *Les modules holonomes sont de longueur finie.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que toute suite strictement décroissante (pour l'inclusion) de sous-modules d'un module holonome M a une longueur bornée par une entier ne dépendant que du module M. Le plus petit entier qui convient est appelé *longueur* du module M.

Considérons donc une telle suite

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_r \supsetneq 0.$$

Puisque les sous-modules d'une telle suite ne sont pas nuls, et puisque leur dimension est constante égale à n, leur multiplicité est une suite décroissante d'entiers > 0, donc elle est stationnaire, disons à partir de l'entier j. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow M_{j+1} \longrightarrow M_j \longrightarrow M_j/M_{j+1} \longrightarrow 0.$$

Tous les modules dans cette suite sont holonomes, puisque chaque M_i l'est, et d'après le corollaire 9.5. On a donc $\operatorname{mult} M_j = \operatorname{mult} M_{j+1} + \operatorname{mult}(M_j/M_{j+1})$. Par définition de j, on a ainsi $\operatorname{mult}(M_j/M_{j+1}) = 0$, ce qui signifie que $M_j/M_{j+1} = 0$, puisque la multiplicité est toujours > 0 si le module n'est pas nul (en effet, c'est un coefficient dominant). Ainsi $M_j = M_{j+1}$. Autrement dit la suite décroissante de modules est elle-même stationnaire et de longueur $\leqslant \operatorname{mult} M$. □

Comme nous allons le voir plus loin, il n'est pas évident en général de décider si un module donné est de type fini. Le corollaire qui suit fournit pour cela un critère très efficace. Le raisonnement qui y est fait est bien connu pour les espaces vectoriels de dimension finie : un espace vectoriel E

est de dimension finie si et seulement si il existe un entier d tel que tout sous-espace *de dimension finie* $E' \subset E$ soit de dimension $\leqslant d$.

Corollaire 9.8. *Soit M un $A_n(\boldsymbol{k})$-module (pas nécessairement de type fini). Si M admet une filtration $B_\bullet M$ satisfaisant pour tout k à*

(1) *$B_\ell A_n(\boldsymbol{k}) \cdot B_k M \subset B_{k+\ell} M$ pour tout ℓ,*
(2) *$B_k M = 0$ si $k \ll 0$ et $\cup_j B_j M = M$ (filtration exhaustive),*
(3) *$\dim B_k M \leqslant \dfrac{c_0}{n!} k^n + c_1(k+1)^{n-1}$, où c_0 et c_1 sont deux entiers $\geqslant 0$,*

alors M est holonome et $\operatorname{mult} M \leqslant c_0$. En particulier M est de type fini.

Démonstration. Soit N un sous-module de type fini de M et $B_\bullet N$ une bonne filtration de N. Soit k_0 tel que pour tout $\ell \geqslant 0$ on ait $B_{k_0+\ell} N = B_\ell A_n(\boldsymbol{k}) B_{k_0} N$. Il existe un entier $k_0' \geqslant 0$ tel que $B_{k_0} N \subset B_{k_0+k_0'} M$ (le vérifier sur une base de $B_{k_0} N$). On a ainsi, pour tout $k \geqslant k_0$, l'inclusion $B_k N \subset B_{k+k_0'} M$ d'après la propriété (1) de $B_\bullet M$. L'inégalité (3) implique alors que $d(N) \leqslant n$, donc $d(N) = n$ d'après l'inégalité de Bernstein, c'est-à-dire que N est holonome. De plus on a aussi $\operatorname{mult} N \leqslant c_0$.

Considérons alors une suite croissante de sous-modules de type fini de M. Ils sont tous holonomes et la suite des multiplicités est aussi croissante. Puisqu'elle est majorée par c_0, elle est stationnaire et par le même argument que ci-dessus la suite des modules est elle-même stationnaire. Comme M est réunion de ses sous-modules de type fini, on en conclut que M est holonome et de multiplicité $\leqslant c_0$. $\square$

10. Exemples de modules holonomes

Nous avons maintenant à notre disposition un certain nombre d'outils pour fabriquer, à partir d'un module holonome, de nouveaux modules holonomes. La vérification de l'holonomie se fait en utilisant le corollaire 9.8.

Théorème 10.1. *Soit $f \in \boldsymbol{k}[x_1, \dots, x_n]$ un polynôme non nul. Désignons par $\boldsymbol{k}[x_1, \dots, x_n, 1/f]$ l'anneau des fractions rationnelles à pôles le long de $f = 0$, muni de sa structure naturelle de $A_n(\boldsymbol{k})$-module à gauche. C'est un module holonome (donc de type fini) sur $A_n(\boldsymbol{k})$.*

Remarques 10.2

(1) Nous verrons plus précisément qu'il existe k_0 tel que $1/f^{k_0}$ engendre $\boldsymbol{k}[x_1, \dots, x_n, 1/f]$ comme $A_n(\boldsymbol{k})$-module, c'est-à-dire que, pour tout $k \geqslant k_0$, $1/f^k$ s'obtient à partir de $1/f^{k_0}$ en lui appliquant un opérateur différentiel.

(2) Ce résultat n'est pas évident (essayer[6] de montrer directement que, pour k assez grand, l'élément $1/f^k$ est un générateur de $\boldsymbol{k}[x, 1/f]$ comme $A_n(\boldsymbol{k})$-module !).

(3) Le quotient $\boldsymbol{k}[x, 1/f]/\boldsymbol{k}[x]$ est aussi holonome. Tous les éléments de ce module sont annulés par une puissance de f. La classe de $1/f$ dans ce module joue le rôle de la distribution de Dirac portée par $f = 0$.

Démonstration du théorème 10.1. Nous allons utiliser le corollaire 9.8. Posons $\delta = \deg f$. Considérons la filtration suivante de $\boldsymbol{k}[x_1, \ldots, x_n, 1/f]$:

$$B_k\boldsymbol{k}[x_1, \ldots, x_n, 1/f] = \{g/f^k \mid g \in \boldsymbol{k}[x_1, \ldots, x_n] \text{ et } \deg g \leqslant (\delta + 1)k\}.$$

Ainsi, les éléments de B_k sont les fractions rationnelles de degré $\leqslant k$ et d'ordre du pôle $\leqslant k$.

Toute fraction rationnelle est dans l'un des B_k : si la fraction s'écrit h/f^j, elle s'écrit aussi $hf^\ell/f^{j+\ell}$; on peut choisir ℓ assez grand pour que $\ell + j(\delta + 1) \geqslant \deg h$, et donc $\deg(hf^\ell) \leqslant \ell + \deg f^{j+\ell}$. Ainsi, la filtration $B_\bullet$ est exhaustive. Bien évidemment, on a $B_k = 0$ pour $k < 0$.

Montrons que la propriété (1) du corollaire 9.8 est satisfaite : il suffit de le voir pour la multiplication par x_i et la dérivation ∂_{x_i} ; si $g/f^k \in B_k$, alors $x_i g/f^k \in B_{k+1}$, puisque $x_i g/f^k = x_i fg/f^{k+1}$ et $\deg(x_i fg) = (\delta+1)\deg g \leqslant (\delta + 1)(k + 1)$; de même,

$$\partial_{x_i}(g/f^k) = \frac{f\partial_{x_i}g - g\partial_{x_i}f}{f^{k+1}},$$

et le degré de chaque terme du numérateur est $< (\delta + 1)(k + 1)$.

Il reste enfin à considérer la propriété (3) du corollaire 9.8. La dimension de B_k est la dimension de l'ensemble des polynômes g de degré $\leqslant (\delta + 1)k$ à n variables, donc c'est $C^n_{n(\delta+1)k}$, qui s'écrit $(\delta + 1)^n k^n/n! + \cdots$.

Le corollaire 9.8 nous dit ainsi que $\boldsymbol{k}[x_1, \ldots, x_n, 1/f]$ est de type fini sur $A_n(\boldsymbol{k})$, holonome, et de multiplicité $(\delta + 1)^n$. □

11. Équation fonctionnelle de Bernstein

Revenons maintenant à l'équation fonctionnelle (8). Soit $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{k}(s)$ le corps des fractions rationnelles d'une nouvelle variable s. Soit f un polynôme dans $\boldsymbol{k}[x]$. On peut « tordre » la structure de $A_n(\boldsymbol{K})$-module sur $\boldsymbol{K}[x, 1/f]$ par f^s, c'est-à-dire qu'on définit une nouvelle action de $A_n(\boldsymbol{K})$ sur $\boldsymbol{K}[x, 1/f]$ par la formule

$$P\bullet(h) = f^{-s} \cdot P \cdot f^s(h).$$

[6] se reporter à la remarque 11.3 en cas d'échec.

Il n'y a pas à s'effrayer du facteur f^s qui n'a qu'une signification formelle ici. Si on préfère s'en passer, on définit l'action de ∂_{x_i} sur la fraction rationnelle h par

$$\partial_{x_i}\bullet(h) = \frac{\partial h}{\partial x_i} + s\frac{\partial f/\partial x_i}{f}\cdot h,$$

ce qu'on notera aussi

$$\partial_{x_i}\bullet = \partial_{x_i} + s\partial_{x_i}(\log f),$$

la multiplication par un polynôme en $s, x_1, \ldots, x_n$ restant inchangée. Pour vérifier que cette nouvelle action des dérivations donne bien une structure de module sur l'algèbre de Weyl, c'est-à-dire notamment que

$$\partial_{x_i}\bullet(\partial_{x_j}\bullet(h)) = \partial_{x_j}\bullet(\partial_{x_i}\bullet(h)),$$

il est plus simple, heuristiquement, d'utiliser la première écriture, bien que la justification rigoureuse utilise la seconde.

On note $\boldsymbol{K}[x, 1/f]^{(s)}$ ce « nouveau » $A_n(\boldsymbol{K})$-module. On remarquera que, en tant qu'ensemble, et même en tant que $\boldsymbol{K}[x]$-module, il ne diffère en rien de $\boldsymbol{K}[x, 1/f]$.

Lemme 11.1. *Le $A_n(\boldsymbol{K})$-module $\boldsymbol{K}[x, 1/f]^{(s)}$ est holonome.*

Démonstration. Elle se fait exactement comme celle du théorème 10.1. □

Démonstration de l'équation fonctionnelle de Bernstein (8)

Considérons la suite décroissante des sous-modules M_j de $\boldsymbol{K}[x, 1/f]^{(s)}$ engendrés (en tant que $A_n(\boldsymbol{K})$-module) par f^j ($j \geqslant 0$) : un élément de M_j est combinaison à coefficients dans $\boldsymbol{K}[x_1, \ldots, x_n]$ de termes

$$f^{-s}\Big[\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}\Big](f^{s+j}).$$

Celle-ci est stationnaire (corollaire 9.7). Il existe donc k tel que $M_k = M_{k+1}$ et par suite il existe un opérateur $Q \in A_n(\boldsymbol{K})$ tel que

$$f^k = Q(s, x, \partial_x + s\partial_x(\log f))(f^{k+1}).$$

En réduisant les coefficients de Q au même dénominateur par rapport à s, on trouve un polynôme non nul $\widetilde{b}(s) \in \boldsymbol{k}[s]$ et un opérateur $\widetilde{P} \in \boldsymbol{k}[s, x]\langle\partial_x\rangle$ tels que l'on ait

$$\widetilde{b}(s)f^k = \widetilde{P}(s, x, \partial_x + s\partial_x(\log f))(f^{k+1}),$$

c'est-à-dire encore

$$\widetilde{b}(s)f^k = [\widetilde{P}(s, x, \partial_x + s\partial_x(\log f))\cdot f^k](f). \tag{13}$$

Mais on a dans $A_n(\boldsymbol{K})$ la relation

$$\widetilde{P}(s, x, \partial_x + s\partial_x(\log f))\cdot f^k = f^k\cdot\widetilde{P}(s, x, \partial_x + (s+k)\partial_x(\log f))$$

puisque
$$\partial_{x_i} \cdot f^k = f^k \cdot \partial_{x_i} + [\partial_{x_i}, f^k]$$
et
$$[\partial_{x_i}, f^k] = \partial_{x_i}(f^k) = kf^{k-1}\frac{\partial f}{\partial x_i} = kf^k\partial_{x_i}(\log f).$$
Ainsi, en divisant par f^k les deux membres de la relation (13), ce qui est possible dans $\boldsymbol{K}[x, 1/f]$, on trouve
$$\widetilde{b}(s) = \widetilde{P}(s, x, \partial_x + (s+k)\partial_x(\log f))(f),$$
et en posant
$$b(s) = \widetilde{b}(s-k) \quad \text{et} \quad P(s, x, \partial_x + s\partial_x(\log f)) = \widetilde{P}(s-k, x, \partial_x + s\partial_x(\log f))$$
on trouve la relation cherchée en prenant $\boldsymbol{k} = \mathbb{R}$. □

Une telle relation n'est pas unique (multiplier les deux membres par un polynôme en s par exemple). Si on a deux relations de ce type, avec les données (b_1, P_1) et (b_2, P_2), alors, par l'algorithme d'Euclide pour les polynômes d'une variable, on peut en fabriquer une troisième (b_3, P_3), où b_3 est le pgcd de b_1 et b_2. Il existe donc une relation — c'est souvent la plus intéressante — pour laquelle le polynôme b, qui n'est pas le polynôme nul, a un degré minimum. On peut aussi normaliser de sorte que son coefficient dominant soit 1.

Définition 11.2. Le polynôme unitaire de degré minimal tel qu'une telle relation ait lieu s'appelle *polynôme de Bernstein* (on dit aussi *Bernstein-Sato*) de f, noté b_f.

Remarque 11.3. Nous pouvons donner plus explicitement un générateur de $\boldsymbol{k}[x, 1/f]$ comme $A_n(\boldsymbol{k})$-module à gauche : soit k un entier $\geqslant 1$ tel que $b_f(-\ell) \neq 0$ pour tout entier $\ell > k$; alors $1/f^k$ engendre $\boldsymbol{k}[x, 1/f]$ comme $A_n(\boldsymbol{k})$-module. En effet, il suffit de montrer que pour tout $\ell > k$ on a $1/f^\ell \in A_n(\boldsymbol{k}) \cdot 1/f^k$. Mais on a pour un tel ℓ
$$1/f^\ell = \frac{1}{b_f(-\ell)b_f(-\ell+1)\cdots b_f(-k-1)} \cdot \Big[P(x, -\ell, \partial_x)\cdots P(x, -k-1, \partial_x)\Big](1/f^k).$$

Dans de nombreuses situations, on sait calculer le polynôme de Bernstein b_f (voir notamment [**7**]) et par conséquent l'entier k correspondant.

12. Division des distributions tempérées holonomes

Soit u une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$. Nous dirons que u est *holonome* s'il existe une famille $P_1, \ldots, P_r \in A_n(\boldsymbol{k})$ d'équations aux dérivées partielles dont u est solution et telle que le module $M = A_n(\boldsymbol{k})/(P_1, \ldots, P_r)$ soit *holonome* au sens de la définition 9.4.

Par exemple, la fonction constante $u = 1$ est une distribution holonome, car elle satisfait à $\partial_{x_1} u = \cdots = \partial_{x_n} u = 0$, et le module $M = A_n(\boldsymbol{k})/(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$ est égal à $\boldsymbol{k}[x_1, \ldots, x_n]$.

De même, la distribution de Dirac δ_0 sur $\mathbb{R}^n$ est holonome. Ceci illustre un phénomène général :

Théorème 12.1. *Si u est une distribution tempérée holonome sur $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$, sa transformée de Fourier $\widehat{u}$, qui est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $\xi_1, \ldots, \xi_n$, est aussi holonome.*

Démonstration. Si u est solution de $P_1, \ldots, P_r$, alors $\widehat{u}$ est solution du système $\widehat{P}_1, \ldots, \widehat{P}_r$, où $\widehat{P}(\xi, \partial_\xi)$ est l'opérateur obtenu à partir de $P(x, \partial_x)$ en remplaçant ∂_{x_i} par ξ_i et x_i par $-\partial_{\xi_i}$ (ceci résulte de ce que la transformation de Fourier échange multiplication et dérivation, avec un signe).

Notons $\widehat{M}$ le module défini par $\widehat{P}_1, \ldots, \widehat{P}_r$. Il suffit donc de montrer que M est holonome si et seulement si $\widehat{M}$ l'est. Mais $\widehat{M}$ n'est autre que M dans lequel on effectue un simple changement d'écriture $x \mapsto -\partial_\xi$, $\partial_x \mapsto \xi$. Les propriétés d'une bonne filtration $B_\bullet$ ne sont pas affectées par ce changement d'écriture (il n'en serait pas de même d'une bonne filtration $F_\bullet$, où x et ∂_x ne jouent pas un rôle symétrique). Ainsi, $d(\widehat{M}) = d(M)$, d'où le résultat. $\square$

Au point où nous en sommes, nous pourrions montrer avec les outils développés plus haut que la distribution T introduite au corollaire 3.8, ou les distributions a_k, sont holonomes. Mais ceci nous entraînerait un peu trop loin.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer :

Théorème 12.2. *Soit v une distribution tempérée holonome sur $\mathbb{R}^n$ et soit P un opérateur aux dérivées partielles à coefficients constants. Il existe une distribution tempérée holonome u solution de l'équation $P(u) = v$.*

Démonstration. Notons $f = \widehat{P}$ le polynôme en les variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ obtenu à partir de P en y faisant la transformation $\partial_{x_i} \mapsto \xi_i$. Posons $S = \widehat{v}$. Il suffit de trouver une distribution holonome T telle que $\widehat{P} \cdot T = S$. Par transformation de Fourier inverse, si $T = \widehat{u}$, alors u est solution de $P(u) = v$ et, d'après le théorème 12.1, u est holonome.

Soient $P_1, \dots, P_r \in A_n(\mathbb{R})$ une famille d'opérateur définissant un système holonome d'équations aux dérivées partielles satisfait par S, et soit M le module $A_n(\mathbb{R})/(P_1, \dots, P_r)$. On introduit le localisé

$$M[1/f] \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{k}[x, 1/f] \otimes_{\boldsymbol{k}[x]} M,$$

qui remplace ici $\boldsymbol{k}[x, 1/f]$. La structure de $A_n(\boldsymbol{k})$-module sur le produit tensoriel $\boldsymbol{k}[x, 1/f] \otimes_{\boldsymbol{k}[x]} M$ est définie à l'aide de la formule de Leibniz :

$$\partial_{x_i}\big(p(x) \otimes m\big) = \big(\partial_{x_i} p(x)\big) \otimes m + p(x) \otimes \big(\partial_{x_i} m\big).$$

L'analogue du théorème 10.1 reste vrai : le $A_n(\boldsymbol{k})$-module $M[1/f]$ est encore holonome.

Démonstration du théorème 10.1 dans le cas général
C'est une simple adaptation de la démonstration pour $\boldsymbol{k}[x, 1/f]$. Nous utilisons bien sûr le corollaire 9.8. Soit $\delta = \deg f$ et fixons une bonne filtration $B_\bullet M$ de M telle que $B_k M = 0$ pour $k < 0$. Considérons l'image M_1 de M dans $M[1/f]$ par l'application $m \mapsto 1 \otimes m$. C'est le quotient de M par sa f-torsion (ensemble des éléments annulés par une puissance de f). C'est donc aussi un module holonome et l'on a $M_1[1/f] = M[1/f]$. On peut donc remplacer M par M_1 et supposer dès le début que M est contenu dans $M[1/f]$.
Un élément $\widetilde{m}$ de $M[1/f]$ peut s'écrire $(1/f^k) \otimes m$ avec $m \in M$, donc pour tout $\widetilde{m} \in M[1/f]$ il existe k tel que $f^k \widetilde{m} \in M$. Considérons la filtration $B_\bullet M[1/f]$ définie par $B_k M[1/f] = 0$ pour $k < 0$ et, pour $k \geqslant 0$,

$$B_k M[1/f] = \{\widetilde{m} \in M[1/f] \mid f^k \widetilde{m} \in B_{(\delta+1)k} M\}.$$

On a $B_0 M[1/f] = B_0 M$. Remarquons que si $\widetilde{m} \in B_k M[1/f]$, alors pour tout $\ell \geqslant 0$ on a $f^{k+\ell} \widetilde{m} \in B_{(\delta+1)k+\delta\ell} M$.
La propriété (1) du corollaire 9.8 est satisfaite : vérifions par exemple que $\partial_{x_i} B_k M[1/f] \subset B_{k+1} M[1/f]$. On a, pour $\widetilde{m} \in B_k M[1/f]$,

$$f^{k+1} \partial_{x_i} \widetilde{m} = \partial_{x_i}\big(f^{k+1} \widetilde{m}\big) - \partial_{x_i}\big(f^{k+1}\big) \widetilde{m}$$

et le premier terme est dans $B_{(\delta+1)k+\delta+1} M$, le second dans $B_{(\delta+1)k+\delta-1} M$, donc tous deux sont dans $B_{(\delta+1)(k+1)} M$ et par suite $\partial_{x_i} \widetilde{m}$ est dans $B_{k+1} M[1/f]$.
Le point (3) de ce corollaire est aussi satisfait : on a

$$\begin{aligned} \dim B_k M[1/f] &\leqslant \dim B_{(\delta+1)k} M \\ &\leqslant \frac{\operatorname{mult} M}{d(M)!} \cdot [(\delta+1)k]^{d(M)} + c \cdot [(\delta+1)k + 1]^{d(M)-1}. \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que la filtration ainsi construite est *exhaustive*, *i.e.* que l'on a

$$\textstyle\bigcup_k B_k M[1/f] = M[1/f].$$

Soit $\widetilde{m} \in M[1/f]$. Il existe alors ℓ tel que $f^\ell \widetilde{m} \in M$, donc $f^\ell \widetilde{m} \in B_j M$ pour un certain j. Soit alors $k \geqslant j - (\delta+1)\ell$. On a $f^{k+\ell} \widetilde{m} \in B_{j+k\delta} M$ et par hypothèse on a $j + k\delta \leqslant (\delta+1)(k+\ell)$. □

Posant $\boldsymbol{K} = \mathbb{R}(s)$, on introduit le $A_n(\boldsymbol{K})$-module $M[1/f]^{(s)}$ analogue de $\boldsymbol{K}[x, 1/f]^{(s)}$ au § 11 : on pose $M[1/f]^{(s)} = \boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{k}} M[1/f]$, et on « tord » l'action des dérivations. On montre que c'est un $A_n(\boldsymbol{K})$-module holonome. Soit [1] la classe de 1 dans M et soit m son image dans $M[1/f]$. Alors on montre comme au § 11 qu'il existe une relation

$$b(s)m = P(s, x, \partial_x + s\partial(\log f))(m).$$

On peut maintenant copier la démonstration de la division de 1 par f, faite au § 3.7, avec de petites modifications :

– il faut remplacer l'intégrale $I_\varphi(s)$ par le crochet $\langle S, f^s\varphi\rangle$;

– la distribution tempérée S est d'ordre fini p, pas nécessairement nul ; le crochet $\langle S, f^s\varphi\rangle$ n'est donc défini et holomorphe en s que pour $\mathrm{Ré}\, s > p$; les pôles qui peuvent apparaître dans le prolongement méromorphe jusqu'à $s = -1$ sont produits en divisant par $b(s) \cdots b(s + p + 1)$;

– enfin, la méthode ci-dessus fournit une distribution tempérée et holonome T telle que $fT - S$ soit à support dans $\{f = 0\}$; il est donc nécessaire de traiter le cas des distributions S à support dans $\{f = 0\}$ (dans ce cas, la méthode par transformation de Mellin donne $T = 0$, donc ne fait rien).

Un cas simple de division d'une distribution S à support dans $\{f = 0\}$ est celui où f est une forme linéaire. Après un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que $f = x_1$. Alors, S étant d'ordre fini, il existe k tel que $x_1^k S = 0$. Si $k = 1$, on voit comme dans l'exercice donné dans l'introduction que $T = -\partial S/\partial x_1$ est solution de $x_1 T = S$. Pour k quelconque, on obtient T comme une combinaison des $\partial^j S/\partial x_1^j$ pour $j \leqslant k$.

Pour f quelconque, voici une brève indication de la manière dont on procède : on considère le polynôme $g(x_1, \ldots, x_n) = 1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$; on peut montrer que la distribution tempérée(7) $S_{g,\sigma} = \widehat{g^{-\sigma}\widehat{S}}$ n'est plus à support dans $\{f = 0\}$ dès que $\mathrm{Ré}\,\sigma \gg 0$ (c'est en fait une fonction localement intégrable et de classe $C^{m(\sigma)}$, avec $m(\sigma) \to \infty$ avec $\mathrm{Ré}\,\sigma$).

La distribution S étant holonome, $\widehat{S}$ l'est aussi, et on peut appliquer le principe de prolongement méromorphe, par rapport à σ, au résultat de la division de $S_{g,\sigma}$ par f. En prenant le terme constant pour $\sigma = 0$, on montre que la distribution T obtenue satisfait à $fT = S$. □

Conclusion. Le procédé du prolongement méromorphe fonctionne à merveille pour les distributions holonomes. Il permet de montrer que des opérations en général non permises sur les distributions peuvent s'effectuer sur les

(7) Ici, je note de la même manière la transformation de Fourier et son inverse ; en toute rigueur, il faut remplacer le grand « chapeau » par le symbole de la transformation de Fourier inverse.

distributions holonomes, avec un résultat holonome. Par exemple, on peut définir une opération de « restriction » d'une distribution holonome tempérée à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, alors que, pour une distribution quelconque, il faudrait faire une hypothèse sur le front d'onde de la distribution. De même, une notion de « produit » de deux distributions holonomes peut être défini, et c'est une distribution holonome. Dans tous ces exemples, l'idée de démonstration est la même : on construit des familles de distributions paramétrées par s, de sorte que les distributions initiales soient obtenues pour $s = 0$; de plus, les distributions sont des fonctions de plus en plus régulières pour $\mathrm{Ré}\, s \gg 0$; l'opération sur les familles est bien définie pour $\mathrm{Ré}\, s \gg 0$; on effectue alors un prolongement méromorphe par rapport à s sur le résultat de l'opération, et on prend le coefficient constant en $s = 0$ comme définition du résultat de l'opération sur les distributions initiales. C'est la propriété d'holonomie qui permet de montrer l'existence d'un tel prolongement méromorphe.

Appendice : le polynôme de Hilbert

Je rappelle la notion de polynôme de Hilbert dans le cadre de l'algèbre commutative. Je me limiterai au cas simple de l'anneau des polynômes et des modules sur cet anneau, qui est le seul cas utilisé plus haut.

L'anneau des polynômes $\boldsymbol{k}[x_1, \dots, x_m]$ à m variables (au § 8, on utilise $m = 2n$) est gradué : un élément homogène de degré d est, par définition, un polynôme homogène de degré d au sens usuel.

Soit N un module sur $\boldsymbol{k}[x_1, \dots, x_m]$. On le suppose de plus *gradué*, c'est-à-dire de la forme $N = \oplus_{k\in\mathbb{N}} N^{(k)}$, avec la propriété que, si f_d est un polynôme homogène de degré d, $f_d N^{(k)} \subset N^{(k+d)}$. Typiquement, un tel N s'obtient comme gradué associé à un module filtré.

Supposons que N est engendré par un nombre fini d'éléments. Il est aussi engendré par les composantes homogènes de ces éléments. Soient donc $m_1, \dots, m_r$ des éléments homogènes de degrés respectifs $d_1, \dots, d_r$ qui engendrent N. Si $m \in N$ est homogène de degré k, on peut écrire $m = \sum_{i=1}^r \varphi_i m_i$, $\varphi_i \in \boldsymbol{k}[x_1, \dots, x_m]$, et on peut ne retenir dans les φ_i que leur composante homogène de degré $k - d_i$. En particulier, chaque $N^{(k)}$ est un $\boldsymbol{k}$-espace vectoriel de dimension finie.

Posons $N_k = \oplus_{j\leqslant k} N^{(j)}$. C'est aussi un $\boldsymbol{k}$-espace vectoriel de dimension finie. La *série de Poincaré* de N est la série formelle

$$P(N, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dim N_k \, t^k.$$

***Théorème A.1* (Hilbert, Serre).** *La série de Poincaré d'un module gradué de type fini N sur l'anneau des polynômes à m variables est la série formelle associée à une fraction rationnelle. De plus, $(1-t)^{m+1}P(N,t)$ est un polynôme à coefficients entiers.*

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur le nombre de variables. Si $m=0$, la suite N_k est stationnaire à partir d'un certain k_0, donc

$$P(N,t)=\sum_{j=0}^{k_0-1}\dim N_k t^k+\dim N_{k_0}t^{k_0}(1+t+t^2+\cdots)=p(t)+\frac{\dim N_{k_0}t^{k_0}}{1-t},$$

où $p(t)$ est un polynôme de degré $\leqslant k_0-1$ à coefficients entiers.

Pour $m\geqslant 1$, on considère la multiplication par x_m sur $N^{(k)}$, d'image contenue dans $N^{(k+1)}$. On note $K^{(k)}$ son noyau et $C^{(k+1)}$ son conoyau, quotient de $N^{(k+1)}$ par l'image $x_m(N^{(k)})$. On a alors

$$\dim N^{(k+1)}-\dim N^{(k)}=\dim C^{(k+1)}-\dim K^{(k)},$$

donc une égalité analogue

$$\dim N_{k+1}-\dim N_k=\dim C_{k+1}-\dim K_k,$$

en convenant que $N_{-1}=0$. En multipliant par t^{k+1} et en sommant sur k on obtient

$$(1-t)P(N,t)=\dim N^{(0)}-\dim C^{(0)}+P(C,t)-tP(K,t).$$

Les modules gradués $K=\oplus_k K^{(k)}$ et $C=\oplus_k C^{(k)}$ sont de type fini sur l'anneau $\boldsymbol{k}[x_1,\dots,x_m]$, car ce sont respectivement un sous-module et un quotient d'un tel module : dans le premier cas, on applique le lemme d'Artin-Rees. Par ailleurs, la multiplication par x_m est nulle sur K et C, donc ce sont aussi des $\boldsymbol{k}[x_1,\dots,x_{m-1}]$-modules de type fini, auxquels on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui permet de conclure. $\square$

La *dimension* de N est l'ordre du pôle moins 1 de la fraction $P(N,t)$ en $t=1$. Cette dimension est au plus égale au nombre de variables, d'après le théorème ci-dessus. On la note $d(N)$. Ainsi, $(1-t)^{d(N)+1}P(N,t)$ est un polynôme.

***Corollaire A.2*.** *La dimension de N_k est, pour tout k assez grand, un polynôme en k dont le terme dominant s'écrit $\dfrac{a}{d(N)!}t^{d(N)}$ pour un certain entier a.*

Démonstration. La dimension $\dim N_k$ est le coefficient de t^k dans la série $P(N,t)$, qui s'écrit, en développant $(1-t)^{-(d(N)+1)}$ (*cf.* solution de l'exercice

8.3 ci-dessous),

$$\Big(\sum_{i=0}^{p} a_i t^i\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} C^{d(N)}_{d(N)+k} t^k\Big),$$

d'où, pour tout $k \geqslant p$, une expression

$$\dim N_k = \sum_{i=0}^{p} a_i C^{d(N)}_{d(N)+k-i}$$

qui est polynomiale en k, et de degré $d(N)$. Le coefficient de $k^{d(N)}$ est $a_p/d(N)!$. $\square$

Solution de l'exercice 8.3. Il s'agit de calculer le nombre de monômes de degré $\leqslant k$ à m variables (on s'intéresse au cas où $m = 2n$, ou bien au cas où $m = n$). Notons $q(m,k)$ ce nombre (en convenant que $q(m,-1) = 0$ et $q(0,k) = 1$ pour tout k). Si $p(m,k) = q(m,k) - q(m,k-1)$ est le nombre de monômes de degré k exactement, on a $p(m,k) = q(m-1,k)$ (par déshomogénéisation), d'où $q(m,k) = q(m-1,k) + q(m,k-1)$, qui est la relation binomiale satisfaite par C^m_{m+k}, ce qui donne, compte tenu des valeurs initiales, $q(m,k) = C^m_{m+k}$. On en déduit que la dimension de $\boldsymbol{k}[x_1,\dots,x_m]$ est m et que sa multiplicité est 1.

Le même raisonnement s'applique pour le calcul de la série $(1-t)^{m+1}$: si on pose $(1-t)^{m+1} = \sum_{k\geqslant 0} r(m,k)t^k$, on a $r(0,k) = 1$ pour tout k et, par récurrence sur m, en écrivant $(1-t)(1-t)^{m+1} = (1-t)^m$, on trouve la relation $r(m,k) = r(m-1,k) + r(m,k-1)$.

Références

[1] M.F. Atiyah – « Resolution of singularities and division of distributions », *Comm. Pure Appl. Math.* **23** (1970), p. 145–150, & [**2**, vol. 3].

[2] ———, *Collected works*, Oxford University Press, 1988.

[3] M.F. Atiyah & I.G. MacDonald – *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading MA, 1969.

[4] J.N. Bernstein – « The possibility of analytic continuation of f_+^λ for certain polynomials f », *Funkcional. Anal. i Priložen* **2** (1968), no. 1, p. 92–93.

[5] ———, « The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter », *Funct. An. and Appl.* **6** (1972), p. 273–285.

[6] J.N. Bernstein. & S.I. Gel'fand – « Meromorphy of the function P^λ », *Funkcional. Anal. i Priložen.* **3** (1969), no. 1, p. 84–85.

[7] J. Briançon, M. Granger, Ph. Maisonobe & M. Miniconi – « Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein : cas non dégénéré », *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*) **39** (1989), p. 553–610.

[8] S. Lang – *Algebra*, Addison-Wesley, Reading MA, 1965.

[9] B. Malgrange – « Monodromie, phase stationnaire et polynôme de Bernstein-Sato », in *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, Éditions Cassini, Paris, 2000.

[10] P. Schapira – « Dérivées partielles (équations aux) - Analyse microlocale », in *Encyclopædia Universalis*, vol. 7, 1990, p. 232–234.

[11] L. Schwartz – *Théorie des distributions,* tome I, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1091, Hermann, Paris, 1950.

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* `sabbah@math.polytechnique.fr`
Url : `http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/sabbah.html`