JEUX RÉPÉTÉS

par

Tristan Tomala

Table des matières

1. Modèle général

Dans un jeu répété, les joueurs interagissent à chaque date $t \in \mathbb{N}^*$. Chaque étape génère un paiement et le paiement global d'un joueur est fonction de la suite de ses paiements d'étapes. Nous allons tout d'abord décrire précisément ce modèle, préciser les notions de stratégies ainsi que les notions de solutions (valeur, équilibres). On rappelle que pour une famille d'ensembles $(E^i)_{i\in N}$, on note $E = \prod_{i\in N} E^i$.

1.1. Description du jeu. — Un *jeu répété* Γ est décrit par les données suivantes :

– Un ensemble de joueurs N ;
– Un ensemble d'états K ;
– Pour chaque joueur $i \in N$, un ensemble d'actions A^i et un ensemble de signaux U^i ;
– Une probabilité initiale p sur $K \times U$;

– Une probabilité de transition $Q : K \times A \to K \times U$;

– Pour chaque joueur $i \in N$, et chaque état $k \in K$, une fonction de paiement $g^{i,k} : A \to \mathbb{R}$.

Tous les ensembles ci-dessus sont finis et non vides.

Le déroulement du jeu est le suivant :

– Avant le début du jeu, la nature tire un état initial et des signaux $(k_1, (u_0^i)_{i\in N}) \in K \times U$ selon la probabilité p. Chaque joueur i observe le signal u_0^i.

– A chaque date $t \geqslant 1$, chaque joueur $i \in N$ choisit une action $a_t^i \in A^i$. Si l'état est $k_t \in K$, la nature tire un état et des signaux $(k_{t+1}, (u_t^i)_{i\in N}) \in K \times U$ selon $Q(\cdot|k_t, a_t)$. Le joueur i observe alors u_t^i et on passe dans l'état k_{t+1}.

La suite des paiements du joueur i est alors : $(g^{i,k_t}(a_t))_{t\geqslant 1}$.

Définition 1.1

– On appelle *jeu répété T fois*, et on note Γ_T, le jeu répété dont le déroulement est décrit ci-dessus et qui s'arrête à la date T. Le paiement final du joueur i est : $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T g^{i,k_t}(a_t)$.

– On appelle *jeu escompté au taux $\lambda \in \,]0,1]$*, et on note Γ_λ, le jeu répété une infinité de fois dont le déroulement est décrit ci-dessus. Le paiement final du joueur i est : $\sum_{t\geqslant 1}\lambda(1-\lambda)^{t-1}g^{i,k_t}(a_t)$.

– On appelle *jeu infiniment répété*, et on note Γ_∞, le jeu répété une infinité de fois dans lequel le paiement final du joueur i est : $\lim_T \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T g^{i,k_t}(a_t)$ si cette limite existe.

Ce modèle rend compte de plusieurs aspects. Le jeu joué en date t est paramétré par l'état k et l'état évolue en fonctions des actions choisies (selon la probabilité de transition). Les joueurs feront donc face à un dilemme : jouer pour maximiser le paiement courant, ou pour induire des états favorables. Les signaux permettent de modéliser les imperfections et les asymétries d'information qu'ont les joueurs sur l'état et les actions passées de leurs adversaires. On distingue trois grandes classes de jeux répétés :

(1) *Les jeux répétés à information complète* appelés aussi super-jeux dans lesquels l'ensemble des états K est un singleton. Dans ce cas, le jeu répété est la répétition du jeu $G = (N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$. On dit que le jeu répété est *à observation parfaite* si le signal de chaque

joueur révèle le profil d'actions : si a est le profil d'action joué, a est annoncé à chaque chaque joueur. C'est ce cas que nous étudierons dans la suite de ce texte.

(2) *Les jeux répétés à information incomplète.* Dans ce modèle les transitions sont telles que l'état reste constant égal à l'état initial. Cela revient à dire qu'on a une famille paramétrée de jeux $(G^k)_{k\in K}$, le paramètre du jeu k est tiré selon une probabilité initiale et le jeu G^k est répété. Les joueurs ont des information partielles et asymétriques sur sa valeur, données par les signaux initiaux u_0. Ce cas sera étudié dans le texte de Jérôme Renault (ce volume). On supposera toujours, comme dans le cas précédent, que les actions sont parfaitement observées.

(3) *Les jeux stochastiques.* On suppose dans ce cas que les signaux révèlent parfaitement les actions et les états. Le jeu est alors donné par une famille paramétrée de jeux $(G^k)_{k\in K}$, un état initial $k_1 \in K$ et une probabilité de transition qui détermine l'état suivant en fonction de l'état courant et des actions jouées.

1.2. Stratégies. — On appelle *histoire du jeu en date t*, la suite des états, profils d'actions et profils de signaux survenus avant la date t, c'est-à-dire une suite de la forme $h_t = (u_0, k_1, a_1, u_1, k_2 \dots, a_{t-1}, u_{t-1}, k_t)$. L'ensemble des histoires du jeu en date t est $H_t = U \times K \times (A \times U \times K)^{t-1}$ (par convention, nous supposerons qu'un ensemble à la puissance 0 est un singleton). On appelle *partie du jeu* une suite dans $H_\infty = U \times K \times (A \times U \times K)^{\mathbb{N}^*}$.

On appelle *histoire du joueur i* en date t une suite finie de la forme $h_t^i = (u_0^i, a_1^i, u_1^i, \dots, a_{t-1}^i, u_{t-1}^i)$. L'ensemble de telles histoires est $H_t^i = U^i \times (A^i \times U^i)^{t-1}$.

Dans la suite nous allons travailler avec des ensembles produits. Donnons quelques définitions générales. Soit $(E_n, d_n)_n$ une famille dénombrable d'espaces métriques compacts. La *topologie produit* sur $E = \prod_n E_n$ est celle engendrée par les projections $E \to E_n$, $e = (e_m)_m \mapsto e_n$ (topologie de la convergence simple). Pour cette topologie, E est compact (théorème de Tychonoff) et métrisable (e.g. avec la distance $\sum_n 2^{-n} \max\{d_n, 1\}$). La *tribu produit* sur E est la tribu engendrée (également) par les projections. Elle coïncide avec la tribu borélienne associée à la topologie produit. Dans la suite, les produits de métriques compacts seront munis de cette topologie et de cette tribu.

Définissons les notions suivantes de stratégies.

Définition 1.2

– Une *stratégie pure* du joueur i est une famille d'applications $s^i = (s_t^i)_{t\geqslant 1}$, avec $s_t^i : H_t^i \to A^i$. On note S^i l'ensemble de ces stratégies.

– Une *stratégie mixte* du joueur i est une distribution de probabilité borélienne sur S^i.

– Une *stratégie de comportement* du joueur i est une famille d'applications $\sigma^i = (\sigma_t^i)_{t\geqslant 1}$, avec $\sigma_t^i : H_t^i \to \Delta(A^i)$. On note Σ^i l'ensemble de ces stratégies.

– Une *stratégie générale* du joueur i est une distribution de probabilité borélienne sur Σ^i.

Les ensembles de stratégies pures et de stratégies de comportement sont des produits dénombrables de métriques compacts. Les ensembles de stratégies mixtes et de stratégies générales sont donc également des métriques compacts (on prendra toujours la topologie faible-* sur l'ensemble des probabilités boréliennes sur un métrique compact). Grâce à l'injection naturelle de E dans $\Delta(E)$, on peut considérer que S^i est un sous-ensemble de $\Delta(S^i)$ et de Σ^i, et que $\Delta(S^i)$ et Σ^i sont des sous-ensembles de $\Delta(\Sigma^i)$. Les stratégies générales contiennent donc toutes les autres notions.

Lemme 1.3. — *Un profil de stratégies générales $\alpha = (\alpha_i)_{i\in N} \in \prod_{i\in N} \Delta(\Sigma^i)$ induit une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}_\alpha$ sur H_∞ (muni de la tribu produit).*

Démonstration. — Commençons par montrer que tout profil de stratégies de comportement $\sigma = (\sigma^i)_{i\in N} \in \prod_{i\in N} \Sigma^i$ induit une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}_\sigma$ sur H_∞. Pour chaque histoire $h_t = (u_0, k_1, a_1, u_1, k_2 \ldots, a_{t-1}, u_{t-1}, k_t)$, on pose :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\sigma(h_t) = p(u_0, k_1)\big(\textstyle\prod_i \sigma^i(h_1^i)[a_1^i]\big)Q(u_1, k_2|k_1, a_1)\cdots\\ \cdot\big(\textstyle\prod_i \sigma^i(h_{t-1}^i)[a_{t-1}^i]\big)Q(u_{t-1}, k_t|k_{t-1}, a_{t-1}).\end{aligned}$$

Ceci définit la probabilité $\mathbb{P}_\sigma$ sur les cylindres $C(h_t)$ (l'ensemble des parties du jeu qui commencent par h_t), et celle-ci s'étend de manière unique sur H_∞, la tribu produit étant engendrée par les cylindres (par un théorème d'extension de Kolmogorov).

Soit maintenant un profil de stratégies générales $\alpha = (\alpha_i)_{i\in N} \in \prod_{i\in N} \Delta(\Sigma^i)$. On pose, pour tout ensemble mesurable B de H_∞, $\mathbb{P}_\alpha(B) = \int \mathbb{P}_\sigma(B)\Pi_i d\alpha^i(\sigma^i)$. □

Le résultat suivant, dû à Kuhn (1953) pour le cas fini et généralisé par Aumann (1964), dit que pour analyser les jeux répétés, il suffit de considérer les stratégies de comportement.

Théorème 1.4

(1) *Toute stratégie de comportement du joueur i est équivalente à une stratégie mixte du joueur i dans le sens suivant : pour toute stratégie de comportement σ^i, il existe une stratégie mixte μ^i, telle que pour toute stratégie générale α^{-i} des autres joueurs, on ait $\mathbb{P}_{\sigma^i,\alpha^{-i}} = \mathbb{P}_{\mu^i,\alpha^{-i}}$.*

(2) *Toute stratégie mixte du joueur i est équivalente à une stratégie de comportement du joueur i.*

(3) *Les stratégies mixtes, de comportement, et générales, du joueur i sont équivalentes.*

Lors de constructions explicites de stratégies, il est souvent plus facile de définir une stratégie de comportement qu'une stratégie mixte. Dans le premier cas, on doit spécifier les lois de probabilités utilisées par le joueur pour choisir ses actions au moment de jouer, alors que dans le second cas, il faut définir une mesure de probabilité sur S^i, produit dénombrable d'ensembles finis. On verra également que dans certains cas, on est amené à choisir une stratégie de comportement au hasard, c'est-à-dire à construire une stratégie générale. Le théorème de Kuhn, nous donne donc la souplesse de passer d'une représentation à l'autre suivant les besoins.

Démonstration

(1) Soit σ^i une stratégie de comportement du joueur i. Pour toute stratégie pure s^i, posons $s^i(t)$ l'ensemble des stratégies pures du joueur i qui coïncident avec s^i jusqu'a la date t. Pour définir μ^i, il suffit de définir $\mu^i(s^i(t))$, $(\forall\, s^i,\ \forall\, t)$, la tribu produit sur S^i étant engendrée par les cylindres $s^i(t)$. On le définit alors comme la probabilité que le joueur i, tirant ses actions avec σ^i, joue ce qu'aurait

joué s^i jusqu'a la date t :

$$\mu^i(s^i(t)) = \prod_{h_t^i \in H_t^i} \prod_{r<t} \sigma_r^i(h_r^i)[s_r^i(h_r^i)]$$

On a alors clairement, $\mathbb{P}_{\sigma^i,\alpha^{-i}} = \mathbb{P}_{\mu^i,\alpha^{-i}}$.

(2) Réciproquement, soit μ^i une stratégie mixte du joueur i. Pour toute histoire h_t^i du joueur i, posons $S^i(h_t^i)$ l'ensemble des stratégies pures du joueur i compatibles avec h_t^i : si $h_t^i = (u_0^i, a_1^i, u_1^i, \ldots, a_{t-1}^i, u_{t-1}^i)$, $S^i(h_t^i)$ est l'ensemble des stratégies pures telles que pour tout $r < t-1$, $s_r^i(u_0^i, a_1^i, u_1^i, \ldots, a_{r-1}^i, u_{r-1}^i) = a_r^i$. On définit la probabilité de jouer a^i après h_t^i, comme la probabilité de l'ensemble des stratégies pures qui jouent a^i après h_t^i, conditionnellement au fait que la stratégie soit compatible avec h_t^i. Précisément, on pose $\sigma_t^i(h_t^i)[a^i] = \mu^i(\{s^i \mid s_t^i(h_t^i) = a^i\})/\mu^i(S^i(h_t^i))$, si $\mu^i(S^i(h_t^i)) > 0$, et on définit cette quantité arbitrairement si $\mu^i(S^i(h_t^i)) = 0$. Encore une fois, $\mathbb{P}_{\sigma^i,\alpha^{-i}} = \mathbb{P}_{\mu^i,\alpha^{-i}}$.

(3) Une stratégie générale α^i peut donc se voir comme une distribution de probabilité sur les stratégies mixtes qu'on peut réduire à une stratégie mixte μ^i en prenant l'espérance : si $E \subset S^i$ est un ensemble mesurable, on pose $\mu^i(E) = \int \mu(E) d\alpha^i(\mu)$. En termes géométriques, on peut voir une probabilité sur $\Delta(S^i)$ comme une combinaison convexe de stratégies mixtes et l'identifier à son barycentre. $\square$

2. Équilibres

La problématique principale de la théorie des jeux répétés est d'étudier l'existence, voire la caractérisation, des solutions dans les jeux d'horizon long. Deux approches sont possibles : considérer les solutions de jeux à horizon fixé et étudier leur limite quand l'horizon tend vers l'infini, ou formuler un concept de solution directement sur le jeu d'horizon infini.

2.1. Équilibres : l'approche compacte

Définition 2.1

– La forme stratégique du jeu répété T fois Γ_T est donnée par :

$$(N, (S^i)_{i\in N}, \gamma_T^i)$$

avec $\gamma_T^i(s) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_s}[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T g^{i,k_t}(a_t)]$.

– La forme stratégique du jeu Γ_λ est donnée par :

$$(N,(S^i)_{i\in N},\gamma^i_\lambda)$$

avec $\gamma^i_\lambda(s)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}_s}[\sum_{t\geqslant 1}\lambda(1-\lambda)^{t-1}g^{i,k_t}(a_t)]$.

Remarque 2.2. — Grâce au théorème de Kuhn, nous pouvons définir les extension mixtes de ces jeux en utilisant les stratégies de comportement.

– L'extension mixte de Γ_T peut s'identifier au jeu sous forme stratégique :

$$(N,(\Sigma^i)_{i\in N},\gamma^i_T)$$

avec $\gamma^i_T(\sigma)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}_\sigma}[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}g^{i,k_t}(a_t)]$.

– L'extension mixte de Γ_λ peut s'identifier au jeu sous forme stratégique :

$$(N,(\Sigma^i)_{i\in N},\gamma^i_\lambda)$$

avec $\gamma^i_\lambda(\sigma)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}_\sigma}[\sum_{t\geqslant 1}\lambda(1-\lambda)^{t-1}g^{i,k_t}(a_t)]$.

On peut alors appliquer les théorèmes d'existence.

Théorème 2.3. — *Pour tout entier T et tout $\lambda\in\,]0,1]$, les jeux Γ_T et Γ_λ admettent des équilibres de Nash en stratégies de comportement. En particulier, dans le cas de jeu à somme nulle, Γ_T et Γ_λ ont chacun une valeur et les deux joueurs ont des stratégies optimales.*

Démonstration. — Les ensembles des stratégies pures sont compacts pour la topologie produit. De plus, les fonctions de paiements γ^i_T et γ^i_λ sont continues pour la topologie produit : on vérifie aisément que si une suite de stratégies $(s_q)_q$ converge simplement vers s alors les paiements associés convergent : c'est évident pour γ^i_T, et pour γ^i_λ, comme les paiements d'étapes sont uniformément bornés, on peut majorer la queue de la série par ε uniformément par rapport aux stratégies. D'après le théorème 4.4 du premier texte de ce volume, il existe un équilibre en stratégies mixtes, et grâce au théorème de Kuhn, c'est un équilibre en stratégies de comportement. □

Notation

(1) On notera E_T l'ensemble des paiements d'équilibres du jeu Γ_T : l'ensemble des $x\in\mathbb{R}^N$ pour lesquels il existe un équilibre de Nash σ

de Γ_T tel que $\gamma_T^i(\sigma) = x^i$, $\forall\, i$. Dans le cas des jeux à somme nulle, on notera v_T la valeur de Γ_T.

(2) On notera E_λ l'ensemble des paiements d'équilibres du jeu Γ_λ et dans le cas des jeux à somme nulle, on notera v_λ la valeur de Γ_λ.

L'approche compacte consiste en l'étude de la limite de E_T (ou v_T) quand T tends vers l'infini et de E_λ (ou v_λ) quand λ tend vers 0.

2.2. Équilibres : l'approche uniforme. — On veut ici se placer directement dans le cas limite d'horizon infini : considérons le jeu Γ_∞ dans lequel le paiement final du joueur i induit par des stratégies de comportement $\sigma = (\sigma^i)_{i\in N}$ est $\lim_T \gamma_T^i(\sigma)$ si cette limite existe.

Pour pallier l'absence éventuelle de limite, on peut considérer la limite supérieure ou la limite inférieure (de ces suites bornées). On peut également avoir un critère de paiement linéaire en utilisant une *limite de Banach*, c'est-à-dire une forme linéaire L sur ℓ^∞ telle que pour toute suite réelle bornée $x = (x_n)_n$, $\underline{\lim}_n x_n \leqslant L(x) \leqslant \overline{\lim}_n x_n$. Une telle forme linéaire existe par application du théorème de Hahn-Banach à l'application sous-linéaire $\overline{\lim}$. Les limites de Banach sont les éléments du dual topologique de ℓ^∞ qui s'annulent sur l'espace des suites qui tendent vers 0, et valent 1 pour la suite constante égale à 1.

Toutefois, les applications $\sigma \mapsto \overline{\lim}_T \gamma_T^i(\sigma)$, $\sigma \mapsto \underline{\lim}_T \gamma_T^i(\sigma)$, $\sigma \mapsto L((\gamma_T^i(\sigma))_T)$ ne sont pas continues pour la topologie produit : changer le paiement en un nombre fini d'étapes ne change pas la limite de Césaro.

On adopte donc l'approche uniforme qui définit les solutions de Γ_∞ comme des solutions approchées de jeux finiment répétés arbitrairement longs. Nous donnons d'abord les définitions dans le cas de la somme nulle.

Définition 2.4. — Soit Γ_∞ un jeu infiniment répété à somme nulle, notons $g = g^1 = -g^2$.

– Le joueur 1 *garantit uniformément* le paiement $d \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \sigma^1 \in \Sigma^1,\ \exists\, T_0,\ \forall\, \sigma^2 \in \Sigma^2,\ \forall\, T \geqslant T_0, \quad \gamma_T(\sigma^1, \sigma^2) \geqslant d - \varepsilon.$$

– Le joueur 2 *défend uniformément* le paiement $d \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \sigma^1 \in \Sigma^1,\ \exists\, \sigma^2 \in \Sigma^2,\ \exists\, T_0,\ \forall\, T \geqslant T_0, \quad \gamma_T(\sigma^1, \sigma^2) \leqslant d + \varepsilon.$$

– Le maxmin uniforme $\underline{v}$ de Γ_∞, s'il existe, est tel que le joueur 1 garantit uniformément $\underline{v}$ et le joueur 2 défend uniformément $\underline{v}$. On définit le minmax uniforme $\overline{v}$ en échangeant les rôles des joueurs.

– Le jeu Γ_∞ a une valeur v si $\underline{v} = \overline{v} = v$.

– Lorsque le jeu a une valeur, une stratégie σ^1 du joueur 1 sera dite optimale si elle vérifie :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, T_0,\, \forall\, \sigma^2 \in \Sigma^2,\, \forall\, T \geqslant T_0, \quad \gamma_T(\sigma^1, \sigma^2) \geqslant v - \varepsilon.$$

On définit similairement les stratégies optimales du joueur 2.

Pour les jeux à somme non nulle nous donnons une définition analogue :

Définition 2.5. — Soit Γ_∞ un jeu infiniment répété. Un profil de stratégies de comportement $\sigma = (\sigma^i)_{i\in N}$ est un *équilibre uniforme* de Γ_∞ si, pour tout $i \in N$, la suite $(\gamma_T^i(\sigma))_T$ converge vers une limite $\gamma_\infty^i(\sigma)$ quand T tend vers $+\infty$, et de plus,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, T_0,\, \forall\, T \geqslant T_0,\, \forall\, i \in N,\, \forall\, \tau^i \in \Sigma^i, \quad \gamma_T^i(\tau^i, \sigma^{-i}) \leqslant \gamma_T^i(\sigma) + \varepsilon.$$

Un équilibre uniforme est donc un ε-équilibre dans tout jeu finiment répété suffisamment long. Nous noterons E_∞ l'ensemble des paiements d'équilibres uniformes de Γ_∞.

2.3. Principales questions. — Les questions auxquelles nous allons nous intéresser par la suite sont, pour la somme nulle et l'approche compacte : $\lim_T v_T$, $\lim_\lambda v_\lambda$ existent-elles, sont-elles égales, peut-on calculer ces limites ? Pour l'approche uniforme, le minmax et le maxmin uniformes existent-ils, existe-t-il une valeur, peut-on la calculer, quels sont les liens avec $\lim_T v_T$ et $\lim_\lambda v_\lambda$? Les mêmes questions se posent en somme non nulle pour les paiements d'équilibres.

La partie suivante traite du cas le plus simple de jeu répété : les jeux répétés à information complète et observation parfaite.

3. Jeux répétés à information complète et observation parfaite

Soit $G = (N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ un jeu fini. Considérons le jeu répété dans lequel le jeu G est joué à chaque étape $t \in \mathbb{N}^*$ et si $a_t \in A$ est le profil d'actions joué en date t, a_t est observé par tous les joueurs.

C'est un cas très simple de jeu répété dans lequel l'ensemble d'états est réduit à un singleton et les signaux des joueurs sont *parfaits*, c'est-à-dire qu'ils révèlent parfaitement les actions jouées.

Commençons par un lemme immédiat.

Lemme 3.1. — *Soit $\alpha = (\alpha^i)_{i\in N} \in \prod_{i\in N} \Delta(A^i)$ un équilibre de Nash du jeu G. Le profil de stratégies de comportement σ tel que pour tout i, pour tout h_t^i, $\sigma^i(h_t^i) = \alpha^i$ est un équilibre de Nash de Γ_T, de Γ_λ (pour tout T et tout λ) et un équilibre uniforme de Γ_∞.*

Il s'ensuit :

Corollaire 3.2. — *Si le jeu G est à somme nulle de valeur v alors, pour tout T et tout λ, $v_T = v_\lambda = v$. De plus, la valeur de Γ_∞ existe et vaut v.*

Dans le cas des jeux répétés à information complète, la répétition d'un jeu à somme nulle ne change pas la valeur. Examinons maintenant le cas de la somme quelconque.

Notations. — Posons $g : A \to \mathbb{R}$ l'application « vecteur de paiement », $g(a) = (g^i(a))_{i\in N}$. On appelle *ensemble réalisable* l'enveloppe convexe $\mathrm{co}\, g(A)$ des vecteurs $g(a)$, $a \in A$.

Pour chaque joueur i, posons

$$v^i = \min_{\alpha^{-i}\in\prod_{j\neq i}\Delta(A^j)} \max_{a^i\in A^i} g^i(a^i, \alpha^{-i})$$

et $\mathrm{IR} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, i \in N,\, x^i \geqslant v^i\right\}$. La quantité v^i s'appelle *niveau de rationalité individuelle* ou *niveau minmax* du joueur i : v^i est le plus petit paiement que le joueur i peut obtenir dans le jeu G en jouant une meilleure réponse contre un profil de stratégies mixtes de ses adversaires. C'est aussi le plus petit paiement que les joueurs $-i$ peuvent garantir s'ils jouent dans le but de minimiser le paiement du joueur i.

Posons enfin $E = \mathrm{co}\, g(A) \cap \mathrm{IR}$. Remarquons que si le jeu G est à somme nulle de valeur v, E se réduit au singleton $\{(v, -v)\}$.

Lemme 3.3. — *Les ensembles de paiements d'équilibres E_T, E_λ et E_∞ sont inclus dans E (pour tous T, λ).*

Démonstration. — Pour tout profil de stratégies σ, le vecteur de paiement appartient à chaque étape au convexe compact $\operatorname{co} g(A)$. En prenant la moyenne (arithmétique ou escomptée) puis l'espérance, le vecteur de paiement du jeu répété est également dans $\operatorname{co} g(A)$.

Pour l'inclusion dans IR, soit σ un équilibre de Γ_T (resp. de Γ_λ, resp. un équilibre uniforme) et soit i un joueur. Définissons une stratégie τ^i du joueur i qui à chaque étape t et après chaque histoire h_t joue une action qui maximise sur A^i la quantité $g^i(a^i, (\sigma^j(h_t))_{j\neq i})$. D'après la définition de v^i, $g^i(\tau^i(h_t), (\sigma^j(h_t))_{j\neq i}) \geqslant v^i$, pour tout t et pour toute histoire h_T. Il s'ensuit $\gamma^i_T(\tau^i, \sigma^{-i}) \geqslant v^i$ et $\gamma^i_\lambda(\tau^i, \sigma^{-i}) \geqslant v^i$, pour tous T et λ. Comme σ est un équilibre de Γ_T, $\gamma^i_T(\sigma) \geqslant \gamma^i_T(\tau^i, \sigma^{-i}) \geqslant v^i$. La conclusion est identique pour Γ_λ et pour les équilibres uniformes on conclut en remarquant que $\lim_T \gamma^i_T(\sigma) \geqslant \overline{\lim}_T \gamma^i_T(\tau^i, \sigma^{-i}) \geqslant v^i$. □

3.1. Le jeu Γ_∞. — Le résultat principal dit que l'inclusion inverse est vraie : les paiements d'équilibres sont les paiements réalisables et individuellement rationnels. Ce résultat s'appelle communément le *Folk Théorème* car était informellement connu de bon nombre de chercheurs dès les années 60 mais est resté plusieurs années non publié. Les premières version publiées sont dues à Aumann et Shapley (1976) (ré-édité en 1994) et à Rubinstein (1977).

Ce résultat se formule pour le jeu Γ_∞.

Théorème 3.4. — *$E_\infty = E$.*

Démonstration. — Considérons un paiement x dans E. Comme x est réalisable, il existe une partie $h = (a_1, \dots, a_t, \dots)$ telle que pour tout joueur i, $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} g^i(a_t) \xrightarrow[T\to\infty]{} x^i$. Nous appellerons h le plan principal de la stratégie, et jouer selon h pour un joueur i en date t signifie jouer la i-ème composante de a_t. Pour chaque couple de joueurs distincts (i,j), fixons $\alpha^{i,j}$ dans $\Delta(A^j)$ de façon à ce que $(\alpha^{i,j})_{j\neq i}$ réalise le min dans l'expression de v^i. Fixons maintenant un joueur i dans N, et définissons une stratégie σ^i. σ^i commence en date 1 par jouer selon le plan principal, et continue de jouer selon h tant que tous les autres joueurs le font. Si à une certaine date $t \geqslant 1$, pour la première fois un joueur j ne joue pas selon le plan principal, alors σ^i joue à toutes les dates ultérieures la probabilité $\alpha^{j,i}$ (si pour la première fois à la même date plusieurs joueurs sortent du plan principal, on punit celui de ces joueurs qui est le plus petit).

Si tous les joueurs adoptent ces stratégies, la suite $(a_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ sera jouée et le paiement moyen limite réalisé est bien x. Supposons que le joueur i emploie une stratégie τ^i qui sort du plan principal pour la première fois en date t, alors que les autres jouent σ^{-i}. Le joueur i recevra au plus v^i à toutes les dates suivantes. Son paiement moyen en date T sera donc majoré par :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{T}(\displaystyle\sum_{t=1}^{T-1} g^i(a_t) + M) & \text{si } t \geqslant T; \\ \dfrac{t-1}{T}\displaystyle\sum_{s=1}^{t-1} g^i(a_s) + \dfrac{1}{T}M + \dfrac{T-t}{T}v^i & \text{si } t < T, \end{cases}$$

où $M = \max_{i,a}\left|g^i(a)\right|$. Soit $\varepsilon > 0$, choisissons T_0 assez grand tel que pour tout $T \geqslant T_0$:

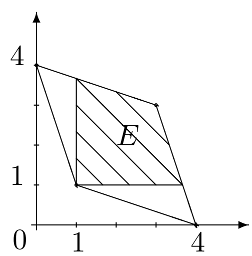
$$\frac{1}{T}M \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \Big(\frac{t-1}{T} > \frac{\varepsilon}{2M} \Longrightarrow \frac{1}{t-1}\sum_{s=1}^{t-1} g^i(a_s) \leqslant x^i + \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Comme $v^i \leqslant x^i$, le paiement du joueur i est majoré par $x^i + \varepsilon$ et ce pour toute déviation. □

Le Dilemme du Prisonnier Répété. — Reprenons le jeu du Dilemme du Prisonnier :

	C	D
C	$3,3$	$0,4$
D	$4,0$	$1,1$

Dans ce cas, l'ensemble E est le suivant :



Bien que l'action C soit strictement dominée pour chaque joueur, on construit un équilibre uniforme de paiement $(3,3)$: jouer C si l'autre a toujours fait de même dans le passé, sinon jouer D.

3.2. Le jeu Γ_T. — Nous allons maintenant voir si l'approche uniforme et l'approche compacte donnent les mêmes résultats : la limite de E_T est-elle égale à E ? La convergence d'ensemble est au sens de la distance de Hausdorff. Étant donnés deux compacts A, B de $\mathbb{R}^n$, on pose $d(A,B) = \max\{\max_{a\in A} d(a,B), \max_{b\in B} d(b,A)\}$. Comme $E_T \subset E$, $E_T \to E$ revient à :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,T_0,\ \forall\,T \geqslant T_0,\ \forall\,x \in E,\ \exists\,y \in E_T : \quad \|x-y\| \leqslant \varepsilon$$

On a la propriété :

Proposition 3.5. — *Pour tous entiers T et T', on a*

$$TE_T + T'E_{T'} \subset (T+T')E_{T+T'}.$$

Ici, $\alpha A + \beta B$ désigne l'ensemble des $\alpha a + \beta b$, avec $a \in A$, $b \in B$. Ce résultat s'obtient simplement en remarquant que jouer un équilibre de E_T puis un équilibre de $E_{T'}$ est un équilibre de $E_{T+T'}$. $(E_T)_T$ se comporte comme une suite croissante d'ensembles : si elle converge c'est forcément vers $\cup_T E_T$.

Considérons le dilemme du prisonnier encore une fois. Il est clair que pour tout équilibre de Nash du jeu Γ_T, les joueurs doivent jouer D à la dernière étape, quelle que soit l'histoire passée : on ne peut en effet pas les menacer de représailles. Le jeu est donc équivalent à un jeu de longueur $T-1$, les actions d'étapes T étant fixées. Mais alors les joueurs ne peuvent pas non plus se menacer mutuellement en étape $T-1$, puisqu'il joueront D ensuite quoiqu'il arrive. Ils joueront donc D également en $T-1$. Par récurrence on obtient : $E_T = \{(3,3)\}$ pour tout T. Plus généralement, posons $v = (v^i)_{i\in N}$ le vecteur des niveaux de rationalité individuelle ou *point de menace*, on a le résultat du à Sorin (1986) :

Proposition 3.6. — *Si $E_1 = \{v\}$ alors $E_T = \{v\}$ pour tout T.*

La convergence de E_T vers E nécessite donc une condition sur les paiements du jeu. Dans un équilibre d'un jeu finiment répété, un équilibre de Nash du jeu statique doit être joué à la dernière étape. Pour que les menaces soient dissuasives, il faut que les paiements de punitions, *i.e.* les niveaux de rationalité individuels, soient strictement inférieurs à un paiement d'équilibre de Nash de G : c'est précisément la condition qui manque pour le Dilemme du Prisonnier. On a alors le théorème (Benoit et Krishna, 1987) :

Théorème 3.7. — *Supposons que pour tout joueur i, il existe $e(i) \in E_1$ tel que $e^i(i) > v^i$. Alors $E_T \to_{T\to+\infty} E$.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in E$. Prenons une histoire $h = (a_1, \dots, a_L)$ telle que $y = \frac{1}{L}\sum_{t=1}^{L} g(a_t)$ est à distance inférieure à ε de x. Soit la suite d'actions consistant à jouer K fois de suite l'histoire h, pour un certain entier K.

La stratégie consiste à jouer cette suite puis à jouer R fois les équilibres de G correspondant aux paiements $(e(1), \dots, e(N))$, si aucune déviation n'apparaît au cours des LK premières étapes (on note N le nombre de joueurs). Si un joueur i dévie à une de ces étapes, il est puni au niveau v^i jusqu'a la fin du jeu. Ceci définit un profil de stratégies pour le jeu répété $T = LK + RN$ fois. Vérifions que c'est un équilibre dont le paiement est proche de x pour K et R bien choisis.

Supposons que le joueur i dévie. Une déviation dans les RN dernières étapes n'est pas profitable. S'il dévie pendant les LK premières étapes, son paiement total augmente d'au plus $2M$ (on a encore posé $M = \max_{i,a} \left|g^i(a)\right|$), alors que le fait d'être puni à la fin lui fait perdre $R(e^i(i) - v^i)$. Comme $e^i(i) - v^i > 0$, pour R assez grand, $R(e^i(i) - v^i) > 2M$ pour tout i.

Le paiement moyen si tous les joueurs utilisent ces stratégies est

$$\frac{LK}{LK + RN}\, y + \frac{R}{LK + RN} \sum_i g(e(i)),$$

dont la distance à y est inférieure à

$$\frac{2MN}{L} \cdot \frac{R}{K}$$

et peut être rendue inférieure à ε en choisissant K grand devant R.

Enfin, si le nombre de répétitions T n'est pas de la forme $LK + RN$, il existe K tel que $LK + RN < T < L(K+1) + RN$. On prend alors la stratégie définie ci-dessus pour K et on la complète en jouant un équilibre de G (par exemple celui de paiement $e(1)$) aux dernières étapes du jeu. $\square$

3.3. Le jeu Γ_λ. — A la différence du jeu finiment répété, le jeu escompté n'a pas de fin, il est donc possible, à n'importe quelle étape de menacer les joueurs de représailles. Toutefois, considérons le jeu à trois joueurs suivant (Forges, Mertens et Neyman, 1986), dans lequel le joueur 3 n'a qu'une action.

	P	F
P	$1, -1, 0$	$-1, 1, 0$
F	$-1, 1, 0$	$1, -1, 1$

Il s'agit d'un jeu à somme nulle entre les joueurs 1 et 2 (c'est Matching Pennies) dont la valeur est 0 et chaque joueur (1 ou 2) a une unique stratégie optimale : le jeu à un unique équilibre de Nash dans lequel chaque joueur joue l'action mixte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dans le jeu Γ_λ (ou dans Γ_T), l'unique équilibre consiste à jouer $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ à chaque étape, indépendamment du passé. Le seul paiement d'équilibre de Γ_λ (resp. de Γ_T) est donc $(0, 0, \frac{1}{4})$ alors que $(0, 0, \frac{1}{2})$ est dans E. Comme dans le jeu finiment répété, il faut introduire une condition pour garantir $E_\lambda \to {}_{\lambda\to 0}E$.

***Théorème 3.8* (Sorin, 1986).** — *Si le jeu est à deux joueurs ou qu'il existe $x \in E$ tel que $x^i > v^i$ pour tout i, alors $E_\lambda \to {}_{\lambda\to 0}E$.*

Démonstration

(1) Supposons que l'ensemble des x de E tels que $x^i > v^i$ pour tout i est non vide et prenons $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n tel que pour tout $y \in E$, on peut trouver dans la boule de centre y et de rayon ε un x_n vérifiant $x_i^n > v^i + \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout i et tel que x_n est une combinaison convexe des $g(a)$ avec des coefficients rationnels de la forme n_a/n.

Construisons alors une suite n-périodique de profils d'actions telle que chaque profil $a \in A$ apparaît n_a fois dans une période et notons $(a_t^*)_t$ cette suite. Ainsi, $x^n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n g(a_t^*)$. Soit σ le profil de stratégies de comportement qui consiste à jouer a_t^* en date t si cette consigne a été respectée par tous les joueurs dans le passé, et à punir pour toujours le joueur i (au niveau v^i) si celui-ci dévie. Montrons maintenant que pour λ suffisamment proche de 0, σ est un équilibre qui induit un paiement proche de y.

Comme la suite d'actions est périodique, pour $0 < \lambda < 1$,

$$\gamma_\lambda(\sigma) = \sum_{t=1}^{n} \frac{\lambda(1-\lambda)^{t-1}}{1-(1-\lambda)^n}\, g(a_t^*)$$

Pour tout t,

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda(1-\lambda)^{t-1}}{1-(1-\lambda)^n} = \frac{1}{n},$$

donc $\lim_{\lambda\to 0}\gamma_\lambda(\sigma) = x^n$, de plus la convergence est uniforme par rapport au point x^n considéré. Il existe donc λ_0 tel que pour tout $\lambda < \lambda_0$, on ait $\|\gamma_\lambda(\sigma) - y\| \leqslant 2\varepsilon$, λ_0 étant uniforme par rapport au choix de y dans E.

Supposons maintenant que le joueur i dévie. Grâce à la périodicité, supposons sans perte de généralité qu'il joue pour la première fois une action a^i différente de a_T^{*i} au cours de la première période en date T, $1 \leqslant T \leqslant n$. Posons encore une fois $M = \max_{i,a}\left|g^i(a)\right|$ et majorons le paiement du joueur i aux T premières étapes par M. Le paiement global est alors majoré par :

$$(1-(1-\lambda)^T)M + (1-\lambda)^T v^i < (1-(1-\lambda)^T)M + (1-\lambda)^T\Big(x_n^i - \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$

Pour avoir un équilibre on veut donc

$$(1-(1-\lambda)^T)M + (1-\lambda)^T\Big(x_n^i - \frac{\varepsilon}{2}\Big) \leqslant x_n^i$$

or pour cela il suffit d'avoir $(1-(1-\lambda)^T)2M \leqslant (1-\lambda)^T\varepsilon/2$ ce qui est vrai pour λ suffisamment petit, uniformément par rapport au point x_n. On a donc bien la convergence de E_λ vers E.

(2) Supposons que le jeu soit à deux joueurs. Si le cas précédent ne s'applique pas alors soit, $E = \{v\}$ mais alors v est le paiement d'un équilibre du jeu G et il suffit de répéter cet équilibre : $E_\lambda = E$. Soit, pour tout x dans E, $x^1 = v^1$ et il existe x dans E tel que $x^2 > v^2$ (ou la condition symétrique en échangeant les deux joueurs). Ceci implique que v^1 est le paiement maximal du joueur 1. On construit donc un équilibre comme dans le cas précédent mais sans tenir compte des déviations de ce joueur (qui n'y a jamais intérêt). □

3.4. Équilibres sous-jeux parfaits. — Certains équilibres construits dans les paragraphes précédents sont critiquables en tant que solutions rationnelles car reposant sur des menaces non crédibles : étant donné qu'un joueur a dévié, rien n'assure que ses adversaires auront intérêt à le punir. On introduit alors la notion d'*équilibre sous-jeu parfait.* Un profil de stratégies σ est un équilibre sous-jeu parfait si pour toute histoire h, σ induit un équilibre dans le jeu répété qui reste à jouer après h. On note E'_∞ l'ensemble des paiements d'équilibres sous-jeu parfaits de Γ_∞ (de même E'_T et E'_λ). Cette notion avait déjà été considérée par Aumann-Shapley et Rubinstein et on a :

Théorème 3.9. — $E'_\infty = E_\infty = E$.

La démonstration est simple, il suffit d'adapter la construction du Folk théorème : si un joueur dévie en date t, il est puni jusqu'à la date t^2, après quoi les joueurs oublient la déviation et se remettent à jouer la suite prévue. La longueur de la punition est suffisante pour faire perdre tout intérêt à dévier, les $t^2 - t$ étapes de punitions étant prépondérantes devant les t premières étapes. De plus un joueur n'hésitera pas à appliquer la punition puisqu'un nombre fini de dates ne compte pas sur son paiement limite.

Pour les jeux finiment répétés et les jeux escomptés, il faut ajouter encore des conditions.

Théorème 3.10 **(Benoit et Krishna, 1985, Gossner, 1995)**
Supposons que pour tout i, il existe $e(i), f(i) \in E_1$ tels que $e^i(i) > f^i(i)$. Alors $E'_T \to_{T\to+\infty} E$.

Théorème 3.11 **(Fudenberg et Maskin, 1986).** — *Si E est d'intérieur non vide alors, $E'_\lambda \to_{\lambda\to 0} E$.*

L'intuition est la même pour ces deux résultats. On construit une suite d'actions qui donne le bon paiement et que les joueurs doivent suivre. En cas de déviation, on punit pendant un nombre fini d'étapes et la phase de punition est suivie d'une phase de récompense : si le joueur j a correctement puni le joueur i, il reçoit la récompense, sinon il est puni à son tour. Dans le cas des jeux finiment répétés, comme on doit finir le jeu par des équilibres statiques, on récompense i en lui donnant le paiement $e^i(i)$ (et $f^i(i)$ s'il n'a pas appliqué les punitions). Dans le cas des jeux escomptés, l'hypothèse d'intérieur non vide assure que, si le vecteur de paiement à atteindre est à l'intérieur de E, il est possible d'induire des paiements escomptés futurs dans n'importe quelle direction, et donc d'augmenter ou de diminuer le paiement de n'importe quel joueur.

3.5. Extensions : jeux avec signaux. — Nous n'avons traité ici que du cas d'observation parfaite. Cette hypothèse est cruciale pour le Folk théorème et la construction d'équilibre correspondante. Dans le modèle général avec des signaux quelconques, les phénomènes suivants (notamment) apparaissent :

(1) Il peut y avoir des déviations indétectables : un joueur peut choisir une autre action que celle prescrite sans modifier les signaux des autres joueurs. Un profil d'actions a pour lequel un joueur i peut dévier profitablement – jouer b^i tel que $g^i(b^i, a^{-i}) > g^i(a)$ – sans changer les signaux des autres joueurs, ne peut pas être joué dans un équilibre du jeu répété.

(2) Lorsqu'une déviation est détectée, plusieurs joueurs peuvent être suspectés : les signaux peuvent être compatibles avec des déviations de différents joueurs. On ne peut donc pas toujours construire des équilibres en punissant *un* joueur à son niveau minmax.

(3) La finesse des signaux pouvant différer d'un joueur à l'autre, certains joueurs peuvent détecter une déviation et pas d'autres. Les joueurs les mieux informés peuvent essayer de communiquer leurs informations aux autres, cette communication devant se faire au travers des signaux et devant être robuste aux déviations unilatérales.

Les deux branches principales de cette littérature suivent la dichotomie que nous avons introduite : approche uniforme *vs* approche compacte. Dans l'approche uniforme les premières caractérisations de paiements d'équilibres dans les jeux avec signaux sont dues à E. Lehrer (1989, 1992). Des avancées récentes sont dues à Renault et Tomala (1998, 2004a) et à Gossner et Tomala (2006a, 2006b).

Pour l'approche compacte, la majorité des articles étudient le jeux escomptés et les équilibres sous-jeux parfaits. Les articles de référence sont Abreu, Pearce et Stachetti (1990), Fudenberg et Levine (1994) et Fudenberg, Levine et Maskin (1994).

La recherche est actuellement très active dans ces deux branches.

Bibliographie

ABREU (D.), PEARCE (D.) & STACCHETTI (E.)
[1990] Toward a theory of discounted repeated games with imperfect monitoring, *Econometrica*, 58 (1990), p. 1041–1063.
AUMANN (R.J.)
[1964] Mixed and behaviour strategies in infinite extensive games, dans Dresher, Shapley & Tucker, éd., *Advances in Game Theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 52, Princeton University Press, 1964, p. 627–650.
AUMANN (R.J.) & MASCHLER (M.)
[1995] *Repeated games with incomplete information*, M.I.T. Press, 1995.
AUMANN (R.J.) & SHAPLEY (L.S.)
[1994] Long-term competition–A game theoretic analysis, dans Megiddo (N.), éd., *Essays on game theory*, New-York : Springer-Verlag, 1994, p. 1–15.
BENOIT (J-P.) & KRISHNA (V.)
[1985] Finitely repeated games, *Econometrica*, 53 (1985), p. 905–922.
[1987] Nash equilibria of finitely repeated games, *International Journal of Game Theory*, 16 (1987), p. 197–204.
BLACKWELL (D.)
[1956] An analog of the minmax theorem for vector payoffs, *Pacific Journal of Mathematics*, 65 (1956), p. 1–8.
BOREL (É.)
[1921] La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 173 (1921), p. 1304–1308.
FORGES (F.), MERTENS (J.-F.) & NEYMAN (A.)
[1986] A counterexample to the Folk theorem with discounting, *Economic Letters*, 20 (1986), p. 7.
FORGES (F.), RENAULT (J.), SORIN (S.) & VIEILLE (N.)
[2006] Théorie des jeux : le prix Nobel pour les travaux de R.J. Aumann, *MATAPLI, Bulletin de liaison de la SMAI*, 79 (2006), p. 47–70.
FUDENBERG (D.) & MASKIN (E.)
[1986] The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information, *Econometrica*, 54 (1986), p. 533–554.
FUDENBERG (D.) & LEVINE (D.K.)
[1994] Efficiency and observability with long-run and short-run players, *Journal of Economic Theory*, 62 (1994), p. 103–135.
FUDENBERG (D.), LEVINE (D.K.) & MASKIN (E.)
[1994] The folk theorem with imperfect public information, *Econometrica*, 62 (1994), p. 997–1039.
GLICKSBERG (I.)
[1952] A further generalization of the Kakutani fixed point theorem,

with applications to Nash equilibrium points, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3 (1952), p. 170–174.

Gossner (O.)

[1995] The folk theorem for finitely repeated games with mixed strategies, *International Journal of Game Theory*, 24 (1995), p. 95–107.

Gossner (O.) & Tomala (T.)

[2006] Empirical distributions of beliefs under imperfect monitoring, *Mathematics of Operations Research*, (2006).

[à paraître] Secret correlation in repeated games with signals, *Mathematics of Operations Research*, (à paraître).

Kakutani (S.)

[1941] A generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Mathematical Journal*, 8 (1941), p. 416–427.

Kohlberg (E.)

[1975] Optimal strategies in repeated games with incomplete information, *International Journal of Game Theory*, 4 (1975), p. 7–24.

Kuhn (H.W.)

[1953] Extensive games and the problem of information, dans Kuhn & Tucker, éd., *Contributions to the Theory of Games, vol. II*, Annals of Mathematical Studies, vol. 28, Princeton University Press, 1953, p. 193–216.

Lehrer (E.)

[1989] Nash equilibria of n player repeated games with semi-standard information, *International Journal of Game Theory*, 19 (1989), p. 191–217.

[1992] Correlated Equilibria in two-Player Repeated Games with non-Observable Actions, *Mathematics of Operations Research*, 17 (1992), p. 175–199.

Mertens (J.-F.)

[1986] Repeated Games, dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berkeley)*, Providence, RI : American Mathematical Society, 1986, p. 1528–1577.

Myerson (R.)

[1991] *Game Theory*, Harvard University Press, 1991.

Mertens (J.-F.), Sorin (S.) & Zamir (S)

[1994] Repeated games, 1994, p. 9420–9422 ; CORE discussion paper.

Mills (H.D.)

[1956] Marginal value of matrix games and linear programs, dans Kuhn & Tucker, éd., *Linear Inequalities and Related Systems*, Annals of Mathematical Studies, vol. 38, Princeton University Press, 1956, p. 183–193.

NASH (J.)

[1950] Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36 (1950), p. 48–49.

OSBORNE (M.J.) & RUBINSTEIN (A.)

[1994] *A course in Game Theory*, M.I.T. Press, 1994.

RENAULT (J.) & TOMALA (T.)

[1998] Repeated proximity games, *International Journal of Game Theory*, 27 (1998), p. 539–559.

[2004] Communication equilibrium payoffs of repeated games with imperfect monitoring, *Games and Economic Behavior*, 49 (2004), p. 313–344.

RUBINSTEIN (A.)

[1977] *Equilibrium in supergames*, Research Memorandum, vol. 25, Center for Research in Mathematical Economics and Game Theory, 1977.

SHAPLEY (L.S.)

[1953] Stochastic games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, 39 (1953), p. 1095–1100.

SION (M.)

[1958] On General Minimax Theorems, *Pacific Journal of Mathematics*, 8 (1958), p. 171–176.

SORIN (S.)

[1986] On Repeated Games with Complete Information, *Mathematics of Operations Research*, 11 (1986), p. 147–160.

[1992] Repeated Games with Complete Information, dans Aumann (R.J.) & Hart (S.), éd., *Handbook of Game Theory, vol. I*, Elsevier Science Publishers, 1992, p. 71–107.

[2002] *A First Course on Zero-Sum Repeated Games*, Mathématiques et Applications, Springer, 2002.

VAN DAMME (E.)

[1987] *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, Springer, 1987.

VON NEUMANN (J.)

[1928] Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen*, 100 (1928), p. 295–320.

VON NEUMANN (J.) & MORGENSTERN (O.)

[1944] *Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.

ZERMELO (E.)

[1912] Über eine Anwendung der Mengenlehrer auf die Theorie des Schachspiels, dans *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge), vol. II*, 1912, p. 501.